NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Sur les théorèmes de Binet et de Staudt concernant les nombres de Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16 (1877), p. 157-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__157_0>

SUR LES THÉORÈMES DE BINET ET DE STAUDT

CONCERNANT LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. MM. Clausen et Staudt ont découvert, en même temps, sur les nombres de Bernoulli, un théorème fort remarquable dont la démonstration a été donnée par ce dernier, dans le *Journal de Crelle* (t. 21, p. 372). En conservant les notations que nous avons adoptées précédemment (*Nouvelles Annales*, même tome, p. 21), ce théorème s'énonce ainsi : *Le coefficient* B_n *de Bernoulli a pour expression*

$$(1) \qquad B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} - \ldots - \frac{1}{\lambda},$$

$2, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *désignant des nombres premiers tels que* $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1, \ldots, \lambda - 1$ *soient des diviseurs de* n, *et* A_n *un nombre entier*. On a, pour les nombres A_n, les valeurs suivantes :

$$A_0 = A_2 = A_4 = \ldots = A_{12} = 1,$$
$$A_1 = A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n+1} = 0,$$

$$A_{14} = 2, \quad A_{16} = -6, \quad A_{18} = 56,$$
$$A_{20} = -528, \quad A_{22} = 6193, \quad A_{24} = -86576,$$
$$A_{26} = 1425518, \quad A_{28} = -27298230, \quad A_{30} = 601580875,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. On déduit immédiatement du *théorème de Staudt* que l'expression $a(a^n - 1)B_n$ est toujours un nombre

entier, quel que soit l'entier a. En effet, le binôme $a^n - 1$ est divisible par $a^{\alpha-1} - 1$, lorsque $\alpha - 1$ désigne un diviseur de n, et le produit $a(a^{\alpha-1} - 1)$ est divisible par α, si α est un nombre premier, d'après le théorème de Fermat. Pour $a = 2$, on retrouve un résultat indiqué par M. Genocchi, qui en a déduit des conséquences importantes relatives au fameux problème de Fermat sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p = z^p \quad (*).$$

3. M. Hermite a indiqué une méthode de calcul des nombres entiers A_n, dont nous allons simplifier la démonstration en lui laissant une forme générale (**). Cette méthode conduit à la connaissance d'un grand nombre de fonctions numériques, venant se joindre à toutes celles dont la théorie des fonctions elliptiques a donné l'origine et les propriétés. Soit $f(x)$ une fonction quelconque de degré $2n$, telle que chacune des puissances de x ait un coefficient égal au produit du coefficient binomial correspondant par un nombre entier, et posons

$$(2) \qquad \varphi_r(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots r}[f^{(r)}(x+1) - f^{(r)}x].$$

L'application du développement de Taylor et de la formule symbolique [*voir* p. 23, formule (18)]

$$(3) \qquad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x)$$

nous donne

$$(4) \quad f'(x) = B_0\varphi_0 + B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2 + B_4\varphi_4 + \ldots + B_{2n}\varphi_{2n}.$$

(*) A. Genocchi, *Sur les nombres de Bernoulli* (*Annales de Tortolini*; 1852).

(**) *Journal de Crelle*, t. 81. — Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt; 1875.

• En remplaçant les valeurs des coefficients B, d'après (1), on a, après avoir posé (p désigne un nombre premier)

$$(5)\quad \begin{cases} \Sigma_1(x) = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \ldots + A_{2n}\varphi_{2n} - f(x), \\ p\Sigma_p(x) = \varphi_{p-1} + \varphi_{2p-2} + \varphi_{3p-3} + \varphi_{4p-4} + \ldots, \end{cases}$$

la formule suivante pour le calcul des nombres A :

$$(6)\quad \Sigma_1(x) = \Sigma_2(x) + \Sigma_3(x) + \Sigma_5(x) + \Sigma_7(x) + \Sigma_{11}(x) + \ldots,$$

où les Σ se rapportent à tous les nombres premiers jusqu'à $2n+1$. D'ailleurs, $\Sigma_p(x)$ est entier pour toutes les valeurs entières de x, puisque, si la somme des fractions

$$\frac{a_0}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \ldots + \frac{l}{\lambda}$$

désigne un nombre entier, chacune des fractions qui composent cette somme est toujours un nombre entier, lorsque tous les dénominateurs sont premiers entre eux.

4. La somme des puissances semblables des nombres inférieurs et premiers à un nombre donné a été obtenue par Binet, au moyen du calcul symbolique (*Comptes rendus*, t. XXXIII, p. 920; 1851). Voici une formule plus simple. Les sommes des puissances $n^{ièmes}$ des $(x-1)$ premiers nombres, et des $\left(\frac{x}{d}-1\right)$ premiers multiples de d, en désignant par d un diviseur quelconque de x, ont respectivement pour expressions

$$\frac{(x+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{(x+dB)^{n+1} - (dB)^{n+1}}{d(n+1)}.$$

On a donc, par un procédé analogue à celui qui conduit à l'évaluation du nombre des entiers inférieurs et premiers au nombre

$$x = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

la formule symbolique suivante, dans laquelle Σ_n désigne

la somme des puissances $n^{ièmes}$ des entiers inférieurs et premiers à x,

$$(7) \qquad (n+1)\Sigma_n = (x+Q)^{n+1} - Q^{n+1};$$

et l'on a

$$(8) \qquad \begin{cases} Q_n = B_n(1-a^{n-1})(1-b^{n-1})(1-c^{n-1})\ldots, \\ Q_0 = \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots. \end{cases}$$