Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 13 (1874), p. 392-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1874_2_13__392_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1131

(voir même tome, p. 159),

PAR M. H. LEMELLE,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

D'un point quelconque (x_0, y_0) *du plan, on peut mener* $2m-p$ *normales à la courbe*

$$(1)\qquad y^m - max^p = 0, \quad m > p.$$

Les pieds de ces normales sont sur la conique

$$(2)\qquad mx^2 + py^2 - mx_0x - py_0y = 0.$$

Cette conique passe par l'origine O *et le point* P (x_0, y_0) ; *son centre est le milieu de* OP, *et son équation ne dépend pas du paramètre a : de là plusieurs conséquences immédiates et remarquables.* (PAINVIN.)

Soient x et y les coordonnées du pied d'une normale menée par le point P à la courbe représentée par l'équation (1); en supposant les coordonnées rectangulaires et exprimant que la normale passe par le point (x_0, y_0), on aura d'abord

$$y - y_0 = -\frac{y^{m-1}}{pax^{p-1}}(x - x_0).$$

Mais l'équation (1) donne

$$\frac{y^{m-1}}{ax^{p-1}} = \frac{mx}{y},$$

d'où

$$y - y_0 = -\frac{mx}{py}(x - x_0),$$

et, par suite,

(2) $$mx^2 + py^2 - mx_0 x - py_0 y = 0.$$

Donc les pieds des normales sont sur la conique que l'équation (2) représente.

La résolution des équations (1) et (2) fera connaître les coordonnées des pieds des normales. L'une de ces équations est du degré m, l'autre du second degré, ce qui semble indiquer $2m$ normales; mais nous allons démontrer que leur nombre se réduit à $2m - p$.

Soit

(3) $$x = \lambda y$$

l'équation d'une droite menée de l'origine des coordonnées au pied d'une normale.

Il est facile de reconnaître qu'une droite menée par l'origine des coordonnées ne rencontre la courbe (1) qu'en un seul point réel, autre que l'origine, si les nombres m et p sont, l'un pair et l'autre impair; et qu'elle rencontre la courbe en deux points symétriques par rapport à l'origine, lorsque les nombres m et p sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Dans ce dernier cas, les deux points symétriques ne peuvent être les pieds de deux normales issues du point P, parce que les normales en ces points symétriques sont des droites parallèles, et que nous supposons que x_0 et y_0 sont des quantités finies (*).

(*) Il est évidemment impossible que la conique (2), qui passe par l'origne O des coordonnées, rencontre la courbe (1) en deux autres points

De là nous concluons qu'à une valeur de λ ne correspond qu'une seule normale. Nous allons chercher l'équation en λ, et conclure de son degré le nombre des normales.

Pour cela, éliminons x et y entre les équations (1), (2) et (3). Cette élimination donne, pour déterminer λ,

$$(4) \qquad (mx_0\lambda + py_0)^{m-p} = ma\lambda^p(p + m\lambda^2)^{m-p}.$$

La plus haute puissance de λ dans cette équation a pour exposant $2m - p$: il y a donc $(2m - p)$ normales dont les pieds sont sur la conique (2) (*).

Cette conique passe par l'origine O et par le point P (x_0, y_0); son centre, qui a pour coordonnées $\frac{x_0}{2}$, $\frac{y_0}{2}$, est au milieu de la droite OP.

On peut résumer les propriétés précédentes dans l'énoncé suivant.

Si l'on considère les courbes du genre parabolique définies par l'équation $y^m - max^p = 0$, où m représente un nombre entier positif plus grand que p, et a un paramètre variable : d'un point quelconque P donné sur le plan de ces courbes, on peut mener seulement à chacune d'elles $2m - p$ normales, et les pieds de toutes ces normales sont situés sur une même conique invariable qui passe par le point P et par l'origine O des coordonnées : cette conique a son centre au milieu de la droite OP, et ses axes sont parallèles aux axes des coordonnées.

Note du Rédacteur. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey, Louis Goulin, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; B. Launoy, maître auxiliaire au lycee de Lille.

---

symétriques par rapport au point O, puisqu'une droite ne peut avoir que deux points communs avec une courbe du second degré.

Il est aussi à remarquer que l'origine O des coordonnées ne peut être le pied d'une normale menée du point P que dans le cas particulier où le point P est situé sur l'axe des x, ce qui n'est pas supposé. (G.).

(*) Les racines de l'équation (4), reelles ou imaginaires, correspondent aux points communs aux courbes (1) et (2), differents de l'origine.

M. Moret-Blanc remarque que toutes les courbes obtenues en faisant varier le paramètre a dans l'équation (1) sont homothétiques, et qu'il en est de même des coniques (2) quand on fait varier la position du point P.

Quant aux conséquences *immédiates et remarquables* de ce que l'équation (2) est indépendante du paramètre a, M. Moret-Blanc indique les suivantes, en désignant par A les courbes (1) et par B les coniques (2) :

1° Chaque conique B rencontre toutes les courbes A en des points tels que les normales aux courbes A en ces points vont concourir au point P diamétralement opposé au point O.

2° Réciproquement, toute corde d'une conique B issue du point P est normale à celle des courbes A qui passe par son autre extrémité.

3° Par un point quelconque M du plan passent une seule courbe A, et une infinité de coniques B; toutes ces coniques ont leurs points diamétralement opposés au point O sur la normale en M à la courbe A, qui passe par ce point, et leurs centres sur une droite parallèle à cette normale.

4° La conique B, qui a pour diamètre OM, coupe orthogonalement la courbe A qui passe par le point M, et le diamètre conjugué de OM est le lieu des centres des coniques B qui passent par le point M.

5° Par un point quelconque M du plan passent une courbe A et une conique B qui se touchent en ce point; car une tangente et son point de contact donnent, pour déterminer les paramètres variables de la conique, deux équations du premier degré en x_0, y_0.

6° Il en resulte que chaque courbe A enveloppe une série de coniques B.

7° D'un point P, pris sur une conique, on peut lui mener *une, deux* ou *trois* normales réelles, outre celle qui est normale en P : donc chaque conique B touche *une*, *deux* ou *trois* courbes A.

Question 1134

(voir même tome, p. 160)

SOLUTION ET GÉNÉRALISATION;

PAR M. LAISANT,

Capitaine du Génie, à Bastia.

On a identiquement

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{2n}.$$

(CATALAN.)

Soit, en général, une suite de quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots$, telles que

$$(1) \qquad a_{px} = b a_x,$$

p et b étant deux constantes : cherchons à évaluer la somme

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \ldots + \frac{1}{a_{np}} = \mathrm{S}.$$

On a évidemment

$$\mathrm{S} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{np}}\right) - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right),$$

ou, en ayant égard à l'égalité supposée $a_{px} = b a_x$,

$$\mathrm{S} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{np}}\right) - \left(\frac{b}{a_p} + \frac{b}{a_{2p}} + \ldots + \frac{b}{a_{np}}\right),$$

égalité qui peut s'écrire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{S} = & \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{p-1}} + \frac{1-b}{a_p}\right) \\ & + \left(\frac{1}{a_{p+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{2p-1}} + \frac{1-b}{a_{2p}}\right) + \ldots \\ & + \left(\frac{1}{a_{(n-1)p+1}} + \ldots + \frac{1-b}{a_{np}}\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend pour $a_1, a_2, \ldots$ la suite naturelle des nombres entiers, on satisfait à la relation (1), en posant

$$p = 2 \quad \text{et} \quad b = 2,$$

d'où

$$1 - b = -1.$$

L'équation (2) devient alors

$$\mathrm{S} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

ou

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

ce qui est l'égalité qu'il s'agissait d'établir.

On aurait de même, en faisant $p=3$ et $b=3$,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$
$$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}\right).$$

En prenant pour $a_1, a_2, \ldots$ la suite des carrés $1^2, 2^2, \ldots$, la relation (1) donne pour $p=2$, $b=4$, car $(2x)^2=4x^2$,

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{3}{16}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{3}{(2n)^2}\right].$$

Enfin on aurait aussi

$$\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n)^3}$$
$$=\left(1-\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{27}-\frac{7}{64}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{7}{(2n)^3}\right].$$

Nous nous bornons à ce petit nombre d'exemples.

Note. — La question 1134 a été résolue par MM. Morel; de Virieu, professeur à Lyon; Bourguet; Gambey; Louis Goulin, élève de Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; H. Lemelle, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers; C. B. de Gand (Belgique); P. S. de Cherbourg; R. Delafon, élève du lycée de Brest; J. Marquet, professeur au Mans; Émile Picard, elève en Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, classe de M. Lemonnier.