NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LE BESGUE

Sur l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 529-531

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__529_0>

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE BESGUE.

La communication si bienveillante faite par M. Catalan à M. Gerono d'une vieille lettre que j'avais complétement oubliée, m'engage à démontrer directement la formule suivante.

THÉORÈME. — *Si l'on pose*

$$(a) \qquad a^2(p^2-3q)+a(pq-9r)+q^2-3pr=0,$$

l'équation

$$(1) \qquad x^3+px^2+qx+r=0$$

sera résolue par la formule

$$(A) \quad 3x+p=\sqrt[3]{(p^2-3q)(3a+p)}-\frac{p^2-3q}{\sqrt[3]{(p^2-3q)(3a+p)}}.$$

Démonstration. — L'équation (1) peut être mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{3}\right)^3+\left(q-\frac{p^2}{3}\right)x-\frac{p^3}{27}+r=0,$$

et, quand on admet la condition

$$p^2=3q,$$

il vient

$$(3x+p)^3=p^3-27r=u^3;$$

d'où

$$x=\frac{u-p}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}=\frac{3}{u-p}=\frac{3(u^2+up+p^2)}{u^3-p^3},$$

ou

$$(B) \qquad \frac{1}{x}=-\frac{u^2+up+p^2}{9r}.$$

Si l'équation (1) est mise sous la forme

$$(2)\qquad \left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{q}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{p}{r}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{r}=0,$$

et que l'on admette la condition

$$(3)\qquad \frac{q^2}{r^2}=3\frac{p}{r}\quad \text{ou}\quad q^2=3pr,$$

en changeant dans (B) x en $\frac{1}{x}$, p, q, r en $\frac{q}{r}$, $\frac{p}{r}$, $\frac{1}{r}$, la formule (B) devient, réduction faite,

$$(\mathrm{C})\qquad 3x+p=\sqrt[3]{(3q-p^2)p}-\frac{3q-p^2}{\sqrt[3]{(3q-p^2)p}},$$

comme on le trouve en éliminant r au moyen de la condition (3).

Cela posé, si (1) ne donne pas la condition (3), on fera $x=y+a$, et l'équation (1) deviendra

$$(4)\qquad y^3+p'y^2+q'y+r'=0,$$

ou

$$p'=3a+p,\quad q'=3a^2+2ap+q,\quad r'=a^3+pa^2+qa+r;$$

d'où l'on tire

$$3q'-p'^2=3q-p^2,$$
$$q'^2-3p'r'=(p^2-3q)a^2+(pq-9r)a+q^2-3pr;$$

de sorte que l'équation (a) établit la condition

$$q'^2=3p'r'.$$

La formule (C) devient alors

$$3y+p'=\sqrt[3]{(3q'-p'^2)p'}-\frac{3y'-p'^2}{\sqrt{(3q'-p'^2)}},$$

qui revient à

$$3x+p=\sqrt[3]{(3q-p^2)(3a+p)}-\frac{3q-p^2}{\sqrt[3]{(3q-p^2)(3a+p)}}.$$

La discussion de cette formule paraît moins facile que celle de la formule ordinaire.