J. MOUTIER

Sur la fonction potentielle et le potentiel

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 472-478
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__472_1>

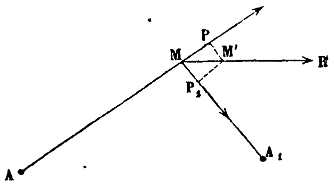
SUR LA FONCTION POTENTIELLE ET LE POTENTIEL;

PAR M. J. MOUTIER.

L'étude de la fonction potentielle et du potentiel n'a pas pénétré jusqu'ici dans l'enseignement, parce qu'elle repose sur des notions d'Analyse qui dépassent les limites du Cours de Mathématiques spéciales. On se propose, dans cet article, d'exposer d'une manière élémentaire les principales propriétés de ces fonctions remarquables, qui jouent actuellement un rôle considérable dans les questions de Physique mathématique.

Fonction de force. — Soit M un point sollicité par des forces dirigées vers des points fixes A, A_1...; ces forces sont des fonctions des distances $AM = r$, $A_1M = r_1, \ldots$, que nous représenterons par $f(r)$, $f_1(r_1), \ldots$; elles ont pour résultante la force R. Nous supposerons que l'une de ces forces, la première, soit répulsive, la seconde attractive.

Fig. 1.



Considérons un déplacement élémentaire MM' du point M (*fig.* 1), suivant la direction de la résultante; projetons le point M' en P, $P_1, \ldots$ sur la direction des forces. Le travail élémentaire de la résultante R est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des composantes

$$R \times MM' = f(r) \times MP + f_1(r_1) \times MP_1 + \ldots .$$

Désignons par $r + dr$, $r_1 + dr_1, \ldots$ les rayons vecteurs menés des centres fixes A, $A_1, \ldots$ au point M' infiniment voisin de M; les perpendiculaires M'P, $M'P_1, \ldots$ diffèrent infiniment peu des arcs de cercle décrits des points A, $A_1, \ldots$ comme centres avec les rayons AM', $A_1M', \ldots$, de sorte que $MP = dr$, $MP_1 = -dr_1, \ldots$, et l'équation précédente peut s'écrire

$$R \times MM' = f(r)\,dr - f_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots .$$

Or, soient $\varphi(r), \varphi_1(r_1), \ldots$ les fonctions qui ont pour dérivées $f(r), f_1(r_1), \ldots$,

$$R \times MM' = \varphi'(r)\,dr - \varphi'_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots .$$

Désignons par U la somme algébrique de ces fonctions $\varphi(r)$, $\varphi_1(r_1)$, ...,

$$U = \varphi(r) - \varphi_1(r_1) \pm \ldots = \Sigma\varphi(r),$$

en prenant positivement les fonctions qui correspondent aux forces répulsives et négativement celles qui correspondent aux forces attractives. Le second membre de l'avant-dernière équation n'est autre chose que l'accroissement infiniment petit dU qu'éprouve la fonction U lorsque le point M passe de la position M à la position M′ infiniment voisine. Par suite,

$$R \times MM' = dU$$

et

$$R = \frac{dU}{MM'}.$$

La fonction U a été désignée par Hamilton sous le nom de *fonction de force ;* la résultante R est le rapport que l'on obtient en divisant l'accroissement de la fonction de force pour un déplacement élémentaire, effectué suivant la direction de la résultante, par la valeur de ce même déplacement. On exprime ainsi ce résultat sous forme abrégée :

La résultante des forces est la dérivée de la fonction de force prise par rapport à la direction de la résultante.

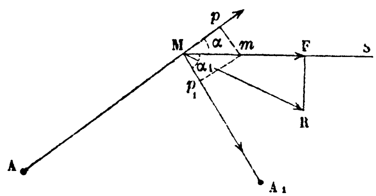
Composante de R *suivant une direction quelconque.* — Une marche analogue à la précédente permet de trouver la composante de la résultante R relative à une direction quelconque.

La composante F de la force R relative à une direction MS (*fig.* 2) est égale à la somme algébrique des projections des forces du système sur cette direction. Si l'on appelle α, α_1,... les angles des forces avec cette direction :

$$F = f(r)\cos\alpha + f_1(r_1)\cos\alpha_1 + \ldots.$$

Imaginons un déplacement élémentaire Mm suivant

Fig. 2.



la direction MS, et multiplions les deux membres de la relation précédente par Mm,

$$F \times Mm = f(r)\cos\alpha \times Mm + f_1(r_1)\cos\alpha_1 \times Mm + \ldots.$$

Projetons le point m en p, p_1,... sur les directions des forces,

$$F \times Mm = f(r) \times Mp + f(r_1) \times Mp_1 + \ldots.$$

Appelons $r + dr$, $r_1 + dr_1$,... les rayons vecteurs Am, $A_1 m$,..., et remarquons que M$p = dr$, M$p_1 = - dr_1$,...,

$$F \times Mm = f(r)\,dr - f_1(r_1)\,dr_1 \pm \ldots,$$

de sorte que si l'on appelle dU l'accroissement qu'éprouve la fonction de force lorsque le point M passe de la position M à la position m infiniment voisine,

$$F = \frac{dU}{Mm}.$$

La projection de la résultante des forces du système *sur une direction quelconque est la dérivée de la fonction de force par rapport à cette direction.*

Lorsque la fonction de force est exprimée au moyen des coordonnées du point M rapporté à trois axes rectangulaires, les projections X, Y, Z de la résultante R sur les trois axes ont respectivement pour valeurs

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

et

$$R = \sqrt{\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2}.$$

Surfaces de niveau. — Nous avons appelé en Hydrostatique (*) *surface de niveau* le lieu géométrique des points où la pression est la même, et nous avons vu qu'une surface de niveau est normale en chacun de ses points à la résultante des forces qui sollicitent le liquide. Une surface de niveau en général est telle, que la normale en chacun de ses points a pour direction la résultante des forces qui existent en ce point.

La surface de niveau qui passe par un point M se détermine facilement d'après ce qui précède. La projection de la résultante R sur une direction quelconque menée par le point M dans le plan tangent à la surface de niveau est nulle; par suite, l'accroissement de la fonction de force est nul pour tout déplacement élémentaire effectué dans le plan tangent à la surface, $dU = 0$ ou $U =$ const. pour tous les points d'une même surface de niveau.

Ainsi, *la fonction de force est la même en tous les points d'une même surface de niveau.*

En donnant dans la relation $U =$ const. différentes

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII.

valeurs à cette constante, on obtient une famille de surfaces de niveau.

Exemples. — 1° Prenons comme premier exemple le cas bien connu d'un liquide pesant tournant autour d'un axe vertical, et cherchons les surfaces de niveau, ou, ce qui revient au même, la méridienne de ces surfaces.

Prenons l'axe de rotation pour axe des y, un point M de masse égale à l'unité est sollicité par son poids g et par la force centrifuge $x\omega^2$, en appelant ω la vitesse angulaire de rotation.

D'après ce qui précède, la fonction de force est

$$U = \frac{x^2\omega^2}{2} - gy,$$

et par suite la méridienne cherchée est définie par la relation $\frac{x^2\omega^2}{2} - gy = \text{const.}$, qui représente une famille de paraboles ayant pour axe OY et dans lesquelles la sous-normale a la valeur constante $\frac{g}{\omega^2}$.

2° Un point mobile est soumis à l'action de forces dirigées vers des centres fixes et proportionnelles aux distances à ces centres fixes; on propose de déterminer le mouvement du point.

Les forces étant représentées par ar, $a_1 r_1, \ldots,$ la fonction de force est

$$U = \frac{1}{2}(ar^2 + a_1 r_1^2 + \ldots).$$

Les surfaces de niveau sont donc représentées par la relation précédente, dans laquelle U est regardé comme une constante.

Un calcul simple montre que ces surfaces sont des sphères ayant pour centre commun le centre de gravité G d'un système de masses égales à a, $a_1, \ldots$, placées aux points fixes A, $A_1, \ldots$; le rayon ρ de la sphère est donné par la relation

$$\rho^2 = \frac{2U - (a\delta^2 + a_1\delta_1^2 + \ldots)}{a + a_1 + \ldots},$$

en représentant par δ, $\delta_1, \ldots$ les distances du point G aux centres fixes A, $A_1, \ldots$.

Les surfaces de niveau étant des sphères concentriques, la résultante passe constamment par ce centre commun; de plus, elle est mesurée par la dérivée de U par rapport à ρ, elle est proportionnelle à ρ; par suite, si le point mobile n'a pas de vitesse initiale, il exécute un mouvement oscillatoire autour du point G.

Fonction potentielle. — Dans ce qui précède, les fonctions des distances $f(r)$, $f_1(r_1), \ldots$, qui représentent les forces, sont entièrement arbitraires; au contraire, dans l'étude de l'attraction, de l'électricité, du magnétisme, les forces sont inversement proportionnelles aux carrés des distances; dans ce cas très-important, la fonction de force a été désignée par George Green sous le nom de *fonction potentielle;* elle est ordinairement représentée par la lettre V :

$$V = \sum \pm \frac{m}{r},$$

le signe $\pm$ se rapportant soit aux répulsions, soit aux attractions. Comme première application, nous allons déterminer, au moyen de la fonction potentielle, l'attraction exercée par une couche sphérique homogène sur un point extérieur ou intérieur.

(*La suite prochainement.*)