NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

WILLIAM WHITWORTH

Note additionnelle à la spirale équiangle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 38-40

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__38_0>

NOTE ADDITIONNELLE A LA SPIRALE ÉQUIANGLE;

(voir 2e série, t. VIII, p. 5);

PAR M. WILLIAM WHITWORTH.

Traduit de *The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, par M. CHARLES BRISSE, Ancien Élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Le lecteur a sans doute remarqué que la propriété énoncée dans la proposition II de notre premier article n'est pas spéciale à la spirale équiangle et appartient à une courbe quelconque. En outre, comme cette spirale ne dépend pas d'un *paramètre linéaire*, mais seulement d'un *paramètre angulaire*, toutes les spirales équiangles semblables sont égales, et on peut les superposer de manière à ce qu'elles coïncident dans toute leur étendue. Nous serions donc resté dans la vérité en disant : « Le lien du sommet Q sera une spirale semblable et *égale*. »

Une conséquence intéressante de cette proposition est celle que nous donnons ci-après. Quoique presque aussi ancienne que la spirale elle-même, elle n'a cependant pas encore perdu tout intérêt, comme le prouve une note du *Mathematical Tripos Examination*, lundi matin, 13 janvier 1862.

PROPOSITION. — *Si des rayons lumineux émanés du pôle d'une spirale équiangle sont réfléchis ou réfractés par elle, les caustiques obtenues seront des spirales semblables à la spirale originaire.*

Soient OP, Op (*) deux rayons polaires quelconques de la spirale; OQ, Oq deux autres rayons polaires, faisant respectivement des angles égaux POQ, pOq avec les premiers.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure, en se guidant sur celle du précédent article.

Soit R le point de rencontre des rayons réfléchis ou réfractés en P et Q, r celui des rayons réfléchis ou réfractés en p et q. Alors OQPR, Oqpr sont des figures semblables, et si Q et q tendent respectivement vers P et p, les angles POQ, pOq restant toujours égaux l'un à l'autre, OPR et Opr sont toujours des triangles semblables. Par conséquent, si V, v sont les positions limites de R, r quand les angles POQ, pOq diminuent indéfiniment, OPV et Opv seront des triangles semblables. Mais V, v sont les points de la caustique qui correspondent à P, p. Donc (Proposition II) le lieu des points V, v, c'est-à-dire la caustique, est une spirale équiangle semblable à la première. Donc, etc. C. Q. F. D.

Le fait que la spirale équiangle ne dépend pas d'un paramètre linéaire semble, à première vue, contradictoire avec cet autre fait que son équation polaire en renferme un. Mais la contradiction n'est qu'apparente, et disparaît si l'on remarque que les équations

$$r = a\varepsilon^{\mu\theta}, \quad r = b\varepsilon^{\mu\theta}$$

représentent la même courbe dans deux positions différentes faisant entre elles un angle égal à $\frac{1}{\mu}\log\frac{a}{b}$, ou dans la même position si $a = b\varepsilon^{2r\mu\pi}$, r étant un entier quelconque. Par conséquent, la constante de l'équation de la spirale n'est pas relative à la grandeur de la courbe, ce n'est pas un paramètre; elle fixe seulement la position de la courbe en indiquant la longueur du rayon vecteur qui coïncide avec l'axe polaire.

La définition de la spirale donnée à l'article précédent a soulevé une difficulté. On a dit que le cercle était un cas limite de la spirale équiangle, que le centre en était le pôle, et que notre définition ne s'appliquait plus à ce cas.

Nous demanderons aux personnes qui soulèvent la difficulté s'il ne serait pas plus exact de dire que la limite d'une spirale équiangle dont l'angle approche indéfiniment d'un droit est un système de cercles concentriques ayant leur centre commun au pôle, en nombre indéfini, dont le rayon passe par toutes les valeurs, et qui couvrent entièrement le plan. Dans ces conditions, on ne pourrait pas dire qu'un cercle est plutôt qu'un autre la limite vers laquelle tend une spirale équiangle dont l'angle approche indéfiniment d'un droit.

Portarlington, 18 février 1862.