NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 371-379
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__371_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 828

(voir 2e série, t. VI, p. 479);

PAR UN ÉTUDIANT DE L'UNIVERSITÉ DE TURIN.

Déterminer géométriquement un cercle qui coupe sous des angles donnés α, β, γ *trois autres cercles* A, B, C *donnés dans un même plan.*

1° Soient r_1 et r_2 les rayons de deux cercles, d la distance des centres, φ l'angle qu'ils font entre eux; on a

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\varphi.$$

2° *Trois cercles de rayon r_1, r_2, r_3 ayant même axe radical, si un quatrième cercle variable coupe les deux premiers sous les angles variables α et β tels, que le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ soit constant, il coupe le troisième sous un angle γ tel, que le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ est constant.*

En effet, prenons pour axe des x la droite des centres et pour axe des y l'axe radical commun aux trois cercles donnés; appelons m, n, p les abscisses des centres de ces cercles; α, β, γ les angles sous lesquels un cercle de rayon a et de centre (x, y) coupe ces trois cercles; on a

$$\begin{gathered} m^2 - r_1^2 = n^2 - r_2^2 = p^2 - r_3^2, \\ (x-m)^2 + y^2 = r_1^2 + a^2 + 2ar_1\cos\alpha, \\ (x-n)^2 + y^2 = r_2^2 + a^2 + 2ar_2\cos\beta, \\ (x-p)^2 + y^2 = r_3^2 + a^2 + 2ar_3\cos\gamma; \end{gathered}$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{x(m-n)}{r_2\cos\beta - r_1\cos\alpha} = \frac{x(m-p)}{r_3\cos\gamma - r_1\cos\alpha},$$

et par conséquent

$$\frac{m-n}{r_2\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - r_1} = \frac{m-p}{r_3\dfrac{\cos\gamma}{\cos\alpha} - r_1},$$

égalité qui démontre le théorème.

3° Réciproquement, on démontre facilement que *tous les cercles qui coupent trois cercles donnés sous des* *angles dont les cosinus sont proportionnels à des nombres donnés ont même axe radical.*

La droite des centres de tous ces cercles passe évidemment par le centre radical des trois cercles donnés ; mais cette droite se réduit à ce point seulement lorsque les trois cosinus sont inversement proportionnels aux rayons des cercles donnés, et alors tous les cercles considérés sont concentriques.

4° *Tous les cercles qui coupent deux autres cercles donnés sous des angles dont les cosinus sont proportionnels à deux nombres donnés ont même centre radical* O.

Soient, en effet, A, B, C, D quatre cercles quelconques remplissant cette condition; les centres radicaux de A, B, C et de A, B, D doivent se trouver en même temps sur la droite des centres des cercles donnés et sur l'axe radical de A et de B; donc, etc.

Si le rapport donné des cosinus est l'inverse du rapport des rayons des cercles donnés, le théorème est en défaut.

Le centre radical O se réduit au centre d'homothétie directe ou inverse des deux cercles donnés, selon que le rapport constant des cosinus est $+1$ ou -1.

5° On démontre, ou plutôt on voit aisément, à l'aide du théorème n° 3, que *si l'on a trois cercles* O_1, O_2, O_3, *le centre radical des cercles qui coupent* O_1, O_2 *sous des angles* α *et* β *tels que* $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = h$, *le centre radical des cercles qui coupent* O_1, O_3 *sous des angles* α *et* γ *tels que* $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = k$, *et le centre radical des cercles qui coupent* O_2, O_3 *sous des angles* β *et* γ *tels que* $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{k}{h}$, *h et k étant des quantités constantes, ces trois centres,* dis-je, *sont en ligne droite.*

Cette droite n'est autre chose que l'axe radical des cercles qui coupent O_1, O_2, O_3 sous des angles dont les cosinus sont proportionnels aux quantités h, k, 1.

Lorsqu'on a $h = \pm 1$, $k = \pm 1$, la droite en question se réduit à un des axes d'homothétie des trois cercles donnés.

6° Soit maintenant à *déterminer un cercle qui coupe trois cercles donnés* O_1, O_2, O_3 *sous des angles* α, β, γ.

Déterminons trois cercles qui coupent O_1 et O_2 sous les angles α et β, et déterminons ensuite les deux cercles tangents, c'est-à-dire qui coupent ces trois cercles arbitraires sous les angles 180 degrés et zéro; les centres de ces cercles se trouveront sur la droite des centres de O_1 et O_2. Faisons la même construction pour O_1 et O_3; on obtiendra ainsi quatre cercles auxquels doit être tangent, d'une manière déterminée, c'est-à-dire intérieurement ou extérieurement, le cercle cherché.

7° Il peut y avoir deux solutions. Il est à remarquer que, dans ce cas, il n'y en aurait aucune si l'on voulait couper les trois cercles sous les angles $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$. Si O_1, O_2, O_3 ont même axe radical, le problème est impossible ou indéterminé. La solution pourrait, en certains cas, être rendue plus simple par la connaissance de la droite considérée au n° 3, sur laquelle doit se trouver le centre du cercle cherché.

Ce procédé, légèrement modifié, peut s'appliquer aux sphères.

8° Les propriétés énoncées ci-dessus donnent, ce me semble, une méthode plus courte que la méthode ordinaire pour construire les trois couples de circonférences conjuguées tangentes à trois cercles donnés.

En effet, les deux centres d'un couple se trouvent sur une droite passant par le centre radical et perpendiculaire à l'axe d'homothétie des cercles donnés qui correspondent aux deux circonférences conjuguées que l'on cherche. Le problème est donc ramené à trouver l'intersection d'une droite avec une conique définie par ses foyers et son axe.

9° Il y a une autre manière d'envisager la question. Soient O_1, O_2, O_3 les centres des cercles de rayon r_1, r_2, r_3 que l'on veut couper sous les angles α, β, γ. Soit O le centre d'un cercle qui répond à la question. Si, par un point M d'une droite arbitraire MN, on mène trois droites de longueur r_1, r_2, r_3, faisant avec MN les angles α, β, γ, et si l'on appelle A, B, C les extrémités de ces droites, la question se réduit à trouver sur MN un point D tel, que les distances DA, DB, DC puissent représenter les distances des points O_1, O_2, O_3 à un point de leur plan.

On voit par là que, si l'on prend sur MN un point arbitraire H, que l'on nomme r'_1, r'_2, r'_3 les distances HA, HB, HC, et α', β', γ' les angles de ces droites avec MN, la question se réduit à couper des cercles de centres O_1, O_2, O_3, et de rayon r'_1, r'_2, r'_3 sous des angles α', β', γ'.

On peut prendre pour le point H un point qui facilite la solution de la question, par exemple le point où AB coupe MN.

Remarque. — M. Plücker a traité une question analogue et démontré les théorèmes n^{os} 2 et 3 dans un Mémoire inséré au dix-huitième volume des *Annales de Gergonne*.

Note. — Nous avons reçu une autre solution de M. Auguste Macé, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Question 832.

(voir 2e série, t. VI, p. 480);

PAR M. KOEHLER,

Capitaine du Génie.

Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, son paramètre est égal au diamètre du cercle inscrit multiplié par le produit des sinus des angles que font avec le cercle les droites qui joignent un des foyers aux sommets du triangle. (FAURE.)

Le triangle donné ABC étant pris pour triangle de référence, soit F un point du plan dont les coordonnées sont α, β, γ. Supposons d'abord que le point soit intérieur au triangle, c'est-à-dire que α, β, γ soient de même signe; je vais calculer le produit des sinus des angles que font les droites FA, FB, FC avec le cercle inscrit.

Les coordonnées du centre et le rayon de ce cercle ont pour valeur commune $r = \frac{S}{P}$ (S désignant la surface, P le demi-périmètre du triangle).

Les sinus des angles dont il s'agit ont pour expressions

$$\sqrt{1 - \frac{d_A^2}{r^2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{d_B^2}{r^2}}, \quad \sqrt{1 - \frac{d_C^2}{r^2}},$$

en appelant d_A, d_B, d_C les distances du centre aux trois droites.

Par la transformation des coordonnées, on reconnaît facilement que, dans le système employé, la distance d'un point (x, y, z) à une droite $lx + my + nz = 0$ a pour valeur

$$\frac{lx_1 + my_1 + nz_1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos A - 2nl\cos B - 2ml\cos C}}.$$

Les équations des droites FA, FB, FC sont

$$\beta x - \alpha y = 0, \quad \gamma x - \alpha z = 0, \quad \gamma y - \beta z = 0.$$

On a donc

$$d_A = \frac{\frac{S}{P}(\gamma - \beta)}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2 + 2\beta\gamma\cos A}},$$

$$d_B = \frac{\frac{S}{P}(\gamma - \alpha)}{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\gamma\cos B}},$$

$$d_C = \frac{\frac{S}{P}(\beta - \alpha)}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos C}}.$$

Les dénominateurs de ces expressions sont les côtés du triangle formé en joignant les pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur les côtés de ABC; en les désignant, pour abréger, par a', b', c', nous aurons, pour les sinus, les valeurs

$$\frac{1}{a'}\sqrt{2\beta\gamma(\cos A + 1)}, \quad \frac{1}{b'}\sqrt{2\gamma\alpha(\cos B + 1)}, \quad \frac{1}{c'}\sqrt{2\alpha\beta(\cos C + 1)}.$$

Leur produit est

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{a'b'c'}\sqrt{8(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}.$$

Enfin, en remarquant que $1 + \cos A = \frac{2P(P - a)}{bc}, \ldots,$ le radical devient

$$\frac{8P\sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)}}{abc} = \frac{8PS}{abc} = \frac{2P}{R},$$

R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le produit des sinus prend donc la forme $\frac{2P\alpha\beta\gamma}{Ra'b'c'}$, et, en le multipliant par le diamètre du cercle inscrit, on a l'expression

$$(1) \qquad \frac{4S\alpha\beta\gamma}{Ra'b'c'}.$$

Si le point F était extérieur au triangle et compris, par exemple, dans l'angle A ou son opposé au sommet, on considérerait le cercle exinscrit tangent au côté a; dans l'expression du produit des sinus, on aurait sous le radical $1 - \cos B$ et $1 - \cos C$ au lieu de $1 + \cos B$ et $1 + \cos C$, comme il est facile de s'en assurer; ce produit deviendrait $\frac{2(P-a)\alpha\beta\gamma}{Ra'b'c'}$, et, en multipliant par le diamètre $\frac{2S}{P-a}$, on retrouverait encore l'expression (1).

Supposons maintenant que le point F soit le centre d'une conique inscrite. Le premier axe ρ de la courbe sera le rayon du cercle passant par les pieds des perpendiculaires abaissées du point F sur les côtés du triangle; on a donc

$$\rho = \frac{a'b'c'}{4s},$$

s étant la surface de ce triangle inscrit dans le premier.

Comme le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est égal au carré du deuxième axe ρ_1, on aura, en désignant par α_1, β_1, γ_1 les coordonnées du second foyer,

$$\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1 = \gamma\gamma_1 = \rho_1^2,$$

avec la relation

$$\alpha_1 \sin A + \beta_1 \sin B + \gamma_1 \sin C = \frac{S}{R}.$$

Ces équations donnent immédiatement les coordonnées du second foyer, et la valeur de ρ_1^2

$$\rho_1^2 = \frac{\alpha\beta\gamma S}{B(\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C)} = \frac{\alpha\beta\gamma S}{2Rs}.$$

D'après cela, le paramètre $\frac{2\rho_1^2}{\rho}$ est égal à $\frac{4\alpha\beta\gamma S}{R a' b' c'}$. C'est précisément l'expression (1). Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si le point F était sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle ABC, ses coordonnées α, β, γ satisferaient à l'équation

$$\alpha\beta \sin C + \gamma\alpha \sin B + \beta\gamma \sin A = 0.$$

Les valeurs des deux axes se présenteraient sous la forme de l'infini, et la conique serait une parabole. Mais la valeur trouvée pour le paramètre n'en subsisterait pas moins.

On peut d'ailleurs s'en assurer directement en considérant une parabole $y^2 = 2px$, le triangle formé par trois tangentes

$$y = mx + \frac{p}{2m}, \quad y = m'x + \frac{p}{2m'}, \quad y = m''x + \frac{p}{2m''},$$

et en calculant l'expression (1). On vérifie ainsi qu'elle reproduit le paramètre $2p$.

Je n'insisterai pas sur ce calcul, qui est très-symétrique et très-simple.