NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CARNOY

Note sur le triangle circonscrit à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 339-342

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__339_1>

NOTE SUR LE TRIANGLE CIRCONSCRIT A UNE CONIQUE;

PAR M. CARNOY,
de Louvain.

« Un triangle étant circonscrit à une conique, les lignes qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés se coupent en un point O; de plus, ces côtés sont rencontrés par ceux du triangle inscrit correspondant en trois points situés sur une certaine droite L. Si l'on considère deux côtés de ce triangle comme deux tangentes fixes, et le troisième côté comme une tangente variable, le point O et la droite L vont se déplacer dans le plan. »

Je me propose d'indiquer un moyen facile d'arriver à l'équation de la courbe des points O et de l'enveloppe de la droite L.

Soient $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ et $C = 0$ les équations des deux côtés ou tangentes fixes et de leur corde de contact; l'équation de la conique peut s'écrire

$$T_1 T_2 + kC^2 = 0;$$

μ étant un paramètre variable, l'équation

$$\mu T_1 + C = 0$$

représente une droite qui passe par le point $(T_1 C)$ et un certain point de la courbe que nous appelons μ. L'élimination de T_1 entre les équations précédentes donnera

$$T_2 - \mu k C = 0.$$

Cette équation est celle d'une nouvelle droite qui joint le point $(T_2 C)$ au même point μ de la courbe.

L'équation de la corde passant par les points μ et μ' sera de la forme

$$T_2 - k(\mu + \mu')C - k\mu\mu' T_1 = 0,$$

car elle est satisfaite dans la double hypothèse :

$$\mu T_1 = -C, \quad T_2 = \mu k C$$

et

$$\mu' T_1 = -C, \quad T_2 = \mu' k C.$$

Si nous faisons ensuite $\mu = \mu'$, les deux points se confondent, et la tangente au point μ aura pour équation

$$(T_3) \qquad T_2 - 2k\mu C - k\mu^2 T_1 = 0.$$

Cette tangente (T_3) sera le troisième côté variable du triangle circonscrit, dont les deux autres côtés sont T_1 et T_2.

Pour le point d'intersection de T_1 avec T_3, on a

$$(\alpha) \qquad T_2 - 2\mu k C = 0.$$

C'est l'équation d'une droite qui passe par les points $(T_1 T_3)$ et $(T_2 C)$.

De même l'équation

$$(\beta) \qquad \mu T_1 + 2C = 0,$$

obtenue en faisant $T_2 = 0$, dans l'équation (T_3), sera celle d'une ligne qui joint $(T_1 C)$ avec $(T_2 T_3)$.

Les deux lignes (α) et (β) passent par le point O. L'élimination du paramètre μ nous donnera, pour l'équation du lieu géométrique des points O,

$$T_1 T_2 + 4kC^2 = 0.$$

C'est l'équation d'une conique ayant un double contact avec la conique donnée suivant la ligne C.

Cherchons en second lieu l'équation de l'enveloppe de la droite L.

Reprenons les deux équations

$$\mu T_1 + C = 0 \quad \text{et} \quad T_2 - \mu k C = 0.$$

Ces deux droites, que nous appellerons C_1 et C_2, forment avec C le triangle inscrit correspondant; elles couperont les deux tangentes T_1 et T_2 en deux points A et B.

La ligne L passe par l'intersection A de C_1 avec T_2, son équation sera de la forme

$$mT_2 + \mu T_1 + C = 0.$$

Il faut déterminer le paramètre m par la condition qu'elle passe par le point B. On trouvera ainsi $m = -\frac{1}{\mu k}$.

L'équation de la ligne L sera donc

$$-T_2 + \mu^2 k T_1 + \mu k C = 0.$$

Elle renferme un paramètre variable avec la tangente mobile; il reste à éliminer μ entre cette équation et sa dérivée par rapport à μ, égalée à zéro. Le résultat final sera

$$4T_1T_2 + kC^2 = 0.$$

L'enveloppe de la droite L est aussi une section conique, ayant un double contact avec la première suivant la même ligne C.