Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 324-333

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__324_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 806

(voir 2e série, t. VI, p. 188);

PAR M. ÉDOUARD WEYR,
Élève de l'École Polytechnique de Prague.

On donne cinq droites arbitraires; on prend un groupe de quatre de ces droites, et l'on construit le couple des deux droites qui les rencontrent. D'un point quelconque de l'espace, on mène la droite qui rencontre les deux droites de ce couple. On pourra ainsi mener de ce point cinq droites, puisqu'il y a autant de couples de deux droites qu'il est possible de former de groupes de quatre droites avec les cinq droites données. Démontrer que les cinq droites ainsi déterminées sont dans un même plan. (MANNHEIM.)

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les cinq droites données; A_1, B_1 les deux droites qui rencontrent 2, 3, 4, 5; A_2, B_2 les deux droites qui rencontrent 3, 4, 5, 1, etc. D'un point quelconque P, menons les cinq droites D_1, D_2,... qui rencontrent respectivement les cinq couples A_1, B_1; A_2, B_2,.... Pour démontrer que ces cinq droites D_1, D_2,... sont dans un même plan, il suffit évidemment de prouver que trois quelconques d'entre elles, D_1, D_2, D_3 par exemple, sont dans un même plan.

Les quatre droites A_1, B_1, A_2, B_2, rencontrant les trois droites 3, 4, 5, appartiennent à un même hyperboloïde à une nappe H_3. Les quatre droites A_2, B_2, A_3, B_3 appartiennent à un autre hyperboloïde H_1. Les quatre droites A_3, B_3, A_1, B_1 appartiennent à un troisième hyperboloïde H_2.

Cela étant, considérons les deux droites E, F qui rencontrent les quatre droites A_1, A_2, A_3, B_3. Rencontrant A_1, A_3, B_3, elles rencontrent aussi B_1. Rencontrant A_2, A_3, B_3, elles rencontrent aussi B_2. Donc ces deux droites, E, F, appartiennent aux trois hyperboloïdes H_1, H_2, H_3.

Par les deux droites D_1, D_2, faisons passer un plan qui coupe les trois hyperboloïdes suivant les trois coniques S_1, S_2, S_3. Soient e, f, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 les points où ce plan coupe les droites E, F, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

S_1	passe par les points	e, f, a_2, b_2, a_3, b_3;
S_2	»	e, f, a_3, b_3, a_1, b_1;
S_3	»	e, f, a_1, b_1, a_2, b_2.

Les trois coniques ont donc deux points communs. Par suite, d'après un théorème connu, les trois cordes communes, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, se coupent en un même point. Donc la droite $a_3 b_3$ n'est autre que D_3, et l'on voit qu'elle est dans un même plan avec D_1, D_2.

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Figa Bartolomeo.

Question 807

(voir 2e série, t. VI, p 188) ;

PAR M. ÉDOUARD WEYR,

Élève de l'École Polytechnique de Prague.

Démontrer directement la propriété corrélative de la précédente. (MANNHEIM.)

Cette propriété corrélative peut s'énoncer ainsi : *Si* *l'on coupe les cinq couples* A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3,... *par un plan arbitraire* P, *les droites* $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$,... *ou* D_1, D_2, D_3,... *concourent en un même point.*

Il suffit de prouver que les droites D_1, D_2, D_3,... passent par un même point.

Désignons encore par E, F les droites communes aux trois hyperboloïdes H_1, H_2, H_3. Appelons α_1 le plan des droites A_1, D_1; et, de même, β_1, α_2, β_2 les plans déterminés respectivement par les couples $B_1 D_1$, $A_2 D_2$, $B_2 D_2$. Soient α_3, β_3 les deux plans passant par le point de rencontre des droites D_1, D_2 et par les droites A_3, B_3. Soient ε, φ les plans passant par le même point et par les droites E, F. Désignons par S_1, S_2, S_3 les cônes circonscrits aux hyperboloïdes H_1, H_2, H_3, et dont le sommet est le point de rencontre des droites D_1, D_2. Comme tout plan passant par une génératrice d'un hyperboloïde est un plan tangent, on voit immédiatement que

S_1	touche les plans	ε, φ, α_2, β_2, α_3, β_3;
S_2	»	ε, φ, α_3, β_3, α_1, β_1;
S_3	»	ε, φ, α_1, β_1, α_2, β_2.

Donc les trois cônes S_1, S_2, S_3 ont deux plans tangents, ε, φ, qui leur sont communs. Donc les intersections des trois couples de plans α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 sont dans un même plan. Les deux premières intersections ne sont autres que les droites D_1, D_2; la troisième est la droite D_3; ces trois droites se coupent au même point. C. Q. F. D.

Question 887

(voir 2e série, t. VII, p. 240);

PAR M. ALBERT AUBANEL,

Élève au lycée de Nîmes.

Étant donnés deux cercles qui se coupent orthogonalement, si l'on fait passer un cercle par leurs centres *et par leurs points d'intersection, la somme des puissances d'un point de ce cercle par rapport aux cercles donnés est nulle.* (H. Faure.)

Solution. — Puisque les deux cercles donnés se coupent orthogonalement, cela revient à dire que les rayons allant de chacun des centres à l'un des points d'intersection sont rectangulaires : donc

$$R^2 + R'^2 = OO'^2,$$

en appelant R et R' les deux rayons, et OO' la distance des centres.

Soit M un point tel, que la somme des puissances par rapport aux deux cercles soit nulle; on a donc pour ce point

$$d^2 - R^2 + d'^2 - R'^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad d^2 + d'^2 = R^2 + R'^2,$$

d et d' étant les distances du point M à chacun des centres.

On voit par là que le point M est sur la circonférence ayant OO' pour diamètre; cette circonférence passe évidemment par les points d'intersection des deux circonférences données.

De plus, tous les points de cette circonférence OO' jouissent de la propriété énoncée.

Généralisation. — Le problème proposé peut se généraliser de la manière suivante :

On donne deux cercles quelconques : trouver le lieu d'un point tel, que la somme des puissances de ce point par rapport aux deux cercles soit nulle.

Soit M un point du lieu; on a encore, en adoptant les notations précédentes,

$$d^2 + d'^2 = R^2 + R'^2.$$

Donc la somme des carrés des distances du point M aux deux centres est constante. D'après un théorème connu, donnant l'expression de la médiane d'un triangle en fonction des côtés, le lieu du point M est une circonférence ayant son centre au milieu de OO' et dont le rayon m est fixé par la relation

$$m^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - \overline{OO'}^2}{4}.$$

On voit bien que, dans le cas particulier où les deux circonférences se coupent orthogonalement, on a

$$m = \frac{OO'}{2},$$

parce qu'alors

$$R^2 + R'^2 = \overline{OO'}^2.$$

On sait que la puissance d'un point situé à l'extérieur d'un cercle est positive; donc il ne peut y avoir aucun point satisfaisant à la condition, situé à l'extérieur de chacun des deux cercles.

Du reste, le rayon m doit être réel, donc la plus grande valeur de OO' est

$$\overline{OO'}^2 = 2(R^2 + R'^2).$$

Si l'on donne à $\overline{OO'}^2$ la valeur limite $2(R^2 + R'^2)$, $m = 0$, le lieu se réduit à un point situé dans l'intérieur du plus grand des deux cercles.

Si les deux cercles donnés se coupent, les points d'intersection font partie du lieu; car tout point d'intersection a une puissance nulle par rapport à chacun des cercles. Le lieu est alors bien facile à construire : c'est la circonférence ayant son centre au milieu de OO', et pour rayon la distance du milieu de OO' à l'un des points d'intersection; on peut remarquer que cette circonférence n'a aucun point en dehors des deux cercles donnés en même temps.

Si les deux cercles donnés sont tangents extérieurement, le lieu est situé tout entier à l'intérieur du plus grand des deux cercles et passe par le point de tangence; son rayon est $\dfrac{R - R'}{2}$.

Si les deux cercles donnés sont tangents intérieurement, le lieu est à l'intérieur du plus grand cercle, mais à l'extérieur du plus petit; son rayon est $\dfrac{R + R'}{2}$, il passe toujours par le point de tangence.

Il résulte encore de là que les deux cercles donnés et le lieu ont même axe radical.

Note. — Nous avons reçu une autre solution de M. A. Giard.

Question 890

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 336),

PAR M. PELLET,

Élève au lycée de Nîmes.

En désignant par X_n *le polynôme de Legendre, on propose de démontrer que l'équation de degré* $2n$, *savoir* :

$$n(n+1)X_n^2 - (1 - x^2)X_n'^2 = 0,$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 *et* $+1$. (CH. HERMITE.)

$X_n = 0$ a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. Soient

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n,$$

ces n racines rangées suivant leur ordre de grandeur. Les racines de l'équation $X_n' = 0$ sont aussi réelles et comprises entre les intervalles des racines précédentes. De sorte que, si on les désigne par b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}$, la suite

$$-1, \; a_1, \; b_1, \; a_2, \ldots, \; b_{n-1}, \; a_n, \; 1$$

sera croissante.

-1 réduit le polynôme $n(n+1)X_n^2 - (1-x^2)X_n'^2$ à son premier terme, et par conséquent le rend positif, a_1 le réduit à

$$-(1-a_1^2)X_n'^2,$$

et par conséquent le rend négatif. Le polynôme a donc au moins une racine entre -1 et a_1.

On verrait de la même manière qu'il y a au moins une racine entre a_1 et b_1, b_1 et a_2, a_2 et $b_2, \ldots$, b_{n-1} et a_n, a_n et 1.

Donc chacun des $2n$ intervalles de la suite

$$-1, \; a_1, \; b_1, \ldots, \; b_{n-1}, \; a_n, \; 1$$

comprend au moins une racine de l'équation

$$n(n+1)X_n^2 - (1-x^2)X_n'^2 = 0.$$

Cette équation a donc toutes ses racines inégales, réelles et comprises entre -1 et $+1$. C. Q. F. D.

Note. — M. Brocard, lieutenant du Génie à Bar-le-Duc, nous a envoyé une autre solution de la question 890.

Question 917

(voir 2e série, t. VIII, p. 95),

PAR M. FOURET.

Trois points d'une droite décrivent chacun une surface déterminée; tout point M *de cette droite décrit en même temps une autre surface. Si pour une position déterminée de la droite on mène les normales aux sur-*

faces décrites par chaque point, toutes ces normales appartiennent à un hyperboloïde. (MANNHEIM.)

On sait que :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite mobile se coupent suivant une même droite que l'on appelle la conjuguée de la première (*).

Ce théorème, qui est dû à M. Chasles, va nous permettre de démontrer très-facilement celui que nous avons en vue.

La droite dont il est question dans l'énoncé de ce dernier théorème peut se déplacer d'une infinité de manières, en satisfaisant aux conditions prescrites.

Imaginons qu'elle se déplace d'une quelconque de ces manières; chacun de ses points va décrire une courbe qui variera avec la nature du déplacement, et le lieu de cette courbe sera une certaine surface. Or les normales à ces différentes surfaces, aux points où elles sont rencontrées par la droite, sont situées dans les plans normaux aux trajectoires correspondantes. Toutes ces normales rencontrent donc la droite conjuguée, d'après le théorème que nous avons rappelé en commençant.

Pour un autre déplacement de la droite on aurait une droite conjuguée sur laquelle s'appuieraient encore les normales aux surfaces. Ces normales s'appuyant ainsi sur trois mêmes droites, à savoir : la droite donnée et deux groupes quelconques de ses conjuguées, forment les génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe. C. Q. F. D.

On peut remarquer que le second système de génératrices de l'hyperboloïde est formé par la droite donnée et ses différentes conjuguées.

(*) BOUR, *Cinématique*, p. 152.

Question 940

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 275);

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Étant donnés n points sur un cercle, on peut trouver $3.4.5\ldots(n-1)$ *contours polygonaux formés de n côtés, ayant ces points pour sommets. Si, d'un même point du cercle on abaisse des perpendiculaires sur tous les côtés, le produit des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un contour quelconque est le même pour tous les contours.* (DÉSIRÉ ANDRÉ.)

1. Partant d'un quelconque des n sommets, on peut aller à tous les autres, et revenir au point de départ par autant de chemins que l'on peut former de permutations de $n-1$ lettres, c'est-à-dire

$$1.2.3.4\ldots(n-1);$$

mais comme ces chemins donnent deux à deux le même contour parcouru en sens inverse, le nombre des contours distincts est égal à

$$3.4.5\ldots(n-1).$$

2. Soit M le point donné. D'après un théorème connu de Géométrie élémentaire, la perpendiculaire abaissée du point M sur un côté quelconque est égale au produit des distances du point M aux deux extrémités de ce côté, divisé par le diamètre du cercle circonscrit. Si donc on nomme P_n le produit des distances du point M aux n sommets donnés, et R le rayon du cercle, le produit des n

perpendiculaires sera égal à

$$\frac{P_n^2}{(2R)^n},$$

quel que soit le contour considéré.

Note. — M. O. Callandreau, élève du lycée d'Angoulême, nous a envoyé une bonne solution de la question précédente.