

J. NEUBERG

**Théorie des indices des points, des  
droits et des plans par rapport à une  
surface du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 9  
(1870), p. 317-324

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1870\\_2\\_9\\_\\_317\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__317_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS  
PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE (\*) ;**

PAR M. J. NEUBERG,

Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

---

1. Soit  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum A_r x_r x_r = 0$  ou simplement  $f(x) = 0$  l'équation homogène d'une surface du second ordre rapportée à des axes rectangulaires quelconques. Désignons par  $m_1, m_2, m_3$  les cosinus directeurs d'une sécante quelconque passant par le point  $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ; les coordonnées du point  $M$  situé sur cette sécante à la distance  $\rho$  de  $A$  peuvent être représentées par  $\alpha_r + m_r \rho$ , où  $m_4$  est un cosinus directeur fictif qu'il faut supposer égal à zéro. Si  $M$  est sur la surface, on a  $f(\alpha + m\rho) = 0$ , ou

$$\rho^2 f(m) + \rho \sum m_r f_r(\alpha) + f(\alpha) = 0,$$

$f_r(\alpha)$  tenant lieu de  $\frac{df(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}{d\alpha_r}$ .

Les racines de cette équation donnent les distances de  $A$  aux deux points d'intersection  $M$  et  $M'$  de la sécante et de la surface, ces distances étant de même signe ou non, suivant que  $M$  et  $M'$  sont d'un même côté ou de part et d'autre de  $A$ . Nous aurons donc

$$AM \cdot AM' = \frac{f(\alpha)}{f(m)}.$$

Une sécante conduite par le point  $B$  parallèlement à

---

(\*) Ces développements renferment les solutions des Questions 837, 918, 919, 920 et 921 (Voir 2<sup>e</sup> série, t. VI, p. 527, et t. VIII, p. 96.)

AM, et coupant la surface en N et N', donnerait de même

$$BN \cdot BN' = \frac{f(\beta)}{f(m)}.$$

Par conséquent, le rapport

$$(1) \quad \frac{AM \cdot AM'}{BN \cdot BN'} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$$

et est indépendant de la direction des parallèles menées par A et par B (Théorème connu de Newton). Si l'on suppose B fixe et A variable, ce rapport pourrait être appelé la *caractéristique* du point A. Plus particulièrement, si B coïncide avec le centre O de la surface, on a  $ON = -ON'$ , et le rapport  $\frac{AM \cdot AM'}{ON^2} = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$  prend le nom d'*indice* du point variable A.

L'indice est *négatif* ou *positif*, suivant que le point A et le centre O appartiennent à la même région de la surface ou non; l'indice d'un point de la surface est nul, et celui du centre vaut  $-1$ . L'indice d'un point par rapport à une sphère est égal à sa puissance divisée par le carré du rayon.

Si la surface est représentée par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'indice du point  $(x_1, x_2, x_3)$  est égal au premier membre de cette équation. Si les axes sont quelconques, la quantité  $f(\beta)$  résulte de l'élimination de  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  entre les quatre équations

$$\frac{1}{2}f_r(\beta) = A_{r1}\beta_1 + A_{r2}\beta_2 + A_{r3}\beta_3 + A_{r4}\beta_4 = 0 \quad (r = 1, 2, 3),$$

$$A_{41}\beta_1 + A_{42}\beta_2 + A_{43}\beta_3 + A_{44}\beta_4 = f(\beta),$$

à cause de  $f(\beta) = \frac{1}{2} \sum \beta_i f_i(\beta) = \frac{1}{2} \beta_4 f_4(\beta)$ ,  $\beta_4 = 1$ . Nous

trouvons

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} - f(\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en désignant par  $H$  le déterminant (Hessien) des coefficients  $A_{rs}$  et par  $B_{rs}$  le mineur  $\frac{dH}{dA_{rs}}$ ,

$$f(\beta) = \frac{H}{B_{44}},$$

et par suite,  $I_x$  étant l'indice du point  $x$ ,

$$(2) \quad I_x = -f(x) \frac{B_{44}}{H},$$

valeur indiquée sans démonstration par M. Faure (t. V, 2<sup>e</sup> série, p. 10).

Bien que l'équation (1) ait été obtenue en supposant des axes coordonnés rectangulaires, il est évident qu'elle subsiste encore pour des axes obliques et même pour des coordonnées tétraédriques (\*). La valeur (2) est donc également applicable aux coordonnées cartésiennes obliques. Mais, pour des coordonnées tétraédriques liées par l'identité

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = 1,$$

on obtient le centre  $\beta$  en identifiant les équations  $\Sigma x_i f_i(\beta) = 0$  et  $\Sigma k_i x_i = 0$ , qui représentent respectivement le plan polaire du point  $\beta$  et le plan de l'infini.

(\*) A cause du caractère *covariant* des quantités  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ . Car, si  $F(x') = 0$  est l'équation de la surface en d'autres coordonnées, une transformation de coordonnées change  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$  en  $\lambda F(\alpha')$  et  $\lambda F(\beta')$ , où  $\lambda$  est un facteur constant et  $\alpha'_r, \beta'_r, x'_r$  les nouvelles coordonnées des points A, B, X.

Nous aurons ainsi,  $\mu$  étant un facteur indéterminé,

$$\frac{1}{2}f_r(\beta) = A_{r1}\beta_1 + A_{r2}\beta_2 + A_{r3}\beta_3 + A_{r4}\beta_4 = \mu k_r \quad (r = 1, 2, 3, 4),$$

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 1,$$

$$f(\beta) = \frac{1}{2} \sum \beta_i f_i(\beta) = \sum \mu k_i \beta_i = \mu,$$

et, en éliminant les  $\beta$  entre les cinq premières équations,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & k_1 f(\beta) \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & k_2 f(\beta) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & k_3 f(\beta) \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & k_4 f(\beta) \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On tire de là

$$f(\beta) = - \frac{H}{\begin{pmatrix} H & k \\ H & k \end{pmatrix}},$$

la notation  $\begin{pmatrix} H & k, l, \dots \\ p, q, \dots \end{pmatrix}$  servant à désigner le *Hessien bordé* des colonnes  $(k_1, k_2, k_3, k_4)$ ,  $(l_1, l_2, l_3, l_4), \dots$ , et des lignes  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ,  $(q_1, q_2, q_3, q_4), \dots$ .

2. Passons à quelques transformations de l'indice. En menant la sécante  $AM$  par le centre  $O$ , nous aurons  $I_a = \frac{AM \cdot AM'}{OM'}$ . Soit  $A'$  le point où  $OA$  est rencontré par le plan polaire de  $A$ ; les points  $A$  et  $A'$  qui divisent le diamètre  $MM'$  harmoniquement, et que nous appellerons *points réciproques*, donnent les relations

$$AM \cdot AM' = AA' \cdot AO, \quad OM^2 = OA \cdot OA'.$$

Par conséquent,  $I_a = - \frac{AA'}{OA'}$ , c'est-à-dire *l'indice d'un point est égal au rapport, changé de signe, des dis-*

tances de ce point et du centre de la surface au plan polaire de ce point. C'est la définition proposée par M. Faure, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 95, et déjà indiquée, 2<sup>e</sup> série, t. V, p. 9.

Si le point A est intérieur à la surface (\*), soient AM une demi-corde conjuguée avec OA, et Om le demi-diamètre parallèle; on a  $I_a = -\frac{AM^2}{Om^2}$ . Désignons par B l'extrémité du diamètre OA et par C celle du diamètre conjugué avec le plan OAM; le volume V du parallélépipède construit sur le tétraèdre OBMC est ce que M. Aoust nomme la *puissance* du point A. Comme les tétraèdres OBMC et OBmC ont même base OBC et des hauteurs proportionnelles aux parallèles AM et Om, on reconnaît immédiatement que  $\frac{V}{abc} = \frac{AM}{Om}$ ; par suite,  $I_a = -\frac{V^2}{a^2 b^2 c^2}$ , le tétraèdre OBmC étant équivalent à celui qui est construit sur les demi-axes principaux a, b, c de la surface.

Si le point A est extérieur, menons une tangente quelconque AM, et soit Om le demi-diamètre parallèle; nous aurons  $I_a = \frac{AM^2}{Om^2}$ . Soit C l'extrémité du diamètre conjugué avec le plan OMA. Le volume V du parallélépipède construit sur le tétraèdre OMAC est encore appelé la *puissance* du point A; en le comparant à celui du parallélépipède construit sur les demi-diamètres conjugués OM, Om et OC, on trouve, comme ci-dessus,  $I_a = \frac{V^2}{a^2 b^2 c^2}$ .

De l'expression  $I_x = -\frac{f(x)}{f(\beta)}$  et des différentes ma-

(\*) Cet alinéa et le suivant renferment la solution de la question 837. Les développements que nous y donnons se rapportent principalement à l'ellipsoïde. Les deux hyperboloïdes exigent quelques légères modifications, à cause des diamètres imaginaires.

nières d'estimer l'indice, on peut tirer de nombreuses conséquences. Nous nous bornons à énoncer la suivante :

*Quand trois surfaces du second ordre ont la même intersection deux à deux, les indices (ou plus généralement les caractéristiques) de tous les points de l'une d'elles par rapport aux deux autres ont une raison constante.*

La proposition analogue sur les coniques avec de nombreux corollaires et les théorèmes corrélatifs font l'objet des Chapitres XVI et XVIII du *Traité des Sections coniques* de M. Chasles.

3. Soient  $M_1 M_2 M_3 M_4$  un tétraèdre conjugué par rapport à  $f$ ,  $V$  son volume,  $V_1, V_2, \dots$  les volumes des tétraèdres  $OM_2 M_3 M_4, OM_3 M_4 M_1, \dots$  (\*), et  $I_r$  l'indice de  $M_r$ . Comme  $I_r = -\frac{V}{V_r}$  et  $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ , on a

$$(3) \quad \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} + \frac{1}{I_4} = -1,$$

ce qui donne une relation nécessaire entre les indices des quatre sommets d'un tétraèdre conjugué.

Soient  $N_1, N_2, N_3, N_4$  les points réciproques de  $M_1, \dots$ ; ces points sont les centres des sections de  $f$  par les faces du tétraèdre. En désignant par  $I'_r$  l'indice de  $N_r$ , nous aurons

$$I_r = -\frac{M_r N_r}{ON_r}, \quad I'_r = -\frac{N_r M_r}{OM_r};$$

d'où

$$(4) \quad \frac{1}{I_r} + \frac{1}{I'_r} = \frac{-ON_r + OM_r}{M_r N_r} = -1,$$

---

(\*)  $V_r$  est positif ou négatif, suivant que  $O$  et  $M_r$  se trouvent du même côté ou de part et d'autre de la face opposée à  $M_r$ .

c'est-à-dire la somme des inverses des indices de deux points réciproques est égale à  $-1$ .

Des relations (3) et (4), on conclut facilement

$$\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} = \frac{1}{I_4},$$

$$\frac{1}{I'_1} + \frac{1}{I'_2} + \frac{1}{I'_3} + \frac{1}{I'_4} = -3,$$

égalités qui démontrent les théorèmes 920 et 921 de M. Faure.

Prenons pour la surface  $f$  une sphère  $S$  de rayon  $R$ , et soient  $p_r^2$  la puissance (dans le sens de Steiner) de  $M_r$ , ( $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ ) les rayons des sections de  $S$  par les faces du tétraèdre; nous aurons  $I_r = \frac{p_r^2}{R^2}$ ,  $I'_r = -\frac{p_r^2}{R^2}$ , et les égalités ci-dessus se transforment en

$$-\frac{1}{R^2} = \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_3^2} + \frac{1}{p_4^2},$$

$$-\frac{1}{\rho_4^2} = \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2},$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_3^2} + \frac{1}{\rho_4^2} \right)^{(*)},$$

théorèmes signalés sans démonstration par M. Lafitte (*Nouvelles Annales*, année 1857, p. 205). Le dernier pourrait s'énoncer ainsi : *Dans tout tétraèdre dont les hauteurs se coupent en un même point, l'inverse du*

(\*) La première et la seconde de ces égalités expriment au fond la même propriété, l'une se rapportant à la sphère conjuguée et l'autre à la circonférence conjuguée. Si l'on ne veut conserver dans ces relations que des éléments réels, et que  $M_4$  est celui des quatre sommets qui est intérieur à la sphère, on remplacera  $p_3, p_4$  par les tangentes issues de  $M_2, M_3, M_4$ ,  $\rho_1 \sqrt{-1}$  par le rayon de la section perpendiculaire à  $OM_1$  en  $M_1$  et  $\rho_1 \sqrt{-1}$  par la tangente issue de  $N_1$ .



( 324 )

*carré du rayon de la sphère conjuguée est égal au tiers de la somme qu'on obtient en ajoutant les inverses des carrés des rayons des cercles conjugués avec les faces.*

*( La suite prochainement. )*