NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ROGER ALEXANDRE

Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 293-302

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__293_1>

MÉTHODE ET FORMULE

pour la résolution des équations du troisième degré ;

PAR M. ROGER ALEXANDRE.

La méthode que nous donnons ici n'est autre que celle que nous avons exposée dans le numéro d'août 1866 des *Annales* (*), simplifiée conformément à une Note insérée dans le numéro de novembre de la même année (**), et augmentée de quelques résultats que nous croyons inédits.

Il convient d'ajouter que cette méthode ne saurait être considérée comme absolument nouvelle. Elle se ramène au procédé général de transformation linéaire qui a déjà été appliqué à la résolution des équations du troisième degré (***), ou encore, ce qui revient au même (****), à la méthode de Tschirnaüs, qui permet de réduire une équation à ses deux termes extrêmes (*****).

Toute notre prétention doit donc se borner à présenter une solution connue, sous une forme peut-être plus simple et plus heureuse.

Proposons-nous de résoudre l'équation générale du troisième degré

$$(1) \qquad x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

en la ramenant à une équation de la forme

$$(2) \qquad (X + a)^3 = b,$$

qui, développée, peut s'écrire

$$X^3 + 3aX^2 + 3a^2X + a^3 - b = 0,$$

et dans laquelle X représente une fonction de x, et a, b, des quantités indépendantes de cette inconnue.

Pour que X fût l'inconnue x elle-même, il faudrait que l'on eût à la fois

$$p = 3a, \quad q = 3a^2, \quad r = a^3 - b,$$

(*) 2e série, t. V, p. 358.

(**) *Ibid.*, p. 527.

(***) Voir le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, nos 57 et suiv., et surtout no 63 (3e édit.).

(****) Voir *ibid.*, no 183, p. 407.

(*****) Voir *ibid.*, no 191

ce qui ne peut avoir lieu que si p et q satisfont à la condition $p^2 - 3q = 0$, tirée des deux premières égalités.

Il résulte de ce que nous venons de dire, que *toute équation complète du troisième degré dont les deux premiers coefficients satisfont à la relation $p^2 - 3q = 0$, peut être immédiatement résolue.*

C'est sur ce principe que notre méthode est fondée.

Dans l'équation (1), remplaçons x par $y + h$, y étant une nouvelle inconnue, et h une quantité que nous nous réservons de déterminer en fonction des coefficients p, q, r; nous aurons une équation qui, ordonnée par rapport à y, peut s'écrire

$$(3) \qquad y^3 + p'y^2 + q'y + r' = 0,$$

et dont les coefficients ont pour valeurs

$$\begin{aligned} p' &= 3h + p, \\ q' &= 3h^2 + 2ph + q, \\ r' &= h^3 + ph^2 + qh + r. \end{aligned}$$

Si, à l'aide de l'indéterminée h, nous pouvions réaliser la relation $p'^2 - 3q' = 0$, l'équation (3) serait résolue. Mais si l'on remplace p' et q' par leurs valeurs, on trouve

$$(4) \qquad p'^2 - 3q' = p^2 - 3q,$$

c'est-à-dire qu'aucune valeur de h ne répond à la question.

Il n'en sera pas de même si, après avoir divisé tous les termes de l'équation (3) par $y^3 r'$, ce qui permet de l'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \left(\frac{1}{y}\right)^3 + \frac{q'}{r'}\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{p'}{r'}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{r'} = 0,$$

nous posons, entre les coefficients de cette nouvelle équation, la relation suivante (analogue à $p^2 - 3q = 0$) :

$$\left(\frac{q'}{r'}\right)^2 - 3\left(\frac{p'}{r'}\right) = 0,$$

ou

$$q'^2 - 3p'r' = 0.$$

Remplaçant p', q', r' par leurs valeurs, on arrive à une équation en h qui se réduit à

$$(6)\qquad (p^2 - 3q)h^2 + (pq - 9r)h + (q^2 - 3pr) = 0.$$

Si donc on prend pour h l'une quelconque des deux valeurs tirées de cette équation, l'équation (5) pourra être assimilée à l'équation (2), et résolue par rapport à $\frac{1}{y}$.

Or, les racines de l'équation (2) sont données par la formule

$$X = a + \sqrt[3]{b},$$

les trois valeurs de X correspondant aux trois valeurs du radical.

Dans le cas qui nous occupe, nous aurons la valeur de a en divisant membre à membre les deux égalités

$$\frac{q'}{r'} = 3a, \quad \text{et} \quad \frac{p'}{r'} = 3a^2,$$

d'où

$$a = \frac{p'}{q'};$$

par suite, on aura

$$b = \left(\frac{p'}{q'}\right)^3 - \frac{1}{r'} = \frac{p'^3}{q'^3} - \frac{3p'}{q'^2} = \frac{p'}{q'^3}(p'^2 - 3q').$$

Les racines de l'équation (5) seront donc données par la formule

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}\left(\frac{1}{y}\right) &= -\frac{p'}{q'} + \sqrt[3]{\frac{p'}{q'^3}(p'^2-3q')}\\ &= \frac{-p'+\sqrt[3]{p'(p'^2-3q')}}{q'},\end{aligned}\right.$$

et l'on en déduira celles de l'équation (1) :

$$x = y + h = \frac{q'}{-p'+\sqrt[3]{p'(p'^2-3q')}} + h.$$

En remplaçant p' et q' par leurs valeurs, et ayant égard à la relation (4), nous obtiendrons l'expression générale

$$(8)\qquad x = \frac{3h^2+2ph+q}{-(3h+p)+\sqrt[3]{(3h+p)(p^2-3q)}} + h,$$

qui peut encore s'écrire

$$(9)\qquad x = \frac{ph+q+h\sqrt[3]{(3h+p)(p^2-3q)}}{-(3h+p)+\sqrt[3]{(3h+p)(p^2-3q)}}.$$

En joignant à cette formule l'expression de h tirée de la résolvante (6), nous aurons tous les éléments nécessaires pour résoudre l'équation générale du troisième degré.

Cette expression est

$$h = \frac{9r-pq\pm\sqrt{(9r-pq)^2-4(p^2-3q)(q^2-3pr)}}{2(p^2-3q)}.$$

Toutes les fois que la quantité placée sous le radical est la négative, on se trouvera dans le cas dit *irréductible.*

Cas particuliers.

L'examen de la résolvante (6) nous amène à considérer les cas où l'un de ses trois coefficients s'annule.

Quand $p^2-3q=0$, la formule générale n'est plus applicable. En effet, la valeur de h, qui se réduit à $-\frac{p}{3}$, annule à la fois (dans ce cas seulement) les deux coefficients p' et q' de l'équation (3), ce qui donnerait $\frac{1}{y} = \frac{0}{0}$ [formule (7)], si l'on voulait procéder comme nous avons fait.

Nous savons, d'ailleurs, que, dans ce cas, l'équation (1) peut être immédiatement résolue.

Quand on a $q^2 - 3pr = 0$, h peut recevoir une valeur nulle, et l'équation (1) peut être résolue par rapport à $\frac{1}{x}$, comme l'équation (3) l'a été par rapport à $\frac{1}{y}$.

Si l'on a enfin $9r - pq = 0$, la valeur de h se réduit à $\pm\sqrt{\frac{q}{3}} = \frac{\pm\sqrt{3q}}{3}$, et la formule générale peut être mise sous une forme beaucoup plus élégante.

En effet, si l'on remarque que $q = 3h^2$, et que l'on a par suite

$$(3h + p)(p^2 - 3q) = (p + 3h)^2(p - 3h),$$

la formule (9) pourra s'écrire

$$x = \frac{h(p + 3h) + h\sqrt[3]{(p + 3h)^3\left(\frac{p - 3h}{p + 3h}\right)}}{-(p + 3h) + \sqrt[3]{(p + 3h)^3\left(\frac{p - 3h}{p + 3h}\right)}},$$

et enfin

$$x = h\,\frac{\sqrt[3]{p - 3h} + \sqrt[3]{p + 3h}}{\sqrt[3]{p - 3h} - \sqrt[3]{p + 3h}},$$

ou encore, l'équation proposée étant $f(x) = 0$,

$$x = h\,\frac{\sqrt[3]{f''(-h)} + \sqrt[3]{f''(h)}}{\sqrt[3]{f''(-h)} - \sqrt[3]{f''(h)}}\ (*).$$

(*) En mettant ici en évidence les racines cubiques de l'unité, comme nous le ferons tout à l'heure à propos d'un autre cas, on verrait que cette formule ne doit donner que les trois racines de l'équation proposée.

Si l'on prend pour h le signe $+$, on a

$$(10) \qquad x = \frac{\sqrt{3q}}{3} \frac{\sqrt[3]{p-\sqrt{3q}} + \sqrt[3]{p+\sqrt{3q}}}{\sqrt[3]{p-\sqrt{3q}} - \sqrt[3]{p+\sqrt{3q}}} \ (*).$$

Cette formule peut être considérée comme générale au même titre que la formule de Cardan, relative, comme on sait, à une équation préalablement débarrassée du terme en x^2.

On peut en effet toujours passer d'une équation quelconque à une autre équation dans laquelle les coefficients satisfont à la relation $9r - pq = 0$, à l'aide d'une quantité H, analogue à h, et exprimée *rationnellement* en fonction des coefficients P, Q, R, de l'équation proposée.

(*) Il est facile d'arriver directement à cette expression des racines de l'équation préparée

$$x^3 + px^2 + qx + \frac{pq}{9} = 0,$$

en y substituant $x = a\frac{y+1}{y-1}$, a étant une indéterminée et y une nouvelle inconnue.

On arrive à une équation qui peut s'écrire

$$a(a^2+q)(y^3+1) + p\left(a^2+\frac{q}{9}\right)(y^3-1)$$
$$+ ay(3a^2-q)(y+1) + py\left(a^2-\frac{q}{3}\right)(y-1) = 0.$$

Si l'on pose $3a^2 = q$, d'où $a = \pm\sqrt{\frac{q}{3}} = \frac{\pm\sqrt{3q}}{3}$, les deux derniers termes s'évanouiront, et, en remplaçant a^2 par sa valeur dans les deux premiers, on trouvera

$$y^3 = \frac{p-3a}{p+3a},$$

d'où l'on conclut, en prenant le signe $+$ pour a,

$$x = \frac{\sqrt{3q}}{3} \frac{\sqrt[3]{p-\sqrt{3q}} + \sqrt[3]{p+\sqrt{3q}}}{\sqrt[3]{p-\sqrt{3q}} - \sqrt[3]{p+\sqrt{3q}}}.$$

Il suffit pour cela de poser entre les coefficients

$$p = 3H + P, \quad q = 3H^2 + 2PH + Q,$$
$$r = H^3 + PH^2 + QH + R,$$

la relation

$$9r - pq = 0.$$

On voit, en effectuant les calculs, que cela revient à poser

$$2(3Q - P^2)H + (9R - PQ) = 0,$$

d'où l'on tire

$$H = \frac{9R - PQ}{2(P^2 - 3Q)},$$

quantité qu'il suffira d'ajouter à la formule (10) pour avoir l'expression des trois racines de l'équation générale proposée.

Nous examinerons en dernier lieu le cas où l'on a $p = 0$ dans l'équation générale, le seul auquel s'applique la formule de Cardan,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}.$$

Désignons, pour plus de simplicité, *la valeur absolue* du premier radical cubique par Y, celle du second par Z.

Faisons $p = 0$ dans la valeur de h, il vient

$$h = -\frac{9r \pm \sqrt{81r^2 + 12q^3}}{6q} = \frac{3}{q}\left(-\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}\right).$$

On aura donc, selon qu'on prendra le signe + ou le signe —,

$$h_{(+)} = \frac{3}{q} Z^3, \quad h_{(-)} = \frac{3}{q} Y^3.$$

Revenons à la formule (8). On sait que, pour obtenir les trois valeurs de x, il suffit de multiplier successivement le radical cubique intéressé dans cette formule par les trois racines cubiques de l'unité. Désignons par k l'une de ces racines, avec cette condition que partout où cette lettre se trouvera répétée dans une même formule, elle représentera *la même racine cubique de l'unité*, et en n'attribuant, dans tout ce qui va suivre, au signe $\sqrt[3]{}$ que la valeur absolue des radicaux.

D'après ces conventions, si l'on introduit l'hypothèse $p=0$ dans la formule générale, celle-ci deviendra, (x_k désignant la racine qui correspond à k),

$$x_k = \frac{3h^2+q}{-3h+k\sqrt[3]{-9qh}}+h=\frac{q-hk\sqrt[3]{9qh}}{-3h-k\sqrt[3]{9qh}}.$$

Si maintenant on remplace h par l'une de ses valeurs (signe $+$); si, de plus, on remarque que $-\frac{q}{3}=YZ$ (valeur absolue de $\sqrt[3]{Y^3Z^3}$), et que $k^3=1$ (quel que soit k), l'expression de x pourra passer successivement par toutes les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
x_{k(+)} &= \frac{q-\frac{3}{q}Z^3k\sqrt[3]{27Z^3}}{-\frac{9}{q}Z^3-k\sqrt[3]{27Z^3}}=\frac{\frac{q^2}{9}-kZ^4}{-Z^3-\frac{q}{3}kZ}\\
&=\frac{Y^2Z^2-kZ^4}{kYZ^2-Z^3}=\frac{k^3Y^2-kZ^2}{kY-Z}\\
&=\frac{k^4Y^2-k^2Z^2}{k^2Y-kZ}=k^2Y+kZ.
\end{aligned}$$

Si l'on avait pris $h_{(-)}=\frac{3}{q}Y^3$, on aurait obtenu, en suivant une marche identique,

$$x_{k(-)}=k^2Z+kY.$$

On reconnaît aisément dans l'une et l'autre de ces deux expressions la formule de Cardan, dont la signification se trouve précisée et restreinte exclusivement à celle des trois racines de l'équation proposée.

Soient 1, α, β les trois racines cubiques de l'unité; en remplaçant successivement k par l'une de ces valeurs dans les deux formules précédentes, et en ayant égard aux relations connues $\alpha^2 = \beta$, $\alpha = \beta^2$, on obtient également les trois racines, mais dans un ordre différent :

$$x_{1(+)} = \mathrm{Y} + \mathrm{Z}, \qquad x_{1(-)} = \mathrm{Z} + \mathrm{Y},$$
$$x_{\alpha(+)} = \beta\mathrm{Y} + \alpha\mathrm{Z}, \qquad x_{\alpha(-)} = \beta\mathrm{Z} + \alpha\mathrm{Y},$$
$$x_{\beta(+)} = \alpha\mathrm{Y} + \beta\mathrm{Z}, \qquad x_{\beta(-)} = \alpha\mathrm{Z} + \beta\mathrm{Y}.$$