E. LINDELÖF

Problème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 212-216

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__212_0>

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. E. LINDELÖF.

(*Comptes rendus de la Société des Sciences de Finlande*, à Helsingfors, 27 janvier 1868.)

1. *Dans un triangle plan donné, inscrire un autre triangle de périmètre minimum.*

Soient A, B, C, a, b, c les angles et les côtés du triangle donné, et A', B', C', a', b', c' les angles et les côtés du triangle inscrit demandé. La question consiste à déterminer, sur les trois droites a, b, c, trois points A', B', C', tels que la somme des droites qui les joignent

$$a' + b' + c'$$

soit un minimum.

Admettons pour un instant que les points B' et C' soient déjà connus, et que l'on cherche à déterminer la position du point A' sur la ligne a, de manière que la somme des distances A'B', A'C', savoir : $b' + c'$, soit un minimum. Faisons glisser le point A' sur la ligne BC d'une quantité infiniment petite ds; les distances A'C' et A'B' prendront alors les accroissements

$$ds.\cos BA'C', \quad -ds.\cos CA'B',$$

dont la somme devra être nulle pour que le minimum puisse avoir lieu. Il s'ensuit de là que les angles BA'C' et CA'B', c'est-à-dire les angles que font de part et d'autre, au point A', les côtés b', c' du triangle inscrit avec le côté a du triangle donné, sont égaux entre eux. Par la même raison, les angles formés en chacun des points B' et C', par les côtés du triangle intérieur avec ceux du triangle extérieur sont aussi égaux entre eux.

En désignant maintenant par x l'un des deux angles égaux en A', par y l'un des deux angles égaux en B', et par z l'un des deux angles égaux en C', on a

$$A + y + z = \pi,$$
$$B + z + x = \pi,$$
$$C + x + y = \pi;$$

d'où

$$A + B + C + 2(x + y + z) = 3\pi,$$

ou

$$x + y + z = \pi.$$

Cette équation, comparée avec les trois premières, donne

$$x = A, \quad y = B, \quad z = C,$$

d'où il suit que les trois angles du triangle inscrit sont

$$A' = \pi - 2A, \quad B' = \pi - 2B, \quad C' = \pi - 2C.$$

Les côtés étant entre eux comme les sinus des angles opposés, on a par conséquent

$$\frac{a'}{\sin A \cos A} = \frac{b'}{\sin B \cos B} = \frac{c'}{\sin C \cos C}.$$

Mais on a aussi, d'autre part,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

La combinaison de ces formules donne

$$\frac{a'}{a \cos A} = \frac{b'}{b \cos B} = \frac{c'}{c \cos C} = m,$$

le rapport m étant, pour le moment, inconnu. Pour déterminer ce rapport, je projette sur B'C' les deux autres côtés du triangle AB'C', sur C'A' les deux autres côtés du triangle BC'A', et sur A'B' les deux autres côtés du triangle $CA'B'$. La somme de ces projections sera

$$a' + b' + c' = a\cos A + b\cos B + c\cos C.$$

En comparant cette formule aux précédentes, on trouve $m = 1$, et par suite

$$a' = a\cos A, \quad b' = b\cos B, \quad c' = c\cos C.$$

Il est facile maintenant de calculer les segments déterminés par les points A', B', C' sur les côtés du triangle donné. On trouve, par exemple,

$$A'B : b' = \sin C : \sin B = c : b,$$

d'où

$$A'B = \frac{b'c}{b} = c\cos B,$$

ce qui prouve que la ligne AA' est perpendiculaire sur le côté a. Les points cherchés, A', B', C', ne sont donc autre chose que *les pieds des hauteurs du triangle donné*.

La proposition qu'on vient de démontrer a sa réciproque. Si les lignes AA', BB', CC' sont perpendiculaires aux côtés a, b, c, les points B' et C' se trouveront sur la circonférence d'un cercle décrit sur le côté a comme diamètre, et l'on a par conséquent

$$AB.AC' = AC.AB',$$

ou

$$AB : AC = AB' : AC',$$

d'où l'on voit que le triangle $A'B'C'$ est semblable au triangle ABC. Il en est de même des triangles $BC'A'$ et $CA'B'$. On en conclut que les côtés du triangle inscrit forment des angles égaux deux à deux avec les côtés du triangle donné; or, c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que le périmètre du triangle inscrit soit un minimum.

Nous résoudrons de la même manière le problème analogue :

2. *Dans un triangle sphérique donné inscrire un autre triangle sphérique dont le périmètre soit un minimum.*

Désignons les côtés et les angles des deux triangles de la même manière que dans le problème précédent. On trouvera, comme dans le premier cas, que la condition du minimum consiste encore en ce que les côtés du triangle inscrit doivent faire deux à deux des angles égaux avec les côtés du triangle donné. Nous allons démontrer que cette condition sera remplie lorsque les arcs de grand cercle AA', BB', CC' seront perpendiculaires sur les côtés a, b, c du triangle donné.

Pour abréger, introduisons les nouvelles notations suivantes : $AA' = l$, $BB' = m$, $CC' = n$, $BA' = u$, $BC' = v$, l'angle $BA'C' = x$. On trouve alors les équations

$$\operatorname{tang} u = \operatorname{tang} c \cos B,$$
$$\operatorname{tang} v = \operatorname{tang} a \cos B.$$

On a, de plus, entre les quatre éléments consécutifs x, u, B, v du triangle $BC'A'$, la relation connue

$$\cot x \sin B + \cos B \cos u = \sin u \cot v,$$

d'où l'on tire successivement, à l'aide des formules précédentes,

$$\begin{aligned}
\sin B \cot x &= \cos u \left(\frac{\operatorname{tang} u}{\operatorname{tang} v} - \cos B \right), \\
&= \cos u \left(\frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a} - \cos B \right), \\
&= \frac{\cos u}{\sin a \cos c} (\sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B), \\
&= \frac{\cos u}{\sin a \cos c} \sin b \cos A.
\end{aligned}$$

D'autre part, le triangle A A'B donne

$$\cos c = \cos u \cos l,$$

ce qui réduit notre formule à

$$\sin B \cot x = \frac{\sin b \cos A}{\sin a \cos l} = \frac{\sin B \cos A}{\sin A \cos l},$$

d'où l'on tire finalement

$$\tang x = \tang A \cos l.$$

Ici x désigne l'angle compris entre les côtés b' et a; mais le résultat resterait encore le même si x désignait l'angle compris entre c' et a. Les deux côtés b' et c' du triangle inscrit ont par conséquent la même inclinaison sur le côté a au point A', et le même raisonnement démontre que pareille chose a lieu aux points B' et C'.