Nouvelles annales de mathématiques

E. Catalan

Sur quelques développements en séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 199-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__199_0>

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES;

PAR M. E. CATALAN.

Soit

$$(1) \qquad f(x) = af(bx) + \alpha\varphi(x),$$

a, b, α étant des constantes données.

Il résulte, de cette relation :

$$\begin{aligned}
af(bx) &= a^2 f(b^2 x) + a\alpha\varphi(bx),\\
a^2 f(b^2 x) &= a^3 f(b^3 x) + a^2\alpha\varphi(b^2 x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
a^{n-1} f(b^{n-1} x) &= a^n f(b^n x) + a^{n-1}\alpha\varphi(b^{n-1} x);
\end{aligned}$$

puis

$$(2) \quad f(x) = a^n f(b^n x) + \alpha[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \ldots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)].$$

On trouve, par un calcul semblable,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} af(bx) &= \frac{f\left(\dfrac{x}{b^n}\right)}{a^n} \\ &\quad - \alpha\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{b}\right) + \ldots + \frac{1}{a^{n-1}}\varphi\left(\frac{x}{b^{n-1}}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, *si le produit $a^n f(b^n x)$ tend vers une limite λ quand n augmente indéfiniment*, on conclut, de l'équation (2),

$$f(x) = \lambda + \alpha \lim[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \ldots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)].$$

Ainsi la série

$$\varphi(x) + a\varphi(bx) + a^2\varphi(b^2 x) + \ldots$$

est *convergente*; et l'on a

$$(\mathrm{A}) \quad \varphi(x) + a\varphi(bx) + a^2\varphi(b^2 x) + \ldots = \frac{f(x) - \lambda}{\alpha}.$$

Quand, au contraire, le produit $a^n f(b^n x)$ ne tend vers aucune limite, la série est *divergente* ou *indéterminée*.

De même, *si le rapport* $\dfrac{f\left(\dfrac{x}{b^n}\right)}{a^n}$ *a une limite* μ,

$$(\mathrm{B})\qquad \varphi(x)+\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\varphi\left(\frac{x}{b^2}\right)+\ldots=\frac{\mu-af(bx)}{\alpha}.$$

Les formules (A), (B), probablement connues, permettent de sommer certaines séries (*).

Applications.

Supposons que l'équation (1) soit :

1°
$$\sin x = 3\sin\tfrac{1}{3}x - 4\sin^3\tfrac{1}{3}x;$$

de manière que

$$f(x)=\sin x,\quad \varphi(x)=\sin^3\tfrac{1}{3}x,\quad a=3,\quad \alpha=-4,\quad b=\tfrac{1}{3}.$$

On a

$$\lambda=\lim\left[3^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right]=x,\quad \mu=\lim\frac{\sin(3^n x)}{3^n}=0;$$

et, en conséquence,

$$(\mathrm{C})\qquad \sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+3^2\sin^3\frac{x}{3^3}+\ldots=\frac{x-\sin x}{4},$$

$$\sin^3\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3x+\ldots=\frac{3}{4}\sin\frac{x}{3},$$

ou plutôt

$$(\mathrm{D})\qquad \sin^3 x+\frac{1}{3}\sin^3 3x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3^2x+\ldots=\frac{3}{4}\sin x.$$

(*) Je crois avoir communiqué à M. Gerono, il y a quelques mois, la formule (A).

2°
$$\cos x = -3\cos\frac{x}{3} + 4\cos^3\frac{x}{3};$$

$$f(x) = \cos x,\quad \varphi(x) = \cos^3\frac{x}{3},\quad a = -3,\quad \alpha = 4,\quad b = \frac{1}{3}.$$

Le produit $(-3)^n \cos\frac{x}{3^n}$ croît indéfiniment avec n (en valeur absolue). Ainsi la série

$$\cos^3\frac{x}{3} - 3\cos^3\frac{x}{3^2} + 3^2\cos^2\frac{x}{3^3} - \ldots$$

est *divergente*.

Au contraire, $\lim\frac{\cos^3 3^n x}{(-3)^n} = \mu = 0$; donc, par le changement de x en $3x$,

$$\text{(E)}\quad \cos^3 x - \frac{1}{3}\cos^3 3x + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 x - \frac{1}{3^3}\cos^3 3^3 x + \ldots = \frac{3}{4}\cos x.$$

Cette formule résout la question 987, proposée par M. Laisant.

3°
$$\cot x = 2\cot 2x + \operatorname{tang} x;$$
$$f(x) = \cot x,\quad \varphi(x) = \operatorname{tang} x,\quad a = 2,\quad \alpha = 1,\quad b = 2.$$

Le produit $2^n \cot(2^n x)$ ne tend vers aucune limite; le rapport $\frac{\cot\frac{x}{2^n}}{2^n}$ a pour limite $\frac{1}{x}$; donc la formule (B) est seule applicable. Elle donne

$$\text{(F)}\quad \operatorname{tang} x + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{x}{2^2} + \ldots = \frac{1}{x} - \frac{2}{\operatorname{tang} 2x};$$

et, en particulier,

$$\text{(G)}\quad \operatorname{tang}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{32} + \ldots = 2\left(\frac{4}{\pi} - 1\right).$$

4° $$\operatorname{arc\,tang} x = \operatorname{arc\,tang}(bx) + \operatorname{arc\,tang}\frac{(1-b)x}{1+bx^2}.$$

Si la constante b, supposée positive, est inférieure à l'unité, cette relation conduit à la formule

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{arc\,tang}\dfrac{(1-b)x}{1+bx^2} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{(1-b)bx}{1+b^3x^2} \\ \qquad + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{(1-b)b^2x}{1+b^5x^2} + \ldots = \operatorname{arc\,tang} x; \end{array}\right.$$

d'où l'on conclut, par exemple,

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{arc\,tang}\dfrac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{2}{9} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{4}{33} + \ldots \\ \qquad + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{2^{n-1}}{2^{2n-1}+1} + \ldots = \dfrac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Au contraire, b étant plus grand que 1, on trouve

$$(\mathrm{K})\quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{arc\,tang}\dfrac{(b-1)x}{1+bx^2} + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{(b-1)bx}{1+b^3x^2} \\ \qquad + \operatorname{arc\,tang}\dfrac{(b-1)b^2x}{1+b^5x^2} + \ldots = \operatorname{arc\,cot} x, \end{array}\right.$$

formule qui ne diffère pas de (H).

Liége, 23 février 1870.