NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LE BESGUE

Note sur quelques équations indéterminées

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 8 (1869), p. 452-456

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1869_2_8__452_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1869, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES;

PAR M. LE BESGUE.

L'impossibilité de la résolution en nombres entiers d'une équation indéterminée

$$f(x, y, z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

où f et φ représentent des fonctions entières ou sommes de termes $Ax^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\ldots$ (A étant un entier positif ou négatif; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des entiers positifs ou nuls, et $x, y, z, \ldots$ des entiers positifs, négatifs ou nuls), est quelquefois rendue évidente en donnant à l'équation certaines formes particulières, par exemple celle-ci

$$mt + r = mu + r',$$

m étant un entier positif; t, u des entiers de même signe, aussi bien que r et r' supposés $< m$ en valeur absolue.

Si r et r' sont différents, il y a évidemment impossibilité : c'est le cas de $f(x, y, z, \ldots)$ et $\varphi(x, y, z, \ldots)$ *non*

congrus pour un certain module m convenablement choisi.

Le cas de $r = 0$ et r' autre que 0 est un cas particulier qui se présente assez souvent.

(A) Voici un exemple pour ce dernier cas.

$x^2 + y^2 = (4a + 3)z$ est impossible (x, y premiers entre eux).

Démonstration. $4a + 3$ étant décomposé en ses facteurs premiers $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, il doit y en avoir un nombre impair de la forme $4b + 3$. Soit donc

$$x^2 = (4b + 3)t - y^2;$$

d'où, en élevant à la puissance $2b + 1$,

$$x^{4b+2} = (4b + 3)\mathrm{U} - y^{4b+2},$$

où U est entier. Le théorème de Fermat réduit cette équation à

$$(4b + 3)v + 1 = (4b + 3)w - 1,$$

où v et w sont entiers; or cela est impossible.

(B) Voici un autre exemple, question :

L'équation $x^2 = y^3 + 7$ est impossible en nombres entiers :

1° Pour y pair on a

$$x^2 = 8v^3 + 7;$$

donc x est impair; $x = 2z + 1$ donne

$$x^2 = 4z(z + 1) + 1 = 8u + 1,$$

u entier; or $8u + 1 = 8v^3 + 7$ est impossible.

2° y impair :

$$x^2 + 1 = y^3 + 8 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$
$$= (y + 2)[(y - 1)^2 + 3].$$

Or $(y-1)^2+3$, pour $y-1$ pair, a un diviseur premier de la forme $4b+3$; l'équation est donc impossible.

(C) Autre exemple :

$x^3 \pm y^3 = 9z + r$ est impossible pour $r = 3, 4, 5, 6$: c'est la question 902 traitée par M. *Laisant*.

$\pm x$, $\pm y$ ayant l'une des formes $3t$, $3t+1$, $3t+2$, le premier membre ne peut prendre que l'une des formes

$$9^p + 0, 1, 2, 7, 8.$$

Cette impossibilité par *non-congruence* a été appliquée à quelques cas particuliers de l'équation

$$x^m + y^m = z^m,$$

x, y, z entiers, m premier impair; par exemple : $m = 3$, $m = 7$.

Peut-on démontrer d'autres cas particuliers par la même méthode, sans introduire des nombres imaginaires formés avec les racines de l'unité?

Note du Rédacteur. — La démonstration relative à l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $x^2 = y^3 + 7$, dans le cas (2°) de y impair, a été fondée sur ce principe que :

Tout diviseur de la somme, x^2+1, de deux carrés premiers entre eux est également la somme de deux carrés premiers entre eux.

Or, $(y-1)^2+3$ étant de la forme $4b+3$, ne peut être la somme de deux carrés; donc, etc.

Le théorème que nous venons d'énoncer au sujet des diviseurs de la somme des carrés de deux nombres premiers entre eux est démontré dans la *Théorie des Nombres* de LEGENDRE. Ce théorème a d'abord été déduit de propositions plus générales dues à Lagrange, et cette dé-

duction ne peut donner lieu à aucune objection. Mais, à la suite, on lit (p. 203, t. I, 3e édition) :

« *Ce théorème étant d'un très-grand usage dans la Théorie des Nombres, nous croyons devoir en donner une seconde démonstration fondée sur d'autres principes.* »

Il nous semble que cette seconde démonstration est au moins incomplète. Nous allons dire pourquoi.

En nommant N un diviseur de la somme t^2+u^2 des carrés, t^2, u^2 *premiers entre eux*, et N″ un nombre entier moindre que $\frac{1}{4}$ N, l'auteur établit l'égalité

$$(N-\alpha t-6u)^2+(\alpha u-6t)^2=NN'',$$

où α, 6 sont des nombres entiers satisfaisant à une condition indiquée. Puis, il ajoute :

« *Si dans ce nouveau résultat on avait* $N''=1$, *le nombre* N *serait égal à la somme de deux carrés, et la proposition serait démontrée.* »

Sans doute, parce qu'il est facile de voir que si $N''=1$, les deux nombres $N-\alpha t-6u$ et $\alpha u-6t$ sont premiers entre eux.

« *Soit donc encore* $N''>1$, *alors en suivant la même marche, on déduirait du produit* NN″ *un nouveau produit* NN‴, *où l'on aurait* $N'''<\frac{1}{2}N''$, *et qui sera exprimé pareillement par la somme de deux carrés, etc.* »

Mais, pour suivre la MÊME MARCHE, il faudrait que les deux nombres

$$N-\alpha t-6u \quad \text{et} \quad \alpha u-6t$$

fussent premiers entre eux; et c'est ce qui ne résulte pas de la démonstration dont il s'agit.

Au reste, cette démonstration s'applique clairement

au cas où le diviseur N est premier; le principe étant établi pour ce cas particulier, on peut assez simplement faire voir qu'il est général, en décomposant le diviseur considéré N en ses facteurs premiers. (G.)