

A. LEMONNIER

**Démonstration directe de la formule
de Moivre, expressions de $\sin(a+b)$
et de $\cos(a+b)$**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 7
(1868), p. 284-285

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__284_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DIRECTE DE LA FORMULE DE MOIVRE ,
EXPRESSIONS DE $\sin(a + b)$ ET DE $\cos(a + b)$;

PAR M. A. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

On sait que, si les côtés d'une ligne brisée dans un plan sont les modules d'expressions imaginaires, et leurs angles de direction à l'égard d'une direction initiale les arguments de ces expressions, la somme des expressions a pour module la résultante de la ligne brisée, et pour argument son angle de direction.

Cela subsiste, quand on attribue à des côtés des modules négatifs, pourvu que les arguments se rapportent à des directions opposées à celles des côtés.

Soit considérée une ligne brisée de deux côtés dont les modules soient $\cos b$ et $\sin b$, et les arguments a et $a + \frac{\pi}{2}$; la résultante aura l'unité pour module et la somme $a + b$ pour argument.

Donc on aura

$$\begin{aligned}
 & \cos(a+b) + i \sin(a+b) \\
 &= \cos b (\cos a + i \sin a) + \sin b \left[\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= \cos b (\cos a + i \sin a) + \sin b (-\sin a + i \cos a) \\
 &= \cos b (\cos a + i \sin a) + i \sin b (\cos a + i \sin a) \\
 &= (\cos b + i \sin b) (\cos a + i \sin a).
 \end{aligned}$$

C'est la formule de Moivre.

On en déduit

$$\begin{aligned}
 & \cos(a+b) + i \sin(a+b) \\
 &= \cos b \cos a - \sin b \sin a + i(\cos b \sin a + \sin b \cos a).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\
 \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a.
 \end{aligned}$$