

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 7
(1868), p. 221-228

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__221_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 548

(voir t. XIX, p. 405);

PAR M. NEUBERG,

Professeur à l'Athénée royal d'Arlon (Belgique).

Une conique passant par trois points A_1, A_2, A_3 touche une droite B. Appelons $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les distances respectives de ces trois points à la droite B; ρ_1, ρ_2, ρ_3 leurs distances au foyer F, et a_1, a_2, a_3 leurs distances mutuelles. On a la relation

$$(1) \left\{ \begin{aligned} &\delta_1^2 [(\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2]^{\frac{1}{2}} + \delta_2^2 [(\rho_3 - \rho_1)^2 - a_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \delta_3^2 [(\rho_1 - \rho_2)^2 - a_3^2]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (*) \end{aligned} \right.$$

(Capitaine FAURE.)

Soient $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ les coordonnées des trois points A_1, A_2, A_3 rapportées à des axes rectangulaires quelconques passant par le foyer F. Désignons

(*) L'équation (1) présentait une faute d'impression que le défaut d'homogénéité faisait facilement découvrir.

par X_r, Y_r, Z_r les dérivées du déterminant

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \text{où } z_1 = z_2 = z_3 = 1,$$

prises par rapport aux éléments x_r, y_r, z_r , et posons (*)

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = xX_1 + yY_1 + zZ_1, \\ \alpha_2 = xX_2 + yY_2 + zZ_2, \\ \alpha_3 = xX_3 + yY_3 + zZ_3, \end{cases} \quad \text{où } z = 1.$$

Les équations des droites $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$ seront

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

et celle de B peut être supposée sous la forme

$$M_1 \alpha_1 + M_2 \alpha_2 + M_3 \alpha_3 = 0.$$

Comme le premier membre de cette dernière se réduit à $2M_1 S, 2M_2 S, 2M_3 S$ quand on y remplace les coordonnées courantes par celles des points A_1, A_2, A_3 , les coefficients M_1, M_2, M_3 sont proportionnels aux distances de ces points à la droite B, et l'équation de celle-ci peut aussi s'écrire

$$(3) \quad \delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 = 0.$$

Une conique circonscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$ peut être représentée par

$$(4) \quad N_1 \alpha_2 \alpha_3 + N_2 \alpha_3 \alpha_1 + N_3 \alpha_1 \alpha_2 = 0,$$

(*) Les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ représentent, au signe près, les doubles des surfaces des triangles $MA_2 A_3, MA_3 A_1, MA_1 A_2$, où M est suppose un point variable $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$. Elles constituent un système de coordonnées trilatères qui est très-utile dans une foule de questions, parce qu'on en peut passer facilement aux coordonnées cartésiennes, et *vice versa*. Aux sommets du triangle de référence, deux de ces coordonnées sont nulles et la troisième est égale à $2S$.

et la condition (*) de toucher B sera

$$\Sigma N_1^2 \delta_1^2 - 2 \Sigma N_1 N_2 \delta_1 \delta_2 = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(5) \quad \sqrt{N_1 \delta_1} + \sqrt{N_2 \delta_2} + \sqrt{N_3 \delta_3} = 0.$$

Nous déterminerons les paramètres N_1, N_2, N_3 en identifiant l'équation (4) avec l'équation focale

$$x^2 + y^2 = (mx + ny + hz)^2.$$

Pour cela, on peut tirer x, y, z des équations (2), ce qui donne

$$x = \frac{\Sigma \alpha_i x_i}{2S}, \quad y = \frac{\Sigma \alpha_i y_i}{2S}, \quad z = \frac{\Sigma \alpha_i z_i}{2S},$$

et l'équation focale peut prendre la forme

$$(6) \quad \Sigma^2 \alpha_i x_i + \Sigma^2 \alpha_i y_i = \Sigma^2 \alpha_i (mx_i + ny_i + hz_i),$$

ou

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha_i^2 [x_i^2 + y_i^2 - (mx_i + ny_i + hz_i)^2] \\ + 2 \Sigma \alpha_i \alpha_j [x_i x_j + y_i y_j - (mx_i + ny_i + hz_i)(mx_j + ny_j + hz_j)] = 0. \end{aligned}$$

On en conclut

$$(7) \quad 0 = x_1^2 + y_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2, \dots,$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = 2(x_2 x_3 + y_2 y_3) \\ \quad - 2(mx_2 + ny_2 + hz_2)(mx_3 + ny_3 + hz_3), \dots, \end{array} \right.$$

Les équations (7) donnent

$$mx_1 + ny_1 + hz_1 = \rho_1, \dots,$$

et comme l'on a aussi

$$\alpha_i^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2(x_2 x_3 + y_2 y_3), \dots,$$

(*) Cette condition peut s'obtenir en éliminant, par exemple, α_3 entre les équations (3) et (4) et en exprimant que le premier membre de la résultante est un carré parfait en α_1 et α_2 .

ou

$$2(x_2 x_3 + y_2 y_3) = \rho_2^2 + \rho_3^2 - a_1^2, \dots,$$

on trouve pour les valeurs de N

$$N_1 = (\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2, \dots,$$

et par suite l'équation (5) devient (*)

$$\Sigma \sqrt{\delta_1 [(\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2]} = 0.$$

C. Q. F. D.

En supposant la conique conjuguée au triangle $A_1 A_2 A_3$, les équations (4), (5), (7) et (8) seront remplacées par les suivantes :

$$(4') \quad P_1 \alpha_1^2 + P_2 \alpha_2^2 + P_3 \alpha_3^2 = 0,$$

$$(5') \quad \frac{\delta_1^2}{P_1} + \frac{\delta_2^2}{P_2} + \frac{\delta_3^2}{P_3} = 0,$$

$$(7') \quad P_1 = \rho_1^2 - (mx_1 + ny_1 + hz_1)^2, \dots,$$

$$(8') \quad 0 = \rho_{12} - (mx_1 + ny_1 + hz_1)(mx_2 + ny_2 + hz_2),$$

où l'on a posé $\rho_{12} = x_1 x_2 + y_1 y_2, \dots$

En résolvant les équations (8') par rapport aux trinômes $mx_1 + ny_1 + hz_1, \dots$, et en portant les valeurs obtenues dans les égalités (7'), on aura

$$P_1 = \rho_1^2 - \frac{\rho_{12} \rho_{13}}{\rho_{23}}, \dots$$

La règle de multiplication des déterminants fait voir que

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\rho_{23}} \begin{vmatrix} x_1 x_1 + y_1 y_1 & x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ x_2 x_1 + y_2 y_1 & x_2 x_3 + y_2 y_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho_{23}} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

(*) On sait qu'il existe quatre coniques passant par trois points donnés et ayant un foyer donné. Ici ces coniques sont caractérisées par les signes qu'il faut attribuer aux quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3 . Il faut supposer ces trois quantités positives, ou deux positives et la troisième négative.

ou

$$P_1 = - \frac{Z_2 Z_3}{\rho_{23}}, \dots$$

Par suite, l'équation (5') donne

$$(1') \quad \Sigma \delta_1^2 Z_1 \rho_{23} = 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma \delta_1^2 Z_1 (\rho_2^2 + \rho_3^2 - a_1^2) = 0.$$

En remarquant que les triangles $A_2 F A_3, \dots$, donnent

$$a_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - 2\rho_2\rho_3 \cos(\widehat{\rho_2, \rho_3}), \dots,$$

$$Z_1 = 2 \text{ fois surface } A_2 F A_3 = \rho_2\rho_3 \sin(\widehat{\rho_2, \rho_3}), \dots$$

la relation (1') peut aussi se mettre sous la forme

$$\Sigma \frac{\delta_1^2}{\rho_1^2} \sin 2(\widehat{\rho_2, \rho_3}) = 0.$$

Les équations (4) et (4'), où l'on remplace N et P par leurs valeurs, donnent aussi lieu aux propositions suivantes :

Une conique circonscrite ou conjuguée à un triangle $A_1 A_2 A_3$ passe par un point A. Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les doubles des aires des triangles $A A_2 A_3, A A_3 A_1, A A_1 A_2$; ρ_1, ρ_2, ρ_3 les distances des points A_1, A_2, A_3 au foyer F, et a_1, a_2, a_3 les côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$. On a les relations

$$\frac{(\rho_2 - \rho_3)^2 - a_1^2}{\alpha_1} + \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2 - a_2^2}{\alpha_2} + \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2 - a_3^2}{\alpha_3} = 0,$$

$$\frac{\rho_1^2 \alpha_1^2}{\sin 2(\widehat{\rho_2, \rho_3})} + \frac{\rho_2^2 \alpha_2^2}{\sin 2(\widehat{\rho_3, \rho_1})} + \frac{\rho_3^2 \alpha_3^2}{\sin 2(\widehat{\rho_1, \rho_2})} = 0.$$

Supposons enfin la conique inscrite au triangle

$A_1 A_2 A_3$. On peut la représenter par l'équation

$$(4'') \quad \begin{cases} K_1^2 \alpha_1^2 + K_2^2 \alpha_2^2 + K_3^2 \alpha_3^2 \\ - 2K_1 K_2 \alpha_1 \alpha_2 - K_1 K_3 \alpha_1 \alpha_3 - 2K_2 K_3 \alpha_2 \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

ou, plus simplement, par

$$\sqrt{K_1 \alpha_1} + \sqrt{K_2 \alpha_2} + \sqrt{K_3 \alpha_3} = 0,$$

et la condition de toucher la droite $\delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2 + \delta_3 \alpha_3 = 0$ est

$$(5'') \quad \frac{K_1}{\delta_1} + \frac{K_2}{\delta_2} + \frac{K_3}{\delta_3} = 0.$$

Les coefficients K_1, K_2, K_3 pourraient encore s'obtenir en identifiant les équations (4'') et (6). Mais on les détermine plus facilement en exprimant que la conique (4'') touche les droites imaginaires menées par le foyer

$$x \pm y \sqrt{-1} = 0.$$

Comme cette dernière équation, par la substitution

$$x = \frac{\Sigma \alpha_1 x_1}{2S}, \quad y = \frac{\Sigma \alpha_1 y_1}{2S}, \text{ devient}$$

$$\Sigma \alpha_1 (x_1 \pm y_1 \sqrt{-1}) = 0,$$

il suffira de remplacer dans l'équation (5'') $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ par $x_1 \pm y_1 \sqrt{-1}, x_2 \pm y_2 \sqrt{-1}, x_3 \pm y_3 \sqrt{-1}$. En chassant les dénominateurs et en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on aura

$$\Sigma K_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3) = 0, \quad \Sigma K_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2) = 0.$$

Par conséquent K_1, K_2, K_3 sont proportionnels aux mineurs du système d'éléments

$$\begin{vmatrix} x_2 x_3 - y_2 y_3 & x_3 x_1 - y_3 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_2 y_3 + x_3 y_2 & x_3 y_1 + x_1 y_3 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{vmatrix};$$

mais

$$\begin{vmatrix} x_3 x_1 - y_3 y_1 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ = -\rho_1^2 Z_1, \text{ etc..}$$

on peut donc écrire

$$A_1 = \rho_1^2 Z_1 = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \times \rho_1 \sin(\widehat{\rho_2, \rho_3}), \quad A_2 = \dots,$$

et les relations entre le foyer d'une conique inscrite au triangle $A_1 A_2 A_3$ et un point ou une tangente quelconques de cette courbe seront

$$\Sigma \sqrt{\rho_1^2 Z_1} \alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{\rho_1^2 Z_1}{\delta_1} = 0$$

ou

$$\Sigma \sqrt{\rho_1 \alpha_1 \sin(\widehat{\rho_2, \rho_3})} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma \frac{\rho_1 \sin(\widehat{\rho_2, \rho_3})}{\delta_1} = 0.$$

Question 811

(voir 2^e série, t. VI, p. 210);

PAR M. E. PELLET,

Élève du lycée de Nîmes.

Nommons S un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de $(1-x)^i$, où l'exposant i est négatif, ou bien un groupe quelconque de termes consécutifs à coefficients positifs dans le développement de $(1+x)^i$, où i est positif; écrivons S sous la forme $x^k \sum$, $\sum$ sera ou une quantité qui ne change jamais son signe quel que soit x , ou une telle quantité multipliée par un binôme du premier degré.

La même proposition aura lieu pour un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de l'exponentielle e^x .

(SYLVESTER.)

Considérons le développement de $(1-x)^i$, où i est égal à $-j$, j étant positif :

$$1 + jx + \frac{j(j+1)}{1.2} x^2 + \frac{j(j+1)(j+2)}{1.2.3} x^3 + \dots$$

Et soit :

$$S = \frac{j(j+1)(j+2)\dots(j+k-1)}{1.2.3\dots(k-1)k} x^k + \dots$$

$$+ \frac{j(j+1)(j+2)\dots(j+k+n-1)}{1.2.3\dots(k+n)} x^{k+n}.$$

L'équation $S = 0$, a k racines nulles, et n différentes de 0. Il s'agit de démontrer que parmi ces n dernières, il y en a au plus une réelle. La $k^{\text{ième}}$ dérivée de S est

$$j(j+1)\dots(j+k-1) \left[1 + \frac{j+k}{1} x + \frac{(j+k)(j+k+1)}{1.2} x^2 + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{(j+k)(j+k+1)\dots(j+k+n-1)}{1.2.3\dots(n-1)n} x^n \right].$$

Cette dérivée égale à 0, a n ou $(n-1)$ racines imaginaires suivant que n est pair ou impair (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. V, p. 520). Une équation a autant de racines imaginaires qu'une quelconque de ses dérivées ; par conséquent, parmi les n racines de $S = 0$, différentes de 0, il y en a au plus une qui soit réelle.

C. Q. F. D.

Par un raisonnement identique on voit que la même proposition s'applique au développement de e^x , et à celui de $(1+x)^i$, arrêté au premier terme à coefficient négatif.

Note. — M. Ledoux, élève du lycée de Douai, a résolu la même question à peu près de la même manière.