NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Note sur un problème d'analyse indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6 (1867), p. 63-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__63_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

PAR M. E. CATALAN.

Extrait des *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei.*

PROBLÈME. — *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré* (*).

I.

A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

on a

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+y-1)^3 = \frac{y}{8}(2x+y-1)\left[4x^2 + 4(y-1)x + 2y(y-1)\right];$$

ou, en représentant par s la somme des y cubes, et en posant

$$2x + y - 1 = z, \tag{1}$$

$$16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1). \tag{2}$$

(*) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi (*Note sur quelques sommations de cubes*). Bien que ce savant géomètre y donne les solutions *rationnelles* de l'équation *générale*

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions *entières* de l'équation *particulière*

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+n-1)^3 = y^2.$$

D'après l'égalité (1), y et z sont de *parités différentes*. Par suite, $2yz$ et y^2+z^2-1 sont divisibles par 4. Donc s sera un carré si le second membre de l'équation (2) est un carré.

Soient

(3) $2yz=\alpha,\quad y^2+z^2+1=\beta,\quad y+z=\lambda,\quad z-y=\mu,\quad s=t^2,$

nous aurons

(4) $\alpha\beta=16t^2,\quad \alpha+\beta+1=\lambda^2,\quad \beta-\alpha+1=\mu^2.$

Ainsi la question se réduit à *trouver deux multiples de* 4, α, β, *tels, que* $\alpha\beta$, $\alpha+\beta+1$, $\beta-\alpha+1$ *soient des carrés.*

II.

L'élimination de β, entre la première et la troisième des équations (4), conduit à

(5) $$64t^2+(\mu^2-1)^2=(2\alpha+\mu^2-1)^2.$$

Les solutions entières de cette équation sont données par les deux systèmes de formules

(6) $2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2,\quad \mu^2-1=u^2-v^2,\quad 4t=uv,$

(6′) $2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2,\quad \mu^2-1=2uv,\quad 8t=u^2-v^2;$

d'où l'on tire, soit

(7) $$\alpha=v^2,\quad \beta^2=u^2,$$

soit

(7′) $$2\alpha=(u-v)^2,\quad 2\beta=(u+v)^2.$$

Ainsi, α, β *ou leurs doubles sont des carrés.*

III.

Les équations (7) équivalent à

(8) $$2yz=v^2,\quad y^2+z^2-1=u^2.$$

Soit $y = \frac{p}{q} z$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible; on déduit de là

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma, \tag{9}$$

γ étant un nombre entier. De plus, y et z étant de *parités différentes*, il en est de même pour p et q; en outre, γ *est impair*. Enfin, à cause de $2yz = v^2$, $2pq$ *est un carré;* ce qui prouve que *des deux nombres* p, q, *l'un est un carré et l'autre le double d'un carré.*

Au moyen des valeurs (9), la seconde équation (8) devient

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - u^2 = 1. \tag{10}$$

Dans chaque cas particulier, l'équation (10) fera connaître les valeurs de γ et de u. On aura ensuite

$$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = 2pq\,\frac{\gamma^2 u^2}{16}. \tag{11}$$

IV.

Si l'on répète sur les formules (7′) des calculs analogues aux précédents, on trouve

$$4yz = (u - v)^2, \quad 2(\gamma^2 + z^2 - 1) = (u + v)^2 = 4u'^2, \tag{8′}$$

$$y = p\gamma, \quad z = q\gamma, \tag{9′}$$

$$(p^2 + q^2)\gamma^2 - 2u'^2 = 1, \tag{10′}$$

$$y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = pq\,\frac{\gamma^2 u'^2}{4}; \tag{11′}$$

cette fois, p *et* q *sont des carrés, l'un pair, l'autre impair* (*).

(*) Il ne m'a pas été possible de trouver une solution de l'équation (10′). Pourrait-on démontrer qu'elle n'en admet aucune?

V. — Applications.

1° $p = 8$, $q = 9$. L'équation (10) devient

$$145\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Elle est vérifiée par $\gamma = 1$, $u = 12$; d'où $x = 1$. En laissant de côté cette solution connue, on en trouve une infinité au moyen de la relation

$$u + \gamma\sqrt{145} = (12 + \sqrt{145})^{2n+1}.$$

Par exemple, $n = 1$ donne

$$u = 6948, \quad \gamma = 577;$$

puis

$$y = 4616, \quad x = 289, \quad s = (3.577.6948)^2.$$

Ainsi

$$289^3 + 290^3 + \ldots + 4904^3 = (3.577.6948)^2.$$

2° $p = 2$, $q = 25$. L'équation (10) est

$$629\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Les valeurs les plus simples sont

$$\gamma = 313, \quad u = 7850 \ (*);$$

d'où

$$y = 626, \quad x = 3600, \quad s = (5.313.3925)^2.$$

On a donc

$$3600^3 + 3601^3 + \ldots + 4225^3 = (5.313.3925)^2$$

3° Si dans la relation

$$u + \gamma\sqrt{629} = (7850 + 313\sqrt{629})^{2n+1},$$

(*) La Table X de Legendre (*Théorie des nombres*, t. I^er^) renferme une faute typographique : au lieu de 1850, on doit lire 7850.

on suppose $n = 1$, on trouve

$$u = 7850^3 + 3.7850.313^2.629 = 7850\,(7850^2 + 3.313^2.629),$$
$$\gamma = 3.7850^2.313 + 313^3.629 = 313\,(3.7850^2 + 313^2.629).$$

Or

$$7850^2 = 61622500, \quad 313^2 = 97969,$$
$$3.313^2.629 = 184867503, \quad 313^2.629 = 61622501;$$

donc

$$u = 7850\,(61622500 + 184867503) = 7850.246490003$$
$$= 1934946523550,$$
$$\gamma = 313\,(184867500 + 61622501) = 313.246490001$$
$$= 7715137030313.$$

Si ces valeurs sont exactes, on doit avoir

$$629.7715137030313^2 - 1934946523550^2 = 1.$$

En effet,

$$7715137030313^2 = 59523319411736577717969,$$
$$629.7715137030313^2 = 3744018048998230704602501,$$
$$1934946523550^2 = 3744018048998230704602500,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Des valeurs précédentes de γ et de u, on tire

$$y = 2\gamma = 15430274062 6, \quad x = \frac{23\gamma + 1}{2} = 887240758600,$$
$$x + y - 1 = 10415434992 25;$$
$$s = \left(\frac{u\gamma}{2}\right)^2 = (96747326177 5.7715137030313)^2.$$

Ainsi

$$887240758600^3 + 887240758601^3 + \ldots + 10415434992 25^3$$
$$= (96747326177 5.7715137030313)^2.$$