E. STOULS

Solution d'une question proposée au concours d'admission de l'École polytechnique (année 1864) [composition mathématique]

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3 (1864), p. 446-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__446_1>

SOLUTION D'UNE QUESTION

proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique (année 1864) [Composition mathématique];

PAR M. E. STOULS,

Élève en Mathématiques spéciales, à Metz (école Saint-Clément).

ÉNONCÉ. — *On donne le cercle représenté par l'équation*

$$x^2 + y^2 = 1,$$

et la parabole représentée par l'équation

$$\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2 + 2\alpha x + 2\beta y = \frac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2},$$

où α *et* β *sont des paramètres positifs quelconques.*

On propose de déterminer : 1° *le nombre des points réels communs aux deux courbes pour les différentes valeurs de* α *et de* β ; 2° *les coordonnées des quatre points communs lorsque* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, *lorsque* $\alpha = 1$ *avec* $\beta > 0$, *lorsque* $\beta = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)}$ (*).

Solution. — Cherchons le système de sécantes communes aux deux courbes. Leur équation est de la forme

$$(1) \qquad \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \ldots + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

λ étant donné par l'équation

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2\lambda^3 + [3\alpha^2 + \beta^2 - 1 + \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2]\lambda^2 \\ \qquad + (\alpha^2 + \beta^2)(4\alpha^2 + \beta^2 - 1)\lambda + \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

On trouve que l'une des racines de l'équation (2) est

$$\lambda = -(\alpha^2 + \beta^2).$$

L'un des systèmes cherchés est donc

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 - 2\alpha x - 2\beta y \\ \qquad + \dfrac{3\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2} - (\alpha^2 + \beta^2) = 0. \end{array} \right.$$

(*) En posant

$$x = \frac{\alpha X - 6 Y}{\sqrt{\alpha^2 + 6^2}}, \quad y = \frac{\alpha Y + 6 X}{\sqrt{\alpha^2 + 6^2}},$$

les équations proposées deviennent

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad (\alpha^2 + 6^2) Y^2 + 2\sqrt{\alpha^2 + 6^2}\, X = \frac{3\alpha^2 + 6^2 - 1}{\alpha^2},$$

et les solutions communes s'obtiennent facilement. G

DISCUSSION.

Première partie : $\beta > 0$.

Dans ce cas, l'équation (3) nous donne

$$y = -\frac{\alpha x - 1}{\beta} \pm \frac{k}{\alpha\beta},$$

en posant, pour abréger,

$$k = \sqrt{(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + \beta^2 - 1)}. \tag{4}$$

Les deux droites obtenues sont parallèles entre elles, et même perpendiculaires à l'axe de la parabole.

Trois cas peuvent maintenant se présenter : $\alpha^2 - 1 \gtreqless 0$.

Premier cas : $\alpha^2 - 1 > 0$. — Dans ce cas, $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ est aussi > 0 ; donc k est toujours *réel et différent de* 0 ; donc les deux sécantes obtenues sont *réelles* et *distinctes*. A cause de cette réalité, on pourra trouver le nombre des points de rencontre, en cherchant si la distance de chacune de ces droites au centre du cercle est plus grande ou plus petite que le rayon. Pour qu'il y ait rencontre, il faut que l'on ait

$$\frac{\left(\frac{1}{\beta} \pm \frac{k}{\alpha\beta}\right)^2}{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} < 1,$$

ou

$$\alpha^2 + k^2 \pm 2\alpha k < \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2),$$

ou

$$\pm 2\alpha k < \alpha^2 + \beta^2 - 1. \tag{5}$$

Comme α est positif, $-2\alpha k$ est négatif. L'inégalité (5) est toujours vérifiée pour le signe $-$: donc la sécante correspondant au signe $-$ rencontre toujours les courbes en deux points réels et distincts. Donc, dans le cas actuel, *les deux courbes ont au moins deux intersections réelles et distinctes.*

Cherchons ce que donne la deuxième sécante.

L'inégalité $2\alpha k < \alpha^2 + \beta^2 - 1$ ayant ses deux termes positifs, je puis la remplacer par

$$4\alpha^2 k^2 < (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2;$$

et comme le facteur $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ est positif, on peut le supprimer des deux côtés. Il vient alors

$$(6) \qquad \beta^2 > (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1).$$

1° Si cette inégalité est vérifiée, il y *deux nouveaux points réels.*

2° Si on a, au contraire, $\beta^2 < (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)$, la seconde sécante ne donne rien.

3° Si on a $\beta^2 = (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1)$, la seconde droite est tangente.

Dans ce dernier cas, les abscisses d'intersection des deux lignes sont données par l'équation

$$[4\alpha^2(\alpha^2 - 1) + 1]x^2 - 2\alpha[1 \pm 2(\alpha^2 - 1)]x$$
$$+ (\alpha^2 - 1)(-3 \pm 4) + 1 = 0.$$

L'équation obtenue en choisissant le signe + correspond à la droite qui est tangente. Ses racines sont égales et ont pour valeur

$$x = \frac{\alpha}{2\alpha^2 - 1}.$$

Second cas : $\alpha^2 - 1 = 0$. — On voit qu'alors $k = 0$; les deux sécantes se confondent en une seule qui rencontre les deux courbes. En effet, l'inégalité (5) se réduisant à $\beta^2 > 0$ est vérifiée d'elle-même. De plus, chacun des points de rencontre étant un point double, la parabole est doublement tangente au cercle. La sécante trouvée est la corde des contacts, et les coordonnées des points de contact sont

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \\ y = \dfrac{2\beta}{\beta^2 + 1}. \end{cases}$$

Troisième cas : $\alpha^2 - 1 < 0$. — Ce cas se partage lui-même en trois autres.

1° $$\alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0.$$

Alors *il n'y a pas d'intersections réelles*.

Car on ne peut faire que les trois hypothèses suivantes : 1° les trois racines de l'équation en λ sont réelles et à chacune correspond un système de sécantes réelles ; 2° les trois racines étant réelles, une seule d'entre elles donne des sécantes réelles ; 3° une seule racine est réelle [ici cette racine serait $-(\alpha^2 + \beta^2)$]. Or, la première hypothèse doit être rejetée ; car pour

$$\alpha^2 - 1 < 0 \quad \text{et} \quad \alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0,$$

k est imaginaire ; donc l'un au moins des systèmes de sécantes n'est pas réel. La dernière hypothèse est de même inadmissible, car dans ce cas la racine réelle donnerait des sécantes imaginaires, ce qui est impossible puisque les trois systèmes seraient alors imaginaires. Donc, la seconde hypothèse subsiste seule. Mais on sait que dans ce cas les *quatre points d'intersection sont imaginaires*.

Donc, il n'y a pas d'intersections réelles.

2° $$\alpha^2 + \beta^2 - 1 < 0.$$

k est toujours *réel* et *différent de* o ; donc les deux sécantes obtenues sont *réelles* et *distinctes*. Ce cas doit être traité comme l'un des précédents. La considération de l'inégalité (5) montre que la sécante correspondant au signe + ne donne aucun point réel. Donc, dans ce cas, *les deux courbes ont au moins deux intersections imaginaires.*

Cherchons ce que donne la seconde sécante.

Les deux membres de l'inégalité

$$-2\alpha k < \alpha^2 + \beta^2 - 1$$

étant négatifs, je puis les élever au carré après avoir changé le sens de l'inégalité. Il faut donc vérifier la condition

$$4\alpha^2 k^2 > (\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2;$$

et comme le facteur $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ est négatif, je puis le supprimer des deux côtés en changeant de nouveau le sens de l'inégalité. Cette condition devient alors, comme ci-dessus,

$$\beta^2 > (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1).$$

La considération de cette inégalité montrerait comme précédemment qu'il peut y avoir deux points réels, distincts ou non, ou deux points imaginaires.

3°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

$k = 0$; les deux sécantes se confondent en une droite unique qui est tangente aux deux courbes au point $\dfrac{x = \alpha}{y = \beta}$. Ce point de rencontre étant un point quadruple, *le contact des deux courbes est du troisième ordre.*

Deuxième partie : $\beta = 0$.

L'équation (3), qui donne un des systèmes de sécantes communes, se réduit à

$$\alpha^4 x^2 - 2\alpha^3 x - \alpha^4 + 3\alpha^2 - 1 = 0.$$

α étant supposé différent de o, cette équation donne

$$x = \frac{\alpha \pm (\alpha^2 - 1)}{\alpha^2}.$$

Donc, les deux sécantes sont *réelles, distinctes, parallèles entre elles* et *perpendiculaires à l'axe de la parabole.*

En raisonnant comme plus haut, on voit que pour que les intersections soient réelles, il faut que l'on ait

$$\frac{\alpha \pm (\alpha^2 - 1)}{\alpha^2} < 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha - 1 < 0 \quad \text{ou} \quad 2\alpha^2 - \alpha - 1 > 0.$$

La dernière inégalité peut s'écrire

$$2(\alpha - 1)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Supposons maintenant $\alpha \gtrless 1$, les deux inégalités ne seront jamais vérifiées simultanément. Donc, *deux points réels seulement.* Si $\alpha = 1$, les sécantes se confondent en une droite unique $x = 1$, tangente aux deux courbes. Ces deux courbes ont un contact du troisième ordre au point

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Remarque. — Dans le cas de $\beta > 0$, nous avons supposé α différent de o. On pourrait cependant faire $\alpha = 0$ à condition de supposer *auparavant* que $\beta^2 - 1$ est de la forme $C\alpha^2$, C étant une constante quelconque. Nous n'étudions pas ce cas, qui est assez simple mais ne donne aucun résultat intéressant.

Dans le cas de $\beta = 0$, on ne peut en aucune façon supposer $\alpha = 0$.

RÉSUMÉ DE LA DISCUSSION.

Première partie : $\beta > 0$.

Premier cas : $\alpha^2 - 1 > 0$.

Il y a AU MOINS *deux intersections réelles et distinctes.*

Suivant qu'on a

$$\beta^2 \gtreqless (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1),$$

les deux autres points de rencontre sont réels et distincts, ou réels et confondus, ou imaginaires.

Deuxième cas : $\alpha^2 - 1 = 0$.

Il y a quatre points réels se confondant deux à deux.

La parabole est doublement tangente au cercle.

Troisième cas : $\alpha^2 - 1 < 0$.

1°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0.$$

Quatre points imaginaires.

2°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 < 0.$$

AU MOINS *deux intersections imaginaires.*

Suivant qu'on a

$$\beta^2 \gtreqless (\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 1),$$

les deux autres points de rencontre sont réels et distincts, ou réels et confondus, ou imaginaires.

3°
$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0.$$

Quatre points réels se confondant en un seul.

Il y a contact du troisième ordre entre les courbes.

Seconde partie : $\beta = 0$.

Premier cas : $\alpha \gtrless 1$.

Deux points réels et distincts, deux imaginaires.

Deuxième cas : $\alpha = 1$.

Contact du troisième ordre.