NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. SACCHI

Note sur les roulettes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e *série*, tome 2 (1863), p. 172-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__172_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

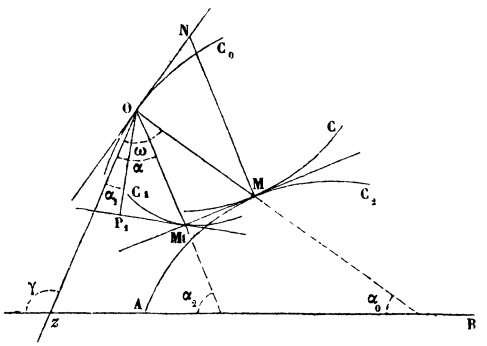
NOTE SUR LES ROULETTES;

PAR M. J. SACCHI,
Professeur au lycée de Porte-Neuve (Milan).

1. Soient : CM une courbe qui roule sans glisser sur la convexité d'une autre courbe C_2M, en transportant dans son mouvement le point O et l'axe Oz invariablement liés à la courbe C;

C_0O la roulette engendrée par le point O; et C_1M_1 la podaire de la courbe C, (lieu géométrique des projections orthogonales du point O sur les diverses tangentes à la courbe C);

OM_1, MN des perpendiculaires à la tangente commune aux courbes C, C_2 au point M;



ON une tangente à la roulette C_0; et OP_1 une perpendiculaire à la tangente P_1M_1 à la courbe podaire C_1;

BA z un axe fixe.

Que l'on nomme :

$$OM = r,\ OM_1 = p,\ OP_1 = p_1,\ MN = N;$$

s, s_0, s_1, s_2 les arcs correspondants des courbes C, C_0, C_1, C_2, ayant respectivement leurs extrémités variables aux points M, O, M_1, M;

R, R_0, R_1, R_2 les rayons de courbure de C, C_0, C_1, C_2 aux points M, O, M_1, M;

ρ, ρ_0, ρ_1 les rayons de courbure des développées de C, C_0, C_1 aux points correspondants à M, O, M_1;

ω, α, α_1 les angles que les droites r, p, p_1 forment avec O z;

γ, α_0, α_2 les angles que les droites O z, r, p forment avec l'axe BA z.

On suppose que tous ces angles soient évalués de manière qu'ils croissent avec les arcs des courbes auxquelles ils se rapportent.

2. Dans un mouvement *très-petit*, pendant lequel un élément de la courbe C vient en contact avec un élément égal de la courbe C_2, *base* de la roulette, le point O décrira autour du point M un petit arc circulaire OO_1, ayant le rayon r; l'angle MOz prendra une nouvelle position MO_1z_1, et l'angle OMO_1 sera égal à l'angle des côtés Oz, O_1z_1, c'est-à-dire égal à $(\gamma+\mu)-\gamma$, en désignant par μ l'accroissement très-petit de γ. Donc, la droite r sera normale à la roulette en O; de plus, on aura $\frac{OO_1}{\mu}=r$, et, en passant à la limite, $\frac{ds_0}{d\gamma}=r$. En désignant au moyen d'un accent les dérivées par rapport à une variable quelconque, on a :

$$s'_0 = r\gamma', \tag{1}$$

relation très-simple, et fondamentale dans la théorie des roulettes.

3. En prenant les dérivées des équations évidentes :

$$\alpha_0 = \gamma - \omega, \quad \alpha_2 = \gamma - \alpha;$$

substituant, dans ces dérivées, à γ' sa valeur donnée par l'équation (1); et observant, de plus, que par la nature du mouvement $s_2 = s$, et qu'en général

$$\alpha'_n = \pm\frac{s'_n}{R_n}, \quad \omega' = \pm\frac{s'}{N}, \tag{2}$$

formules dans lesquelles on prend le signe supérieur si l'arc croît avec l'angle, et le signe inférieur dans le cas contraire, on aura :

$$\frac{s'_0}{s'} = \frac{1}{N\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_0}\right)}, \quad \frac{s'_0}{s'} = r\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{3}$$

d'où

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{N} = \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_0}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right). \tag{4}$$

De cette dernière équation on tire

$$R_0 = \frac{rN}{N-L}, \quad \text{en posant} \quad \frac{RR_2}{R+R_2} = L.$$

Au moyen de ces relations on peut facilement construire L, et par suite R_0.

Si, dans la première des équations (3), on remplace $\frac{1}{N}$ par sa valeur $\frac{\omega'}{s'}$, on obtient :

$$\frac{d\omega}{ds_0} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R_0},$$

relation due à M. Catalan (*Nouv. Ann.*, t. XV, p. 102).

4. On sait que pour la courbe podaire on a les équations

$$s'_1 = r\alpha' = r\frac{s'}{R}, \tag{5}$$

et que les deux angles que les droites r et p_1 forment avec p sont égaux ; par conséquent :

$$\omega - \alpha = \alpha - \alpha_1, \quad \text{ou bien} \quad \alpha_2 - \alpha_0 = \alpha - \alpha_1.$$

En prenant la dérivée de cette dernière équation, et de l'équation $\alpha_2 = \gamma - \alpha$, eu égard aux relations (1), (2), (5) et à $s_2 = s$, on obtient

$$s'_0 = s'_1\left(\frac{R}{rR_2} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r}\right)R_0,$$

et

$$s'_0 = s'_1\left(1 + \frac{R}{R_2}\right). \tag{6}$$

De ces relations on déduit :

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} - \frac{1}{r} = \frac{R}{R_2}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}\right), \tag{7}$$

égalité remarquable, qui, avec l'équation (4), fournit la relation suivante, entre les rayons de courbure des quatre courbes C, C_0 C_1, C_2, et la normale N de la première :

$$(8) \qquad N(2R_1 - R_0) = R\left(R_1 - R_0\frac{R_2}{R+R_2}\right).$$

5. En supposant que la base C_2 soit une droite, on aura $\frac{1}{R_2} = 0$, et les équations (6), (7), (4), (8) donnent

$$(9) \qquad s'_0 = s'_1, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0},$$

$$(10) \qquad R_0 = \frac{rN}{N-R}, \quad R_1 = R_0\frac{N-R}{2N-R}.$$

La première de ces relations est due à M. Steiner (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 342), et la seconde donne le théorème suivant :

Le rayon vecteur réciproque d'une courbe plane est égal à la différence des rayons réciproques de courbure de la podaire et de la roulette de la même courbe, la podaire étant déterminée par rapport au point origine *des rayons vecteurs, et la roulette étant à base rectiligne et engendrée par le même point.*

Substituant dans la première des équations (10) les valeurs connues

$$(11) \qquad N = \frac{r^2}{p}, \quad R = \frac{rr'}{p'},$$

on a

$$p' = \left(\frac{p}{r}\right)' R_0,$$

équation qui donne

$$(12) \qquad \frac{dp}{d\alpha_0} = R_0\cos\alpha_0, \quad \text{en ayant} \quad p = r.\sin\alpha_0.$$

Posant $\sqrt{r^2 - p^2} = q$, et désignant par un accent la dérivée relative à α, on sait que

$$p' = q, \quad rr' = q\mathrm{R}. \tag{13}$$

Et, des équations (2), (9), (5), on tire les suivantes :

$$\alpha'_0 = \frac{r}{\mathrm{R}_0}, \quad \alpha'_1 = \frac{r}{\mathrm{R}_1},$$

lesquelles, au moyen de la formule connue $\mathrm{R}'_n = \rho_n \cdot \alpha'_n$, donnent

$$\mathrm{R}'_0 = \rho_0 \frac{r}{\mathrm{R}_0}, \quad \mathrm{R}'_1 = \rho_1 \frac{r}{\mathrm{R}_1}, \quad \mathrm{R}' = \rho. \tag{14}$$

Maintenant, des équations (10), (11), on déduit

$$\mathrm{R}_0 (r^2 - p\mathrm{R}) = r^3, \quad \mathrm{R}_1 (2r^2 - p\mathrm{R}) = r^3;$$

et, en prenant les dérivées par rapport à α, et en ayant égard aux relations (13), (14), on obtient

$$r^4 \rho_0 - p\rho \mathrm{R}_0^3 - q\mathrm{R}\mathrm{R}_0^2 (3r - \mathrm{R}_0) = 0,$$
$$r^4 \rho_1 - p\rho \mathrm{R}_1^3 - 3q\mathrm{R}\mathrm{R}_1^2 (r - \mathrm{R}_1) = 0.$$

Éliminant p, q, r des quatre dernières équations et de l'équation $q^2 = r^2 - p^2$, on a les deux relations suivantes entre les rayons de courbure des trois courbes C, C_0, C_1, et de leurs développées :

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_0}{\mathrm{R}_0^3} \cdot \dfrac{3}{\mathrm{R}_0} + \dfrac{\rho_1}{\mathrm{R}_1^3}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{4}{\mathrm{R}_0}\right) - \dfrac{\rho}{\mathrm{R}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{2}{\mathrm{R}_0}\right)\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 = 0, \\ \left(\dfrac{\rho_0}{\mathrm{R}_0^3} - \dfrac{\rho_1}{\mathrm{R}_1^3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{2}{\mathrm{R}_0}\right)^2\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^2 - \mathrm{R}^2\left(\dfrac{1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{1}{\mathrm{R}_0}\right)^6 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Soit $a^m p = r^{m+1}$ l'équation de la courbe mobile; cette équation représente une des lignes suivantes : *circonférence, droite, lemniscate de Bernoulli, hyperbole équilatère, cardioïde, parabole, caustique par réflexion* de la

parabole, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe*, etc.; selon que l'on donne à m les valeurs :

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \text{etc.}$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XIX, *Bulletin*, p. 39.)

On aura, d'après les équations (10), (11),

$$R = \frac{N}{m+1}, \quad R_0 = \frac{m+1}{m} r, \quad R_1 = \frac{m}{2m+1} R_0;$$

et par conséquent, en ayant égard aux équations (14),

$$\rho_1 = \left(\frac{m}{2m+1}\right)^2 \rho_0;$$

les deux premières donnent une règle facile pour construire les rayons R et R_0; et en plaçant les deux dernières valeurs dans les équations (15), on obtient

$$\frac{m.\rho_0}{R_0} = \left(\frac{1+m}{1-m}\right)\frac{\rho}{R}, \quad \left(\frac{m+1}{m}\right)^4 R^2 = \frac{1}{m^2} R_0^2 + \rho_0^2.$$

La seconde des deux relations précédentes, dans le cas particulier $m = -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire dans le cas où la roulette est la chaînette engendrée par le foyer d'une parabole, donne le théorème de M. Lamarle, démontré aussi par M. Mannheim (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 375).

6. Quand la base de la roulette est une droite et que le rayon R_0 est donné en fonction de α_0, on obtient les équations

$$\varphi(p, r) = 0, \quad \psi(p_0, \alpha_0) = 0$$

de la courbe mobile et de la roulette au moyen des rela-

tions (12) et de la formule connue

$$\frac{d^2 p_0}{d\alpha_0^2} + p_0 = R_0.$$

Si l'on connaît l'équation $\varphi(p, r) = 0$, on trouve promptement l'équation différentielle de la roulette, en posant dans cette dernière $p = y$, $r = y\frac{ds}{dx}$.

Réciproquement, si dans l'équation $f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ de la roulette, on pose

$$y = p, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2}}{p}, \tag{16}$$

on aura l'équation $\varphi(p, r) = 0$ de la courbe mobile.

Par exemple, soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En tirant la valeur de x et prenant la dérivée, on a

$$b^2(b^2 - y^2) = a^2 y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

et au moyen des relations (16) :

$$(a^2 - b^2)\, p^2 = a^2 r^2 - b^4,$$

équation d'une épicycloïde rapportée au centre du cercle fixe.

De même, en prenant pour équations des roulettes

$$y = mx - b, \quad y^2 = 2ax + b^2,$$

on trouve

$$r = \sqrt{m^2 + 1}\,.p, \quad r^2 = p^2 + a^2.$$

La première de ces équations représente la spirale logarithmique rapportée au point asymptotique; et la se-

conde représente une développante du cercle, rapportée au centre.

7. Si l'on suppose que la base C_2 de la roulette soit égale à la courbe mobile C, on aura $R_2 = R$, et les équations (6), (7), (14) donneront :

$$s'_0 = 2.s'_1, \quad R_0 = 2R_1, \quad \rho_0 = 4\rho_1.$$

De plus, en nommant p_0, q_0, r_0 ; p_2, q_2, r_2, les droites analogues à p, q, r, et qui se rapportent aux courbes C_0 et C_2, en prenant l'origine en un point O_2, on obtient aisément

$$(p_0 - r)^2 + r_0^2 - p_0^2 = r_2^2, \quad (q_2 - q)^2 + (p_2 + p)^2 = r_0^2 ;$$

et ces relations, dans le cas où les points O et O_2 sont semblablement placés à l'égard des deux courbes égales C, C_2, c'est-à-dire dans le cas où $p_2 = p$, $q_2 = q$, $r_2 = r$, donnent

$$r = \frac{1}{2}\frac{r_0^2}{p_0}, \quad p = \frac{1}{2} r_0. \tag{17}$$

En substituant ces valeurs à r, p dans l'équation $\varphi(p, r) = 0$ de la courbe mobile, on a celle de la roulette.

Les formules (17) font connaître (*voir* l'ouvrage cité dans les *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 33) que la roulette est semblable à la podaire de la courbe mobile, et est aussi égale à la courbe nommée par M. Quetelet, *caustique secondaire* de la courbe mobile, le point lumineux étant celui qui engendre la roulette.

Par conséquent, sachant (ouvrage précité) que les podaires prises par rapport *à l'origine* des courbes suivantes :

Circonférence, origine en un point quelconque ; *spirale logarithmique*, origine au point asymptotique ; *hyperbole*

équilatère, origine au centre; *épicycloïde*, origine au centre du cercle fixe; *ellipse*, origine à l'un des foyers; *parabole*, origine au foyer, ou bien au sommet, etc.,

Sont, par ordre, ces autres lignes :

Conchoïde circulaire, spirale logarithmique, lemniscate de Bernoulli, épitrochoïde, circonférence, droite, ou bien *cissoïde de Dioclès*, etc.,

On pourra immédiatement conclure quelle est la roulette engendrée par l'origine de l'une des premières courbes, lorsque cette courbe roule sur une courbe qui lui est égale.