

GUILLAUMET

**Note sur la discussion des équations
du deuxième degré à deux variables
par le moyen des équations de leurs
axes trouvées à priori**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 59-66

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__59_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur la discussion des équations du deuxième degré à deux variables
par le moyen des équations de leurs axes trouvées à priori ;

PAR M. GUILLAUMET,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

La discussion de l'équation générale du second degré à deux variables présente une complication de cas particuliers assez nombreux, qui exigent pour être traités des méthodes différentes, et nécessitent souvent des calculs longs à exécuter. L'idée de trouver à priori les axes de la courbe et leurs longueurs, s'il s'agit d'une courbe de l'un des deux premiers genres, serait, selon nous, assez naturelle et permettrait d'achever promptement la discussion sans qu'il pût naître aucune espèce de cas particuliers.

Cette méthode, employée dans toute sa généralité, ne fournirait pas toujours une simplification dans les cal-

culs; mais si l'on y joint les premiers résultats donnés immédiatement par la résolution de l'équation générale par rapport à y , elle amène à la connaissance définitive de la courbe plus rapidement que ne le ferait la méthode ordinaire.

L'application de cette méthode se base essentiellement sur la connaissance des axes d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires. Nous n'avons considéré que ce seul cas, qui, du reste, se présente le plus ordinairement. Nous avouons même que, dans le cas des axes obliques, la simplification n'existerait plus, l'équation d'un axe se trouvant alors compliquée de lignes trigonométriques.

Pour trouver les axes de la courbe représentée par l'équation générale

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + E\alpha + F = 0,$$

on cherche à déterminer les coefficients a et b d'une droite

$$y = ax + b,$$

en exprimant que si l'on fait une transformation de coordonnées en prenant cette droite pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées une perpendiculaire quelconque à cette même droite, les termes du premier degré en y disparaissent de l'équation de la courbe.

Rien ne distinguant les deux axes nouveaux l'un de l'autre, on devra trouver deux solutions, et les deux valeurs du coefficient angulaire a devront être inverses.

En effet, posons les formules de transformation

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= y_1 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha; \end{aligned}$$

et remarquons que la propriété indiquée devant avoir lieu quelle que soit la nouvelle origine pourvu que x et y soient

(61)

liés par la relation

$$y_1 = ax_1 + b,$$

nous pouvons faire $x_1 = 0$.

De plus, l'angle α a pour tangente trigonométrique a , ce qui donne pour nos formules de transformation

$$x = \frac{x'}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{ay'}{\sqrt{a^2 + 1}},$$
$$y = b + \frac{ax'}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{y'}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Reportant ces valeurs de x et y dans l'équation (1) et supprimant les accents, on a à évaluer à zéro le coefficient du terme du premier degré en y , c'est-à-dire l'expression

$$\frac{2Aax}{a^2 + 1} + \frac{2Ab}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{Bx}{a^2 + 1} - \frac{Ba^2x}{a^2 + 1} - \frac{Bba}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{2Cax}{a^2 + 1}$$
$$+ \frac{D}{\sqrt{a^2 + 1}} - \frac{Ea}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Mais ce coefficient devant être nul quel que soit x , on en déduira les deux équations

$$\frac{2Aa + B - Ba^2 - 2Ca}{a^2 + 1} = 0,$$

$$\frac{2Ab - Bba + D - Ea}{\sqrt{a^2 + 1}} = 0,$$

ou

$$(2) \quad a^2 - \frac{2(A - C)}{B} - 1 = 0,$$

$$(3) \quad (2A - Ba)b = Ea - D,$$

d'où l'on tire

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}, \\ a_2 = \frac{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} b_1 = \frac{D - E a_1}{B a_1 - 2A}, \\ b_2 = \frac{D - E a_2}{B a_2 - 2A}. \end{cases}$$

Les équations des axes de la courbe considérée seront donc

$$\begin{aligned} y &= \frac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B} x \\ &\quad + \frac{D - \frac{E}{B} [A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}]}{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2} - 2A}, \\ y &= \frac{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B} x \\ &\quad + \frac{D - \frac{E}{B} [A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}]}{A - C - \sqrt{(A - C)^2 + B^2} - 2A}, \end{aligned}$$

équations faciles à se rappeler, et qui, de plus, seront simples à construire numériquement, d'autant mieux que dans le terme tout connu, le coefficient déjà calculé se représente deux fois.

Nous ferons remarquer en passant que, bien qu'on trouve dans le cas de la parabole deux valeurs pour a et qu'il semble par conséquent y avoir deux axes, la méthode n'est cependant pas en défaut, car si l'on rem-

place B^2 par $4AC$, on a

$$a = \frac{2A}{B},$$

$$a = -\frac{2C}{B}.$$

Mais, reportant ces valeurs de a dans les valeurs de b , on a, pour celles de ces dernières qui correspondent à

$$a = -\frac{2C}{B},$$

une valeur finie, et, pour celle qui correspond à

$$a = \frac{2A}{B},$$

une valeur infinie qui indique bien l'impossibilité et non le parallélisme avec l'axe primitif des ordonnées, puisque les nouveaux axes sont perpendiculaires entre eux.

Cela posé, voyons d'abord la manière générale de construire la courbe au moyen de ses axes. Après quoi nous montrerons comment, si l'application de la méthode présente de trop grandes difficultés de calcul, on peut la simplifier en prenant un ou deux points de la courbe, points déterminés au moyen du diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}$$

et par la résolution de l'équation

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF = 0.$$

ou par la résolution des équations qui résultent de la substitution dans l'équation (1) des valeurs $x = 0$ ou $y = 0$.

1°. Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, on

trouvera l'intersection des deux axes avec la courbe, ce qui donnera les quatre sommets si c'est une ellipse, ou les deux sommets et la longueur de l'axe imaginaire si c'est une hyperbole, et déterminera la courbe dans l'un ou l'autre cas.

2°. Si la courbe est une parabole, l'intersection de l'axe avec la courbe donne le sommet. On y joindra un point obtenu par l'une des méthodes que nous venons d'indiquer, et la courbe sera encore déterminée.

Nous n'engagerons pas ordinairement à appliquer cette méthode générale, sauf dans le cas de la parabole où l'équation de l'axe devient très-simple :

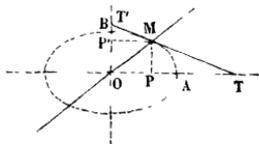
$$y = -\frac{2C}{B}x + \frac{D + \frac{2CE}{B}}{-2C - 2A}.$$

Mais nous allons montrer comment on peut la simplifier dans les deux premiers cas.

1°. *Ellipse.* On prendra les deux points de la courbe situés sur le diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{Bx + D}{2A}.$$

A ces points on connaît la tangente qui est parallèle à l'axe primitif des ordonnées. Cela donnera en même



temps le centre, et il suffit de construire a_1 et a_2 pour avoir les directions des axes.

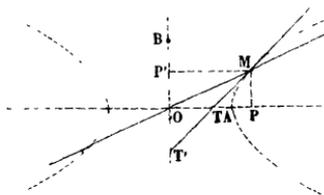
On sait alors que OA est une moyenne proportionnelle entre OP et OT et que OB est une moyenne proportion-

nelle entre OP' et OT' , ce qui donne les quatre sommets.

2°. *Hyperbole*. Nous distinguerons deux cas.

I. Le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ coupe la courbe.

On prendra, comme tout à l'heure, les deux points d'intersection, le centre et la tangente en l'un des deux



points, tangente parallèle à l'axe des Y. On aura les sommets et les extrémités de l'axe imaginaire par les relations

$$OA = \sqrt{OP \times OT}$$

et

$$OB \sqrt{-1} = \sqrt{OP' \times OT'}$$

La direction de la tangente montrera lequel des deux axes est l'axe réel.

II. Le diamètre $y = -\frac{Bx + D}{2A}$ est imaginaire.

On le construit; on construit l'un des deux axes; le centre est son intersection avec le diamètre. Le deuxième axe en résulte donc. On construira ensuite les directions des deux asymptotes et on trouvera un point quelconque de la courbe en faisant dans l'équation (1) $x = 0$ ou $y = 0$. On trouvera la tangente en ce point en y menant la droite dont la partie comprise entre les deux asymptotes aura ce même point pour milieu. Et on achèvera comme dans le cas précédent.

Dans le cas de la parabole, la méthode générale sera toujours simple et applicable.

La méthode est en défaut dans un seul cas : c'est celui où $B = 0$. Mais on sait alors que les axes de la courbe sont parallèles aux axes primitifs. Si donc la courbe a un centre, on le trouvera en égalant à zéro les deux dérivées du premier membre de l'équation (1), et on appliquera, après avoir construit les axes en ce point, la méthode simplifiée.

Si la courbe est une parabole, la méthode ne s'appliquera plus du tout. Mais alors, comme l'un des carrés disparaît, la résolution par rapport aux deux variables donnera deux points sur une droite perpendiculaire à l'axe, par conséquent l'axe lui-même, et un point avec sa tangente, ce qui déterminera la courbe.

Nous sommes loin d'avoir énuméré tous les cas qui peuvent se présenter et même d'avoir discuté à fond ceux que nous avons signalés. Mais notre but était seulement de faire voir que la recherche des axes de figure des courbes du deuxième degré, faite à priori au moyen de la formule que nous avons indiquée, formule bien connue du reste, peut être utile pour la construction graphique de cette courbe, et même, à notre avis, apporter, dans un grand nombre de cas, une simplification de calculs assez sensible.