NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Méthode de quadrature de Cotes ; d'après Gauss

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 109-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__109_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉTHODE DE QUADRATURE DE COTES;

D'APRÈS GAUSS (*).

1. *Lemme.* Soit

$$Y = \sum_0^n \frac{A_{(\mu)} T_{(\mu)}}{M_{(\mu)}};$$

le signe sommatoire se rapporte à l'indice μ.

n est un nombre positif entier donné et μ prend successivement les $n+1$ valeurs $0, 1, 2, \ldots n$; les A sont des constantes données,

$$T_{(\mu)} = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{nt-\mu};$$

t une variable; de sorte que

$$T_{(\mu)} = nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-\mu+1)(nt-\mu-1)\ldots(nt-n).$$

Désignons par $M_{(\mu)}$ la valeur numérique que prend $T_{(\mu)}$ en y faisant $nt = \mu$, on aura

$$M_{(\mu)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1.-1.-2\ldots\mu-n,$$
$$T_0 = (nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n),$$
$$M_0 = -1.-2.-3\ldots-n.$$

Le premier terme de Y est

$$\frac{A(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)}.$$

On met A au lieu de $A_{(0)}$.

(*) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, autore Carolo Friderico Gauss, Societati regiæ Scientiarum exhibita D. 16 septembris 1814, p. 39-76.

Le deuxième terme est

$$\frac{A_1\, nt\,(nt-2)\ldots(nt-n)}{1.-1\ldots1-n},$$

le dernier terme est

$$\frac{A_n\, nt\,(nt-1)\ldots(nt-n+1)}{n(n-1)\ldots1}.$$

Faisant successivement t égal à l'un des nombres de la suite

$$0,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{n},\quad \frac{3}{n},\ldots,\quad \frac{n}{n},$$

les $n+1$ valeurs numériques correspondantes de Y sont

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots\ A_n.$$

Si Y_1 est une autre fonction de t, ayant ces mêmes valeurs pour les mêmes valeurs de t, $Y'-Y$ sera divisible par les $(n+1)$ facteurs

$$t,\quad t-\frac{1}{n},\quad t-\frac{2}{n},\ldots,\quad t-1,$$

et, par conséquent, par le produit de ces facteurs. Il faut donc que Y_1 soit d'un degré plus élevé que t; ainsi de toutes les fonctions de t qui donnent ces valeurs A, $A_1,\ldots,$ A_n pour les valeurs correspondantes de t, la moins élevée est la fonction Y.

Corollaire. Si une fonction de t étant développée suivant les puissances de t est interrompue avant le terme qui renferme t^{n+1}, cette fonction est identique avec la fonction Y.

2. Soit à intégrer $\int_g^h y\,dx$ par la méthode des rectangles; où y est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

Faisons

$$h - g = \Delta,$$

donnons successivement à x les $n + 1$ valeurs

$$g, \quad g + \frac{\Delta}{n}, \quad g + \frac{2\Delta}{n}, \quad g + \frac{3\Delta}{n}, \ldots, \quad g + \frac{n\Delta}{n},$$

et supposons que les valeurs correspondantes de y sont

$$A, \ A_1, \ A_2, \ldots \ A_n.$$

Posons

$$x = g + \Delta t,$$

où t est une nouvelle variable et y devient fonction de t.

Alors

$$\int y\,dx = \Delta \int y\,dt.$$

Remplaçons y par Y et l'on aura

$$\int y\,dx = \Delta \int Y\,dt.$$

Développant $T_{(\mu)}$ suivant les puissances décroissantes de t, on a

$$T_{(\mu)} = \alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \ldots,$$

$$\int_0^1 T_\mu\,dt = \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \ldots = M_\mu R_\mu,$$

M_μ est un nombre, donc R_μ est aussi un nombre. On aura

$$\Delta \int_0^1 y\,dt = \Delta \int_0^1 \sum \frac{T_\mu\,dt}{M_{(\mu)}}$$

$$= \Delta (AR + A_1 R_1 + A_2 R_2 + \ldots + A_n R_n).$$

Car

$$g = 0, \quad h = 1, \quad \Delta = 1.$$

Cette intégrale est exacte.

Exemple :

$$n = 5, \quad \mu = 2,$$

$$T_2 = 5t(5t-1)(5t-3)(5t-4)(5t-5)$$
$$= 5^5 t^5 - 13.5^4.t^4 + 59.5^3.t^3 - 107.5^2.t^2 + 60.5\ t,$$

$$M_2 = 2.1.-1.-2.-3 = -12,$$

$$\alpha = \ 3125,$$
$$\beta = -6125,$$
$$\gamma = \ 7375,$$
$$\delta = -2675,$$
$$\varepsilon = \ 300;$$

$$-12\,R_2 = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + \frac{300}{2} = -\frac{25}{12},$$

$$R_2 = \frac{25}{144}.$$

3. On peut abréger ce calcul. Posons

$$2t - 1 = u,$$

alors

$$T_{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4)\ldots(nu-n+4)\,(nu-n+2)\,(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}.$$

Posons

$$\frac{(n^2u^2-n^2)[n^2u^2-(n-2)^2][n^2u^2-(n-4)^2][n^2u^2-(n-6)^2]\ldots}{n^2u^2-(n-2\mu)^2} = U_{(\mu)}.$$

Lorsque n est pair, le numérateur se termine par $(n^2u^2-4)\,nu$, et lorsque n est impair par

$$(n^2u^2-9)(n^2u^2-1),$$

et

$$T_\mu = \frac{nu-n+2\mu}{2^n}\,U_{(\mu)},$$

$U_{(\mu)}$ est de degré $n-1$ en u; et

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} T_\mu\, du$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{nu\, U_\mu\, du}{2^{n+1}} + \int_{-1}^{+1} \frac{(2\mu - n)\, U_\mu\, du}{2^{n+1}}.$$

Posons

$$U_{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \ldots$$

Si n est pair la seconde intégrale s'évanouit, et si n est impair la première s'évanouit.

Ainsi pour n pair,

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \ldots\right);$$

pour n impair,

$$\int_0^1 T_\mu\, dt = \frac{2\mu - n}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n-4} + \frac{\delta}{n-6} + \ldots\right).$$

U_μ ne change pas en remplaçant $n - 2\mu$ par $2\mu - n$, c'est-à-dire en remplaçant μ par $n - \mu$, donc

$$U_{(\mu)} = U_{(n-\mu)}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 T_{(n-\mu)}\, dt = \pm \int_0^1 T_\mu\, dt,$$

le signe supérieur pour n pair et le signe inférieur pour n impair; et comme

$$M_{n-\mu} = \pm M_\mu,$$

on a donc toujours

$$R_{n-\mu} = R_\mu.$$

Ainsi, dans les coefficients R, R_1, R_2, ..., R_n,

$$R = R_n, \quad R_1 = R_{n-1}, \quad R_2 = R_{n-2}, \ldots.$$

Table des valeurs de R, *d'après Cotes.*

Valeurs de n.

1 $\quad R = R_1 = \frac{1}{2}$.

2 $\quad R = R_2 = \frac{1}{6}, \quad R_1 = \frac{2}{3}$.

3 $\quad R = R_3 = \frac{1}{8}, \quad R_1 = R_2 = \frac{3}{8}$.

4 $\quad R = R_4 = \frac{7}{90}, \quad R_1 = R_3 = \frac{16}{45}, \quad R_2 = \frac{2}{15}$.

5 $\quad R = R_5 = \frac{19}{288}, \quad R_1 = R_4 = \frac{25}{96}, \quad R_2 = R_3 = \frac{25}{144}$.

6 $\quad R = R_6 = \frac{11}{840}, \quad R_1 = R_5 = \frac{9}{35}, \quad R_2 = R_4 = \frac{9}{280}, \quad R_3 = \frac{34}{105}$.

7 $\quad R = R_7 = \frac{751}{17280}, \quad R_1 = R_6 = \frac{3577}{17280}, \quad R_2 = R_5 = \frac{49}{640}, \quad R_3 = R_4 = \frac{2089}{17280}$

8 $\quad R = R_8 = \frac{980}{28350}, \quad R_1 = R_7 = \frac{2944}{14175}, \quad R_2 = R_6 = -\frac{464}{14175}, \quad R_3 = R_5 = \frac{5248}{14175}, \quad R_4 = -\frac{454}{2835}$.

9 $\quad R = R_9 = \frac{2857}{89600}, \quad R_1 = R_8 = \frac{15741}{89600}, \quad R_2 = R_7 = \frac{27}{2240}, \quad R_3 = R_6 = \frac{1209}{5000}, \quad R_4 = R_5 = \frac{2889}{44800}$.

10 $\quad R = R_{10} = \frac{16067}{598752}, \quad R_1 = R_9 = \frac{26575}{149688}, \quad R_2 = R_8 = -\frac{16175}{199584}, \quad R_3 = R_7 = \frac{5675}{12474}, \quad R_4 = R_6 = -\frac{4825}{11088}, \quad R_5 = \frac{17807}{24948}$.

4. *Évaluation de l'erreur.*

Soit

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{m+1} = \text{valeur exacte}.$$

Partageons l'intervalle de 0 à 1 en $n+1$ parties égales

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ldots,\ \frac{n}{n},$$

$$\Delta = h - g = 1,$$

les $n+1$ valeurs de A sont

$$0,\ \frac{1}{n^m},\ \left(\frac{2}{n}\right)^m,\ \left(\frac{3}{n}\right)^m,\ldots,\ \left(\frac{n}{n}\right)^m;$$

donc

$$\int_0^1 t^m\,dt = \frac{1}{n^m}\left[R_1 + 2^m.R_2 + 3^m.R_3 + \ldots + n^m.R_n\right],$$

valeur approchée.

Désignons par $k_{(m)}$ la différence des deux valeurs, on a

$$k_{(m)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n^m}\left[R_1 + 2^m R_2 + 3^m R_3 + \ldots + n^m R_n\right],$$

$$k = 1 - R_1 - R_2 - \ldots - R_n, \quad \text{car} \quad m = 0.$$

Développant y suivant les puissances croissantes de t,

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

alors

$$k_{(m)} = K k + K_1 k_1 + K_2 k_2 + K_3 k_3 + \ldots + K_n k_n.$$

Car pour t^0 la différence est k, pour t^1 la différence est k_1, etc.

Tant que le développement de y ne dépasse pas n, la valeur approchée se confond avec la vraie valeur; ainsi

$k_{(0)}, k_{(1)}, k_{(2)}, \ldots, k_{(n)}$ sont nuls et la correction ne commence qu'à k_{n+1}. En effet, tant que m est moindre que n, y est identique avec Y et l'intégration est exacte telle qu'elle a été donnée ci-dessus. Donc

$$k_m = \mathrm{K}_{n+1} k_{n+1} + \mathrm{K}_{n+2} k_{n+2} + \ldots$$

Exemple.

$n = 1$, $k_2 = -\frac{1}{6}$, $k_3 = -\frac{1}{4}$, $k_4 = -\frac{3}{10}$,

$n = 2$, $k_3 = 0$, $k_4 = -\frac{1}{120}$, $k_5 = -\frac{1}{48}$,

$n = 3$, $k_4 = -\frac{1}{270}$, $k_5 = -\frac{1}{108}$,

$n = 4$, $k_5 = 0$, $k_6 = -\frac{1}{2688}$, $k = -\frac{1}{768}$,

$n = 5$, $k_6 = -\frac{11}{32500}$, $k = -\frac{11}{15000}$,

$n = 6$, $k_7 = 0$, $k_8 = -\frac{1}{38880}$, $k_9 = -\frac{1}{8640}$,

$n = 7$, $k_8 = -\frac{167}{10588410}$, $k_9 = -\frac{167}{2352980}$,

$n = 8$, $k_9 = 0$, $k_{10} = -\frac{37}{17301504}$, $k_{11} = -\frac{37}{3145728}$

Pour $n = 1$,

$$k_1 = 0,$$

$$k_1 = \frac{1}{2+1} - \frac{1}{1^2}\mathrm{R}_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Pour $n = 2$,

$$k_1 = k_2 = 0,$$

$$k_3 = \frac{1}{3+1} - \frac{1}{2^3}(\mathrm{R}_1 + 2^3\mathrm{R}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{6}\right) = 0,$$

$$k_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{2^4}(\mathrm{R}_1 + 2^4\mathrm{R}^2 + 3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{66}\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{6}\right) = -\frac{1}{120}$$

On a en général pour n pair

$$k_{n+1} = 0,$$

et

$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} k_{(2n+2)}.$$

En effet, soit l_m la différence entre la valeur vraie et la valeur approchée de

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

on a

$$l_{(m)} = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt$$

$$- \left[\begin{array}{c} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \mathrm{R} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^m \mathrm{R}_1 + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\right)^m \mathrm{R}_2 \\ + \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\right)^m \mathrm{R}_3 + \ldots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^m \mathrm{R}_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^m \mathrm{R}_n \end{array} \right].$$

Pour m impair l'intégrale et la série s'évanouissent; car

$$\mathrm{R}_p = \mathrm{R}_{n-p}.$$

Pour m et n pairs

$$l_m = \frac{1}{2^m (m+1)} - \frac{2}{n^m}$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{2}n\right)^m \mathrm{R} + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^m \mathrm{R}_1 + \left(\frac{1}{2}n - 2\right)^m \mathrm{R}_2 + \ldots \\ + 2^m \mathrm{R}_{\frac{1}{2}n-2} + \mathrm{R}_{\frac{1}{2}n-1} \end{array} \right].$$

Pour m pair et n impair

$$l_m = \frac{1}{2^m} \left[\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m} n^m \mathrm{R} + (n-2)^m \mathrm{R}_1 + (n-4)^m \mathrm{R}_2 + \ldots + 3^m \mathrm{R}_{\frac{n-3}{2}} + \mathrm{R}_{\frac{n-1}{2}} \right].$$

Développons y suivant les puissances $t - \frac{1}{2}$:

$$y = \mathrm{L} + \mathrm{L}_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + \mathrm{L}_2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \mathrm{L}_3 \left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots ;$$

la correction sera

$$l_m = \mathrm{L}\, l + \mathrm{L}_2\, l_2 + \mathrm{L}_4\, l_4 + \mathrm{L}_6\, l_6 + \ldots .$$

Car pour toute valeur de m qui ne surpasse pas n, $l_{(m)}$ s'évanouit.

Ainsi la correction sera pour n pair

$$\mathrm{L}_{n+1}\, l_{n+2} + \mathrm{L}_{n+3}\, l_{n+4} + \mathrm{L}_{n+5}\, l_{n+6} + \ldots ,$$

pour n impair

$$\mathrm{L}_{n+1}\, l_{n+1} + \mathrm{L}_{n+3}\, l_{n+3} + \mathrm{L}_{n+5}\, l_{n+5} + \ldots ,$$

On a

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^m = t^m - \frac{1}{2} m t^{m-1} + \frac{1}{4} \frac{m(m-1)}{1.2} t^{m-2} + \ldots ,$$

donc

$$l_m = k_m - \frac{1}{2} m k_{m-1} + \frac{1}{4} \frac{m(m-1)}{1.2} k_{m-2} + \ldots ,$$

car pour t^m la correction est k_m, etc.

Et de même

$$k_m = l_m + \frac{1}{2} m\, l_{m-1} + \frac{1}{4} \frac{m(m-1)}{1.2} l_{m-2}$$

(où il faut rejeter les l d'indice impair).

Il faut dans les deux séries (p. 115) ne commencer qu'à $n + 1$.

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$

$$k_{n+2} = l_{n+2} + \frac{1}{2}(n+2)\, l_{n+1},$$

$$k_{n+3} = l_{n+3} + \frac{1}{2}(n+3)\, l_{n+2} + \frac{1}{4} \frac{(n+3)(n+2)}{1.2} l_{n+1},$$

car

$$k_n = k_{n-1} = k = 0,$$
$$l_n = l_{n-1},\ l = 0.$$

Donc si n est pair,

$$k_{n+1} = 0,$$
$$k_{n+2} = l_{n+2},$$
$$k_{n+3} = \frac{n+3}{2} l_{n+2} = \frac{n+3}{2} k_{n+2};$$

si n est impair,

$$k_{n+1} = l_{n+1},$$
$$k_{n+2} = \frac{n+2}{2} l_{n+1} = \frac{n+2}{2} k_{n+1};$$

ce qui démontre les relations indiquées ci-dessus.

Il est toujours avantageux dans la méthode de Cotes, de prendre n pair, parce qu'alors $k_{n+1} = 0$ et la correction est de l'ordre $n + 1$.

Autre intégration par approximation.

$$\int_g^h y dx, \qquad g - h = \Delta, \qquad \Delta t = x - g,$$
$$\int_g^h y dx = \Delta \int_0^1 y dt,$$

y devient fonction de t.

Soit

$$Y = A \frac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_n)}$$
$$+ A_2 \frac{(t-a)(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a)(a_2-a)(a_3-a)\ldots(a_n-a)}$$
$$+ A_2 \frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$
$$\vdots$$
$$A_n \frac{(t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

Supposons que pour ces valeurs de

t	correspondent les valeurs de	y,
a	—	A,
a_1	—	A_1,
a_2	—	A_2,
$\vdots$		$\vdots$
a_n	—	A_n.

y est identique avec Y tant que le degré de y ne dépasse pas n, ou lorsque des termes de degré supérieur à n peuvent être négligés (p. 110).

Soit

$$\begin{aligned} T &= (t-a)(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n) \\ &= t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \alpha_2 t^{n-2} + \ldots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Désignant par $M, M_1, M_2, \ldots$, les valeurs des numérateurs dans Y en y faisant t successivement égal à a, a_1, a_2, a_n, on aura

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A_1 T}{M_1(t-a_1)} + \frac{A_2 T}{M_2(t-a_2)} + \ldots + \frac{A_n T}{M_n(t-a_n)};$$

$M, M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les valeurs de $\frac{dT}{dt}$ pour $t = a$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$\frac{T}{t-a} = t^n + a \left| \begin{array}{l} t^{n-1} + a^2 \\ \alpha \end{array} \right| \begin{array}{l} t^{n-2} + a^3 \\ a\,\alpha \\ \alpha_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} t^{n-3} + \ldots + a^n \\ \alpha\, a^{n-1} \\ \alpha_1 a^{n-2} \\ \alpha_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha_2 a^{n-3} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{T}\,dt}{t-a} = \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{a^2}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} + \ldots + a^n$$

$$\frac{a}{n} + \frac{\alpha a}{n-1} + \frac{\alpha a^2}{n-2} + \ldots + \alpha\, a^{n-1}$$

$$\frac{\alpha_1}{n-1} + \frac{\alpha_1 a}{n-2} + \ldots + \alpha_2 a^{n-3}$$

$$\frac{\alpha_2}{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}$$

$$= a^n + \alpha a^{n+1} + \alpha_1 a^{n-2} + \alpha_2 a^{n-3} + \ldots \alpha_{n-1}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[a^{n-1} + \alpha a^{n-2} + \alpha_1 a^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2}\right]$$

$$+ \frac{1}{3}\left[a^{n-2} + \alpha a^{n-3} + \alpha_1 a^{n-4} + \ldots + \alpha_{n-3}\right]$$

$$+ \frac{1}{4}\left[a^{n-3} + \alpha a^{n-4} + \alpha' a^{n-5} + \ldots + \alpha_{n-4}\right]$$

$$+ \ldots$$

$$+ \frac{1}{n-1}\left[a^2 + \alpha a + a'\right]$$

$$+ \frac{1}{n}\left[a + \alpha\right]$$

$$+ \frac{1}{n+1}.$$

Soit

$$\mathrm{T}\log\left(\frac{1}{1-t^{-1}}\right) = \mathrm{T}\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-4} + \ldots\right)$$

$$= \mathrm{T}' + \mathrm{T}'',$$

où T′ représente la somme des termes où l'exposant de t est positif et T″ la somme des termes où cet exposant est négatif.

En faisant $t = a$ dans T′, on obtient la série ci-dessus pour

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{T}\,dt}{t-a}.$$

Désignant par $R, R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ les valeurs que prend

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

en y remplaçant successivement t par $a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, on aura

$$\int_0^1 Y\,dt = AR + A_1R_1 + A_2R_2 + \ldots + A_nR_n,$$

$$\int_g^h y\,dx = \Delta \int_0^1 Y\,dt,$$

vraie ou approchée.

Faisons

$$u = 2t - 1, \quad b = 2a - 1,$$
$$b_1 = 2a_1 - 1, \quad b_2 = 2a_2 - 1 \ldots,$$

alors

$$T = \frac{U}{2^{n+1}}, \quad U = (u - b)(u - b_1)(u - b_2)\ldots(u - b_n),$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2^n}\frac{dU}{du};$$

ainsi on aura M, M_1, M_2, etc., si l'on remplace successivement u par $b, b_1, b_2, \ldots, b_n$ dans $\frac{1}{2^n}\frac{dU}{du}$.

$$\log\frac{1}{1 - t^{-1}} = \log\frac{1 + u^{-1}}{1 - u^{-1}}$$

$$= 2u^{-1} + \frac{2}{3}u^{-3} + \frac{2}{5}u^{-5} + \frac{2}{7}u^{-7} + \ldots.$$

Faisons

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \ldots\right) = U' + U'',$$

où U' est la partie à exposants positifs, on aura

$$T' + T'' = \frac{1}{2^n}(U' + U'');$$

donc

$$U' = 2^n T', \quad U'' = 2^n T''.$$

Ainsi on trouve les valeurs de R, R_1, R_2, R_3, etc., en faisant successivement $u = b, b_1, b_2, b_3$, etc., dans

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}.$$

3. *Applications numériques.*

$$n = 5, \quad a = 0,$$

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{3}{5}, \quad a_4 = \frac{4}{5}, \quad a_5 = 1,$$

$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{17}{5}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{274}{625}t^2 - \frac{24}{625}t,$$

$$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 + \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500},$$

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = \frac{t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 - \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{10}{7500}}{6t^5 - 4t^4 + \frac{68}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 - \frac{548}{625}t - \frac{24}{625}}.$$

Remplaçant t par les valeurs de a, on trouve les valeurs de R; mais la seconde méthode est un peu plus courte.

$$U = u^6 - \frac{7}{5}u^4 + \frac{259}{625}u^2 - \frac{9}{625},$$

$$U' = u^5 - \frac{16}{15}u^3 + \frac{277}{1875}u,$$

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)} = \frac{u^4 - \frac{16}{15}u^2 + \frac{277}{1875}}{6u^4 - \frac{28}{5}u^2 + \frac{518}{625}};$$

où l'on remplace u par les valeurs de b, savoir

$$-1, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{1}{5}, \ldots,$$

On aura aussi les valeurs de R et les mêmes que par la méthode de Cotes, puisque les a forment une progression arithmétique, et l'on a

$$R = R_5 = \frac{19}{288}, \quad R_1 = R_4 = \frac{25}{90}, \quad R_2 = R_3 = \frac{25}{144} \text{ (p. 114)}.$$

Degré de précision.

Posons

$$R a^m + R_1 a_1^m + R_2 a_2^m + \ldots + R_m a_m^m = \frac{1}{m+1} - k_m,$$

k_m est la différence entre l'intégrale exacte $\int_0^1 t^m dt$ et l'intégrale approchée. Nous aurons, en développant en séries,

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a_2} + \ldots + \frac{R}{t-a_m}$$

$$= (1-k)t^{-1} + \left(\frac{1}{2} - k_1\right)t^{-2} + \left(\frac{1}{3} - k\right)t^{-3} + \left(\frac{1}{4} - k_3\right)t^{-4} - \ldots$$

$$= t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \ldots - \Theta,$$

$$\Theta = kt^{-1} + k_1 t^{-2} + k_2 t^{-3} + k_3 t^{-4} + \ldots$$

Comme nous savons que $k, k_1, k_2, \ldots, k_m$ sont nuls, on a donc

$$\Theta = k_{n+1} t^{-(n+2)} + k_{n+2} t^{-(n+3)} + k_{n+3} t^{-(n+4)} + \ldots ;$$

multipliant par T, on obtient

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R_1}{t-a_1} + \frac{R_2}{t-a^2} + \ldots + \frac{R_m}{t-a_m}\right) = T' + T' - T\Theta \text{ (p. 121)}.$$

Le premier membre est une fonction entière de t de l'or-

dre n ; donc le deuxième membre doit être aussi entier. Or T′ est une fonction entière, donc

$$T'' = T\Theta.$$

Ainsi l'on trouve Θ en développant la fraction $\frac{T''}{T}$, et par là on détermine les coefficients k_{n+1}, k_{n+2}, etc., et si l'on développe y en puissance de t, savoir

$$y = K + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \ldots,$$

on aura

$$\int y dt = k_{n+1} K_{n+1} + k_{n+2} K_{n+2} + \ldots.$$

Seconde manière d'exprimer la correction.

Soit

$$y = L + L_1 \left(t - \frac{1}{2}\right) + L_2 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + L_3 \left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

la correction sera

$$l_{(n+1)} L_{n+1} + l_{n+2} L_{n+2} + l_{n+3} L_{n+3} + \ldots,$$

où l_m est la correction de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

et l'on a

$$l_m = k_m - \frac{1}{2} m k_{m-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m.m-1}{1.2} k_{m-2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} k_{m-3} + \ldots.$$

Θ devient, en remplaçant t par $\frac{1}{2} u + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} & 2k (u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \ldots) \\ & 4k_1 (u^{-2} + 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \ldots) \\ + & 8k_2 (u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \ldots) \\ + & \ldots \end{aligned}$$

ou bien

$$2ku^{-1} + 4\left(k_1 - \frac{1}{2}\right)u^{-2} + 8\left(k_2 - \frac{1}{2}\cdot 2k_1 + \frac{1}{4}k\right)u^{-3} + 6\left(k_3 - \frac{1}{2}\cdot 3k_2 + \frac{1}{4}\cdot 3k_1 - \frac{1}{8}k\right)u^{-4},$$

ou

$$2lu^{-1} + 4l_1u^{-2} + 8l_2u^{-3} + 16l_3u^{-4} + \ldots ;$$

mais l, l_1, l_2,..., l_n sont nuls ; donc Θ se change en

$$2^{n+2}l_{n+1}u^{-(n+2)} + 2^{n+3}l_{n+2}u^{-(n+3)} + 2^{n+4}l_{n+3}u^{-(n+4)}.$$

Mais

$$\Theta = \frac{T''}{T}$$

et T, T'' se changent par la substitution de $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ au lieu de t, en $\frac{U}{2^{n+1}}$ et $\frac{U''}{2^n}$ (voir ci-dessus, art. 2). Ainsi la fonction Θ devient $\frac{2U''}{U}$.

Désignant par Ω la série résultant du développement de $\frac{U''}{U}$, on a

$$\Omega = 2^{n+1}l_{n+1}u^{-(n+2)} + 2^{n+2}l_{n+2}u^{-(n+3)} + 2^{n+3}l_{n+3}u^{-(n+4)} + \ldots .$$

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus,

$$U'' = -\frac{176}{13125}u^{-1} - \frac{304}{28125}u^{-3} - \frac{2576}{309375}u^{-5} + \ldots ,$$

$$\Omega = -\frac{176}{13125}u^{-2} - \frac{832}{28125}u^{-6} - \frac{189856}{4296875}u^{-11} - \ldots .$$

La correction de la valeur approchée de l'intégrale est

$$-\frac{11}{525000}L_6 - \frac{13}{112500}L_8 - \frac{5933}{1375000000}L_{10} - \ldots .$$

Méthode d'approximation plus approchée.

Quelles que soient les valeurs de $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'approximation est toujours exacte jusqu'à l'ordre n; mais on peut choisir ces valeurs telles que l'approximation soit d'un ordre plus élevé; ainsi dans la méthode de Cotes nous avons vu que l'ordre devient $n+1$ lorsque n est pair. Généralement, si les valeurs de a sont tellement choisies, que dans T″ ou U″ des termes disparaissent au commencement de la série, alors la précision dépassera l'ordre n d'autant d'unités qu'il aura disparu de termes.

Supposons

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \ldots;$$

il faut donc choisir α, α', α'' de manière que dans le produit

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \ldots\right)$$

les puissances t^{-1}, t^{-2}, $t^{-3}, \ldots, t^{-(n+1)}$ disparaissent, ou bien posant

$$U = u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n+1} + \beta'' u^{n+2} + \ldots,$$

on prenne β, β', β'' de manière que dans le produit

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} - \frac{1}{7}u^{-7} - \ldots\right)$$

les puissances u^{-1}, u^{-2}, $u^{-3}, \ldots, u^{-(n+1)}$ disparaissent.

Il est évident que cette condition ne peut être satisfaite à moins que l'on n'ait

$$\beta = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \beta''' = 0,$$

ce qui abrége le calcul.

Soit

$$n = 0;$$

alors

$$T = t + \alpha,$$

$$(t+\alpha)\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots.\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse, on doit avoir

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad x = -\frac{1}{2},$$

donc

$$T = t - \frac{1}{2},$$

et

$$U = u,$$

$$n = 1, \quad T = t^2 + \alpha t + \alpha',$$

$$(t^2 + \alpha t + \alpha')\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} - \frac{1}{3}t^{-3} + \ldots\right).$$

Pour que t^{-1} disparaisse,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha + \alpha' = 0.$$

Pour que t^{-2} disparaisse

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha' = 0,$$

d'où

$$\alpha = -1, \quad \alpha' = \frac{1}{6}, \quad T = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Pour $U = u^2 + \beta^2$.

$$\cdot(u + \beta')\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \ldots\right),$$

$$\beta' + \frac{1}{3} = 0, \quad \beta' = -\frac{1}{3}, \quad U = u^2 - \frac{1}{3},$$

$$n = 2, \quad T = t^2 + \alpha t^2 + \alpha' t + \alpha.$$

Pour que t^{-1}, t^{-2}, t^{-3} disparaissent, on a les équations

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\alpha'+\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{3}\alpha'+\frac{1}{2}\alpha''=0,$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{1}{4}\alpha'+\frac{1}{3}\alpha''=0,$$

d'où

$$\alpha=-\frac{3}{2},\quad \alpha'=\frac{3}{5},\quad \alpha''=-\frac{1}{20}.$$

Pour U on trouve

$$\beta'=-\frac{3}{5}.$$

Méthode générale par les fractions continues.

Par la théorie des fractions continues, on trouve que la fonction U qui jouit de la propriété que

$$U\left(u^{-1}+\frac{1}{3}u^{-3}+\frac{1}{5}u^{-5}+\frac{1}{7}u^{-7}+\ldots\right)$$

donne une série qui commence par $u^{-(n+2)}$, est

$$U=u^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}u^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.(2n+1)(2n-1)}u^{n-3}$$
$$-\frac{(n+1)n\ n-1.n-2.n-3.n-4}{2.4.6.2n+1.2n-1.2n-3}u^{n-5}+\ldots,$$

et

$$T=t^{n+1}-\frac{(n+1)^2}{1.2n+2}t^n+\frac{(n+1)^2.n^2}{1.2.(2n+2)(2n+1)}t^{n-1}$$
$$-\frac{(n+1)^2n^2(n-1)^2}{1.2.3.2n+2\ldots 2n+1.2n}t^{n-2}+\ldots.$$

Gauss donne ces valeurs par induction et dit que la démonstration en est facile.

Prochainement cette méthode et une application numérique (*).

(*) Voir pour la première démonstration, Prouhet (*N. A.*, t. I, p. 348).