

COMBESURE

Solution de la question 256

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 84-85

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__84_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 256

(voir t. X, p. 256);

PAR M. COMBESURE,

Professeur.

Soit un quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle ; on décrit un second cercle touchant le côté AB en B et le côté CD, puis un troisième cercle touchant le côté AD en D et le côté BC. La droite qui va du point A au centre du second cercle fait avec le côté AB un angle égal à l'angle que fait la droite qui va de A au centre du troisième cercle avec le côté AD. (QUIDDE.)

Soient O le centre du cercle inscrit au quadrilatère ou le point de concours des bissectrices des angles A, E, F, B (*); I, I' les centres des deux cercles obtenus par l'intersection des bissectrices EO, FO avec les perpendiculaires BI, DI' aux côtés AB, AD. En désignant par A, B, C, D les angles du quadrilatère, le triangle BOE donne

$$\begin{aligned} \text{angle BOE} &= \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} E = \frac{1}{2} B - \frac{1}{2} (180^\circ - \overline{A + D}) \\ &= \frac{A + B + D - 180^\circ}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

On aurait semblablement

$$\text{angle DOF} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Les triangles BOI, DOI' donneront dès lors

$$\begin{aligned} BI &= \frac{BO \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin BIO} = \frac{BO \cdot \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{E}{2}} = \frac{BO \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A + D}{2}}, \\ DI' &= \frac{DO \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin DI' O} = \frac{DO \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A + D}{2}}. \end{aligned}$$

 (*) E est l'intersection de AB, CD, et F l'intersection de BC, AD.

Mais

$$BO = \frac{AB \cdot \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}, \quad DO = \frac{AD \cdot \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A+D}{2}};$$

donc

$$\frac{BI}{AB} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A+D}{2}} = \frac{DI'}{AD}.$$

Les triangles rectangles IBA, I'DA sont donc semblables, et, partant, les lignes AI, AI' sont également inclinées respectivement sur les côtés AB, AD. c. q. f. d.
