

**Théorèmes de géométrie déduits du calcul  
des symboles (voir Bulletin, t. Ier, p. 83)**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 14  
(1855), p. 221-224

<[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1855\\_1\\_14\\_\\_221\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__221_1)>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE  
DÉDUITS DU CALCUL DES SYMBOLES.**

(voir BULLETIN, t. I<sup>er</sup>, p. 83)

---

1. Les deux courbes données par les équations

$$F(x, y) = 0, \quad F(x + a, y + b) = 0$$

se coupent en des points qui sont sur une troisième courbe donnée par l'équation symbolique

$$e^a D_x + b D_y F(x, y) = 0.$$

Lorsque  $F(x, y)$  est algébrique et de degré  $n$ , la troisième courbe est de degré  $n - 1$ .

2. Les deux surfaces données par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(x + a, y + b, z + c) = 0$$

se coupent en une ligne qui est sur une troisième surface donnée par l'équation symbolique

$$e^a D_x + b D_y + c D_z F(x, y, z) = 0,$$

et cette surface est de degré inférieur d'une unité au degré des surfaces données.

$$3. \quad F(x, y) = 0$$

étant l'équation d'une courbe plane, si elle tourne d'une quantité infiniment petite autour d'un axe passant par l'origine perpendiculairement à son plan, les points d'intersection des deux courbes sont sur la courbe donnée par l'équation symbolique

$$(xD_y - y)D_x \cdot F(x, y) = 0$$

de même degré que les courbes données et passant par l'origine. Pour les coniques, c'est une hyperbole équilatère.

$$4. \quad F(x, y, z) = 0,$$

étant l'équation d'une surface, si elle tourne infiniment peu autour d'un axe passant par l'origine et faisant avec les axes  $x, y, z$  supposés rectangulaires les angles  $l, m, n$ , les points d'intersection sont sur une troisième surface donnée par l'équation symbolique

$$\left[ \begin{array}{c} \cos l (zD_y - yD_z) + \cos m (xD_z - zD_x) \\ + \cos n (yD_x - xD_z) \end{array} \right] \cdot F(x, y, z) = 0.$$

$$5. \quad \left[ \begin{array}{c} (y \cos n - z \cos m) D_x + (z \cos l - x \cos m) D_y \\ + (x \cos m - y \cos l) D_z \end{array} \right] \cdot u = 0,$$

où  $u$  est une fonction de  $x, y, z$ . Telle est l'équation différentielle d'une surface de révolution; cette équation exprime que la perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation et un rayon vecteur, fait un angle droit avec la normale à la surface.

6. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + u_0 = 0$$

l'équation d'une courbe plane;  $u_p$  est une fonction homogène en  $x, y$  et de degré  $p$ . Les tangentes distantes de l'origine d'une quantité constante  $k$ , ont leurs points de contact sur une courbe de degré  $2(n-1)$  et donnée par l'équation

$$\begin{aligned} k^2 [(D_x U)^2 + (D_y U)^2] \\ = (u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \dots + nu_0)^2. \end{aligned}$$

## 7. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + u_0 = 0$$

l'équation d'une surface de degré  $n$ . Les plans tangents, distants de l'origine d'une quantité constante  $k$ , ont leurs points de contact sur une surface de degré  $2(n-1)$ , donnée par l'équation

$$k^2 [(D_x U)^2 + (D_y U)^2 + (D_z U)^2] \\ = (u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \dots + nu_0)^2.$$

8.  $\alpha, \beta, \gamma$  étant les coordonnées d'un point, l'équation de la surface polaire relative à ce point est

$$\alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U + (U) = 0,$$

où

$$(U) = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3u_{n-3} + \dots + nu_0.$$

Si le point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est une surface de degré  $m$  donnée par l'équation

$$V = v_m + v_{m-1} + \dots + v_0 = 0,$$

la surface enveloppe des surfaces polaires comporte les équations

$$D_x U \cdot d\alpha + D_y U \cdot d\beta + D_z U \cdot d\gamma = 0, \\ D_\alpha V \cdot d\alpha + D_\beta V \cdot d\beta + D_\gamma V \cdot d\gamma = 0,$$

d'où l'on tire les trois équations

$$D_\alpha V + \lambda D_x U = 0, \\ D_\beta V + \lambda D_y U = 0, \\ D_\gamma V + \lambda D_z U = 0.$$

Or on a

$$\alpha D^\alpha V + \beta D_\beta V + \gamma D_\gamma V = -(v_{m-1} + 2v_{m-2} + \dots + mv_0) = (V), \\ \alpha D_x U + \beta D_y U + \gamma D_z U = -(u_{n-1} + 2u_{n-2} + \dots + nu_0) = (U);$$

donc

$$\lambda = -\frac{(V)}{(U)}.$$

Pour avoir la surface enveloppe, il faut éliminer  $\alpha, \beta, \gamma$

entre les quatre équations

$$\begin{aligned} V &= 0, & \frac{1}{(V)} D_x V &= \frac{1}{(U)} D_x U, \\ \frac{1}{V} D_y V &= \frac{1}{(U)} D_y U, & \frac{1}{V} D_z V &= \frac{1}{(U)} D_z U, \end{aligned}$$

élimination que généralement on n'est pas parvenu à effectuer; elle est possible dans quelques cas particuliers.

Soit

$$V = \frac{\alpha^m}{a^m} + \frac{\beta^m}{b^m} + \frac{\gamma^m}{c^m} - 1 = 0.$$

Les trois dernières équations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_x U &= 0, \\ \frac{\beta^{m-1}}{b^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_y U &= 0, \\ \frac{\gamma^{m-1}}{c^{m-1}} + \frac{1}{(U)} D_z U &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant  $\alpha, \beta, \gamma$  entre ces trois équations et la quatrième  $V = 0$ , on obtient

$$(a D_x U)^{\frac{m}{m-1}} + (b D_y U)^{\frac{m}{m-1}} + (c D_z U)^{\frac{m}{m-1}} = [-(U)]^{\frac{m}{m-1}}.$$

Lorsque  $m = 2$ , cette équation est de degré  $2(n-1)$ ; si  $m = n = 2$ , l'équation est du second degré et de la forme

$$a^2 (D_x U)^2 + b^2 (D_y U)^2 + c^2 (D_z U)^2 = (u_1 + u_0)^2.$$

Si le pôle est sur une courbe centrale du second degré et que la polaire soit prise par rapport à une ligne du troisième degré, l'enveloppe de cette polaire est une courbe du quatrième degré donné par l'équation

$$a^2 (D_x U)^2 + b^2 (D_y U) = (u_2 + 2u_1 + u_0)^2.$$

*Note.* Ces théorèmes sont extraits du *Calculus of operations* du Rév. Carmichael (voir le *Bulletin*, t. I<sup>er</sup>, p. 83).