

**Relations entre les lignes trigonométriques
circulaires et les lignes analogues
hyperboliques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 151-156

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__151_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RELATIONS

Entre les lignes trigonométriques circulaires et les lignes analogues hyperboliques.

1. $y^2 - x^2 = -1$ est l'équation d'une hyperbole équilatère à axes rectangulaires; O le centre; A le sommet; M un point quelconque; $MP = y$, $OAP = x$ coordonnées du point M; R le point où une parallèle à l'axe OA, menée par M, rencontre la tangente en A; S le point où cette même tangente est coupée par le demi-diamètre OM; $OA = 1$. Faisons l'angle $ROA = z$; l'aire du secteur extérieur $MOAM = \frac{1}{2} \omega$, $MOP = \varphi$.

2. La quadrature connue de l'hyperbole donne (voir tome V, page 388)

$$e^{\omega} = x + y, \quad e^{-\omega} = x - y;$$

d'où

$$x = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \quad y = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2},$$

x et y sont des transcendentes auxquelles on a respectivement donné les noms de *cosinus hyperbolique* et de *sinus hyperbolique* de la variable ω et que l'on désigne ainsi,

$$x = \cos h. \omega, \quad y = \sin h. \omega.$$

Gudermann, comme nous avons vu, désigne ces lignes par les lettres de l'alphabet gothique; on a évidemment

$$\begin{aligned} \sin h. \omega &= \operatorname{tang} z, & \cos h. \omega &= \operatorname{séc} z, \\ \operatorname{tang} a. \omega &= \operatorname{sin} z, & \operatorname{sin} z &= \operatorname{tang} \varphi. \end{aligned}$$

D'après ces relations,

$$\omega = \log(\operatorname{tang} z + \operatorname{séc} z) = \log \operatorname{tang} \left(45^\circ + \frac{1}{2} z \right);$$

ainsi faisant croître z de 0 à 45° degrés, on pourra, au moyen des Tables des lignes trigonométriques circulaires, construire des Tables des lignes hyperboliques dites *trigonométriques* et des secteurs ω correspondants. Quoique, en toute rigueur, on puisse se passer de ces dernières lignes, il y a des cas où il est utile d'avoir ces Tables calculées d'avance. En effet, lorsque, dans la solution d'un problème, on a supposé qu'une certaine quantité était égale au cosinus d'un arc dès que cette quantité n'est plus renfermée entre les limites $+1$ et -1 , les limites comprises, la solution devient impossible; mais on peut alors égaler la quantité à un cosinus hyperbolique qui prend toutes les valeurs comprises entre $+\infty$ et $-\infty$, excepté celles qui sont renfermées entre $+1$ et -1 .

Exemple. Soit l'équation

$$x^3 - ax - b = 0;$$

faisant

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}} a, \quad \cos 3\omega = \frac{4b}{r^3},$$

on a

$$x = r \cos \omega;$$

solution impossible lorsque $\frac{4b}{r^3} > 1$. Dans ce cas, on fait

$$\cos h. 3\omega = \frac{4b}{r^3},$$

et alors

$$x = r \cos h. \omega.$$

Supposons

$$a = 3, \quad b = 4;$$

alors

$$r = 2, \quad \frac{4b}{r^3} = 2 = \cos h. 3\omega.$$

Consultant les Tables, on trouve qu'à ce cosinus correspond le secteur

$$3\omega = 0,5719475,$$

d'où secteur

$$\omega = 0,1906492;$$

et à ce dernier secteur correspond

$$\cosh \omega = 1,0979133.$$

Donc

$$x = r \cosh \omega = 2,1958266.$$

3. Nous avons pris cet exemple dans l'ouvrage de Lambert (J.-H.), intitulé : *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen tabellen, etc.* Additions aux Tables logarithmiques et trigonométriques pour faciliter et abrégér les calculs qui se présentent dans les applications des mathématiques. Berlin, 1770; in-8 de 210 pages. (*Bulletin de Bibliographie, d'Histoire et de Biographie mathématiques*; t. I^{er}, p. 28.)

La 32^e Table (page 178) est consacrée aux fonctions hyperboliques, et chaque double page est divisée en neuf colonnes.

Colonnes.

1 ^{re}	Valeurs de z (angle transcendant de Lambert) croissant par degré de zéro à 90 degrés,
2 ^e	Valeurs correspondantes du secteur $\frac{1}{2}\omega$,
3 ^e	— des sinus hyperboliques,
4 ^e	— des cosinus hyperboliques,
5 ^e	— log sinus hyperboliques,
6 ^e	— log cosinus hyperboliques,
7 ^e	— tang φ ,
8 ^e	— log tang φ ,
9 ^e	— φ évaluée jusqu'à la tierce,

le tout avec 7 décimales.

Les Tables bien plus étendues de Gudermann ont été éditées en Allemagne. Celles de M. Yvon Villarceau, encore meilleures, ne trouvent point d'éditeur en France (voir tome XI, page 412).

4. Les noms de sinus, cosinus, etc., donnés à ces fonctions hyperboliques sont justifiés par les relations suivantes, Table 38^e de Lambert (page 136) :

$$\sin h(y+z) = \sin hy \cos hz + \cos hy \sin hz,$$

$$\sin h(y-z) = \sin hy \cos hz - \cos hy \sin hz,$$

$$\cos h(y+z) = \cos hy \cos hz + \sin hy \sin hz,$$

$$\cos h(y-z) = \cos hy \cos hz - \sin hy \sin hz.$$

En effet, pour vérifier ces formules, il suffit de remplacer les sinus et cosinus par leurs évaluations exponentielles. Une manière plus simple est de remplacer y et z par

$$iy \text{ et } iz \text{ où } i = \sqrt{-1},$$

$$\sin h iy = i \sin y,$$

$$\cos h iy = \cos y,$$

$$\sin h iz = i \sin z,$$

$$\cos h iz = \cos z;$$

d'où

$$\sin h iy \cos h iz + \sin h iz \cos h iy = i \sin(y+z) = \sin h(iz + iy).$$

Faisons y égal à $-iy$ et z égal à $-iz$, on trouve la première formule.

Ces formules servent à la multiplication et à la multi-section de ces transcendentes

5. Nous voyons encore ici l'immense puissance qu'exerce sur nous l'habitude, même en mathématiques. Accoutumés que nous sommes à manier les Tables des logarithmes et des sinus, ces transcendentes nous semblent aussi simples que des quantités algébriques ordinaires, et dès qu'une question est ramenée à ces transcendentes, nous la considérons comme étant résolue, tandis que

d'autres transcendantes, telles que celles dont nous venons de parler, les transcendantes elliptiques, les *gamma*, etc., pour lesquelles les Tables n'existent pas ou sont peu connues, nous apparaissent sous un aspect effrayant, comme quelque chose d'éminemment difficile, et ces quantités très-utiles dans les applications sont repoussées de l'enseignement. A ce propos, nous jugeons opportun de traduire ici *en entier* le § 55 (page 48) de l'ouvrage cité de Lambert.

« Avant les temps de Neper, ceux qui faisaient de
 » l'arithmétique leur étude favorite trouvaient un passe-
 » temps agréable dans la comparaison des progressions
 » arithmétiques et géométriques, et fournissaient ainsi
 » à ceux qui aiment mieux injurier les mathématiques
 » que de les apprendre, un motif désiré de compter ces
 » *comparaisons* au nombre des plus *inutiles spéculations*.
 » Car alors aussi le *virtus post nummos*, s'opposait aux
 » progrès de la science. Toutefois Neper n'y fit pas at-
 » tention. Il compara les deux progressions pour voir si,
 » parmi les propriétés remarquables de cette théorie, on
 » n'en trouverait pas plusieurs autres. Les propriétés re-
 » marquables sont rarement isolées. C'est ainsi que
 » Neper parvint à en tirer les *logarithmes*, et par là la
 » chose cessa d'être une pure *spéculation*. »

Si Neper n'avait pas fait son invention, le calcul intégral n'en aurait pas moins mené à la transcendante $\int \frac{dx}{x}$, à laquelle on n'aurait certainement pas donné le nom de *logarithme*, et il se serait écoulé peut-être un temps très-long, avant de faire l'observation simple que $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{d(xy)}{xy}$ est une propriété fondamentale pour faciliter les calculs arithmétiques; c'est alors seulement qu'on se serait mis à construire des Tables pour

cette transcendante. Nous devons à Neper d'avoir cette construction probablement un siècle plus tôt. Ceux qui préconisent tant les logarithmes, ne savent pas qu'ils doivent cet admirable instrument à un arithmologue, à un homme aux spéculations abstraites et qui a même débuté par un écrit sur la théologie. Il en est de même partout. Que saurions-nous dans la mécanique pratique sans les méditations théoriques des Archimède, des Kepler, des Descartes, des Newton, des Leibnitz et autres illustres *réveurs*, que saurions-nous? Rien, rien, rien. Sans les travaux de ces hommes illustres nous n'existerions pas.
