NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Problème de tétragonométrie plane

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 9-10

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__9_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROBLÈME DE TÉTRAGONOMETRIE PLANE.

1. Problème. *Trouver une relation entre les quatre côtés et les deux diagonales d'un quadrilatère plan.*

Solution. Soient a, b, c, d les quatre côtés consécutifs; e, f les deux diagonales.

Faisons

$$P = 2a^2b^2 + 2a^2e^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4;$$
$$Q = 2c^2d^2 + 2c^2e^2 + 2d^2e^2 - c^4 - d^4 - e^4;$$
$$R = 2a^2d^2 + 2a^2f^2 + 2d^2f^2 - a^4 - d^4 - f^4;$$
$$S = 2b^2c^2 + 2b^2f^2 + 2c^2f^2 - b^4 - c^4 - f^4;$$

les deux expressions de l'aire du quadrilatère donnent la relation

$$\sqrt{P} + \sqrt{Q} = \sqrt{R} + \sqrt{S}.$$

Faisant disparaître les radicaux, on obtient

$$[P^2+Q^2+R^2+S^2-2(PQ+PR+PS+QR+QS+RS)]^2 = 64\,PQRS;$$

chaque terme est du seizième degré, mais sans exposants impairs (*).

Remarque. Ce problème a été traité par Goldbach (*Correspondance mathématique*, t. I, p. 75; 1736).

2. Pour le trapèze, a et c étant les bases, on obtient

$$b^2+d^2+2ac=e^2+f^2;$$

et cela à l'aide du théorème d'Euler, que la somme des carrés des quatre côtés d'un quadrilatère est égale à la somme des carrés des diagonales, plus le carré de la double distance des milieux des diagonales.

3. Soit ABCD le quadrilatère. On donne les côtés AB, BC, CD, DA et la diagonale BD; il s'agit de trouver la diagonale AC. Projetons A et C en A′ et C′ sur la diagonale BD; on peut calculer AA′, CC′, A′C′ en fonction des données, et l'on a

$$\overline{AC}^2=\overline{AA'}^2+\overline{CC'}^2+\overline{A'C'}^2;$$

c'est la solution de Goldbach.