NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur les fonctions symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 75-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__75_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I. — *Observations préliminaires.*

La prolixité des calculs qu'entraîne la théorie des fonctions symétriques a retardé jusqu'ici son introduction dans l'enseignement élémentaire. En effet, l'une des deux méthodes que renferment nos Traités d'algèbre exige que, pour calculer une fonction symétrique des racines d'une équation donnée, on l'exprime d'abord au moyen des sommes de puissances semblables de ces mêmes racines; et cette transformation peut déjà constituer à elle seule une longue opération. Après quoi il faut calculer successivement toutes les sommes de puissances semblables, depuis celles du premier degré jusqu'à celles du degré le plus élevé que comporte la fonction transformée, sans en manquer une, puisque chacune d'elles dépend des sommes de degré inférieur; enfin, substituer dans la fonction transformée les valeurs des sommes qu'elle renferme. L'autre méthode, due à M. Cauchy, très-précieuse par

les avantages théoriques qui lui sont propres, ne fait rien gagner sous le rapport de la brièveté. A la vérité, elle n'exige pas une transformation préalable; mais, au lieu d'opérer sur des symboles sommatoires, comme la première méthode, elle veut que la fonction proposée soit écrite en totalité, c'est-à-dire avec toutes les lettres $a, b, \ldots, k, l$ représentatives des racines de la proposée, ce qui donnera lieu presque toujours à un polynôme d'une longueur rebutante. Après cela, si $F(x) = 0$ est l'équation proposée, que je supposerai de degré m, il faut construire les $m - 1$ polynômes auxiliaires

$$\frac{F(x)}{x-a} = F_1(x); \quad \frac{F_1(x)}{x-b} = F_2(x), \ldots; \quad \frac{F_{m-2}(x)}{x-k} = F_{m-1}(x).$$

Et enfin, à l'aide de m divisions, où les polynômes suivants, en nombre égal,

$$F_{m-1}(l); \quad F_{m-2}(k), \ldots; \quad F_2(c); \quad F_1(b); \quad F(a),$$

sont employés comme diviseurs, on parvient à faire disparaître de la fonction proposée toutes les lettres $a, b, \ldots, k, l$.

Non-seulement ces longueurs font obstacle à l'enseignement de la théorie des fonctions symétriques dans les cours élémentaires; mais, comme elles rendent très-laborieuse la détermination effective de ces mêmes fonctions, il arrive que cette théorie, d'où nous tirons à peu près toutes nos connaissances sur les résultats généraux de l'élimination, est mise presque infailliblement de côté dans la pratique. D'après cela, les lecteurs des *Nouvelles Annales* verront, sans doute, avec intérêt qu'il est possible de simplifier très-notablement la théorie en question. Il suffit, pour cela, d'étendre convenablement un théorème d'algèbre déjà connu, et qui, à lui seul, constitue la nouvelle méthode par rapport à une classe très-étendue de fonctions.

II. — *Nouvelle méthode pour le calcul des fonctions symétriques.*

Dans une note, insérée à la page 169 du premier volume de ce Recueil, M. Desmaret a fait usage du théorème suivant : *Pour avoir la somme des valeurs que prend une fonction entière* $\varphi(x)$, *dans laquelle on remplace* x *successivement par toutes les racines de l'équation*

$$F(x) = 0,$$

il faut effectuer la division indiquée par l'expression $\frac{F'(x)\,\varphi(x)}{F(x)}$: *la somme en question sera le coefficient du terme de ce quotient, dans lequel l'exposant de* x *est* -1 ; *ou bien, ce qui est la même chose, ce sera le coefficient du premier terme du reste, si l'on arrête l'opération après avoir déterminé au quotient le terme indépendant de* x.

En effet, comme on a l'identité

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots,$$

il s'ensuit

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots = \pi(x) + \frac{\varphi(a)}{x-a} + \frac{\varphi b}{x-b} + \ldots,$$

où $\pi(x)$ est une fonction entière; et, dès lors, on a évidemment

$$\frac{F'(x).\varphi(x)}{F(x)} = \pi(x) + \frac{x^{m-1}\sum \varphi a + \ldots}{F(x)};$$

ce qui démontre le théorème.

Au lieu d'employer la division, on peut, à l'aide de l'équation $F(x)=0$, abaisser le degré du produit $F'(x)\,\varphi(x)$ jusqu'à être de degré inférieur d'une unité à celui de cette

même équation. Pour cela, il suffit de remarquer que, si $F(x) = 0$ est du degré m par exemple, on peut en déduire x^m, et toutes les puissances supérieures à la $m^{ième}$, en fonction de x^{m-1} et des puissances inférieures. Et alors, le coefficient de x^{m-1}, dans le produit $F'(x)\ \varphi(x)$ ainsi préparé, sera précisément égal à la somme demandée. J'appellerai ce second procédé *abaissement* ou *réduction*.

Voilà donc un moyen très-direct pour calculer la fonction symétrique

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \ldots + \varphi(l);$$

a, b, ..., l étant les racines d'une équation donnée.

Il est fort à regretter que M. Desmaret n'ait pas donné suite à son travail, puisqu'en présentant le théorème ci-dessus, avec toute l'extension dont il est susceptible, il en aurait pu déduire une méthode très-générale et très-expéditive pour le calcul de toute fonction symétrique.

Afin de justifier cette assertion, on va donner ici la marche à suivre pour le calcul d'une fonction dont la forme générale renferme explicitement deux ou trois lettres; et le lecteur étendra aisément la méthode au cas d'un plus grand nombre de lettres. De plus, je supposerai d'abord très-expressément qu'il s'agit de *fonctions entières*.

Supposons donc qu'il s'agisse de calculer la fonction symétrique dont le terme général est $\varphi(a, b)$; c'est-à-dire qu'on veut trouver la somme des valeurs que prend la fonction $\varphi(y, z)$, lorsqu'on y remplace successivement y et z par les racines d'une équation donnée $Fx = 0$. Ces racines combinées deux à deux de toutes les manières possibles, la fonction dont il s'agit aura pour symbole

$$\sum \varphi(y, z).$$

Il se doit entendre que la fonction algébrique entière

$\varphi(y,z)$ se compose de termes dans chacun desquels entrent y et z comme facteurs avec des exposants d'ailleurs quelconques, mais sans que l'un des deux exposants puisse être nul; car, s'il y avait de tels termes, c'est que la fonction proposée renfermerait une fonction symétrique de la nature de celles qu'on a examinées précédemment, dont le symbole est

$$\sum \varphi(y);$$

et l'on en ferait le calcul à part au moyen du théorème rapporté ci-dessus.

Donc, pour construire

$$\sum \varphi(y, z),$$

je fais premièrement le quotient de $F(x)$ par $x-a$, où a est censé être une des racines de la proposée. Soit ce quotient égal à $F_1(x)$; ses coefficients seront des fonctions entières de la lettre a, et l'équation

$$F_1(x) = 0$$

aura pour racines toutes celles de la proposée, moins la racine a.

C'est pourquoi le coefficient de x^{-1}, dans le quotient

$$\frac{F'_1(x).\varphi(a,x)}{F_1(x)},$$

sera la somme suivante :

$$\varphi(a,b) + \varphi(a,c) + \ldots + \varphi(a,l).$$

Maintenant, si l'on représente ce coefficient par $\psi(a)$, il n'y aura plus qu'à effectuer la somme des valeurs

$$\psi(a) + \psi(b) + \ldots + \psi(l),$$

ce qu'on obtiendra par la division de l'expression

$$\frac{F'(x)\ \psi(x)}{F(x)},$$

ou par la réduction du produit $F'(x)\ \psi(x)$.

Si l'on veut calculer la fonction à trois lettres

$$\sum \varphi(y, z, u),$$

où l'on doit remplacer y, z et u successivement par toutes les racines de $F(x) = 0$, combinées trois à trois de toutes les manières possibles, on construira le polynôme

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)} = F_2(x),$$

fonction entière, parce que a et b sont des racines de la proposée; fonction où les coefficients de x sont eux-mêmes des fonctions entières de a et b.

La réduction, au moyen de l'équation $F_2(x) = 0$, du produit

$$F'_2(x)\ \varphi(a, b, x)$$

donnera la somme des valeurs obtenues en substituant à x, dans $\varphi(a, b, x)$, toutes les racines de la proposée, moins les racines a et b. Le résultat sera une fonction entière de a et b, que je représente par $\psi(a, b)$; et il restera à calculer la somme des valeurs que prend la fonction $\psi(y, z)$, lorsqu'on y substitue successivement à la place de y et z toutes les racines de $F(x) = 0$ combinées deux à deux; ce qui ramène au cas précédent.

En résumé, si la forme de la fonction symétrique ne comporte qu'une seule lettre, il y a une seule division à faire: si elle comporte deux lettres, deux divisions, et ainsi de suite.

En outre, pour le cas de *deux* lettres, on doit former *une* fonction auxiliaire $\frac{F(x)}{x-a} = F_1(x)$; pour celui de *trois* lettres, *deux* fonctions auxiliaires, savoir, la précédente $F_1(x)$, et une seconde $\frac{F_1(x)}{x-b} = F_2(x)$; etc.

Ces fonctions sont celles qu'emploie aussi la méthode de M. Cauchy, avec la différence que M. Cauchy les construit toutes, quelle que soit la fonction à calculer. Je pourrai faire voir, dans une autre occasion, que chacune de ces fonctions auxiliaires peut s'écrire couramment, c'est-à-dire sans division et sans passer par les précédentes; à peu près comme on écrirait une fonction dérivée: ce qui n'est pas indifférent dans la pratique. Enfin, on verra, plus loin, que le nombre, déjà si restreint de divisions à effectuer, peut encore être diminué dans des cas très-étendus (*voir* ci-après, § V, page 87).

J'ai supposé expressément des *fonctions symétriques entières;* mais la méthode sera complétée, à cet égard, par le résultat important que M. Serret a donné dans son *Cours d'Algèbre supérieure;* savoir, que toute fonction rationnelle fractionnaire d'une ou plusieurs des racines d'une équation donnée se ramène, *par de simples divisions algébriques,* à une fonction entière. Et comme ce résultat, combiné avec la méthode ci-dessus, procure une démonstration nouvelle d'un très-beau théorème, je prie le lecteur de s'y arrêter un instant.

III. — *Démonstration d'un théorème d'algèbre.*

Soit à calculer la fonction

$$\sum \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

où le symbole sommatoire s'étend à toutes les racines d'une équation donnée $F(x) = 0$. On voit d'abord que $\psi(x)$ et $F(x)$ doivent être premiers entre eux; sans quoi la somme demandée aurait un ou plusieurs termes infinis. D'après cela, si l'on applique aux deux fonctions $F(x)$ et $\psi(x)$ la méthode du plus grand commun diviseur,

on est assuré d'arriver à un reste indépendant de x, que je représenterai par R_n. D'autre part, comme on doit remplacer x exclusivement par des racines de $F(x) = 0$, on verra bien que tous les restes de l'opération du plus grand commun diviseur, et, en particulier, le dernier reste R_n se trouvent exprimés par le produit de deux fonctions entières, dont l'une est $\psi(x)$; de sorte qu'on a

$$R_n = \psi(x)\,\theta(x),$$

$\theta(x)$ étant une fonction entière de x : et ainsi la question proposée revient au calcul de la fonction symétrique entière

$$\frac{1}{R_n}\sum \varphi(x)\,\theta(x).$$

De là on peut déduire la démonstration du théorème suivant, que, *si* $\psi(x)$ *désigne un polynôme quelconque du degré* $m-1$, *la somme*

$$\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)},$$

étendue aux racines de l'équation (*de degré* m *et sans racines égales*)

$$F(x) = 0,$$

a pour valeur le coefficient de x^{m-1} *dans* ψx.

En effet, le calcul de $\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)}$ revient, d'après ce qui précède, à celui de la fonction entière $\sum \frac{\psi(x)\,\theta(x)}{R_n}$, où R_n est un nombre avec la relation

$$R_n = \theta(x)\ F'(x).$$

D'un autre côté, il résulte de la nouvelle méthode pour les fonctions symétriques que la fonction entière $\sum \frac{\psi(x)\,\theta(x)}{R_n}$

sera exprimée par le coefficient de x^{-1} dans le quotient

$$\frac{\psi(x).\theta(x)}{R_n}.\frac{F'(x)}{F(x)};$$

ou, à cause de la valeur de R_n, dans le quotient

$$\frac{\psi(x)}{F(x)}.$$

Et puisqu'on a supposé $\psi(x)$ du degré $m-1$, la somme en question sera bien, comme on l'a annoncé, le coefficient du premier terme de $\psi(x)$.

Et d'après cela, si $\psi(x)$ est de degré inférieur à $m-1$, la fonction symétrique

$$\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)},$$

étendue à toutes les racines de l'équation de degré m $F(x)=0$, sera nulle.

Ces théorèmes résultent, si l'on veut, de la décomposition des fractions rationnelles. Mais on sait que, réciproquement, M. Liouville, après les avoir établis à priori, en a déduit, avec une rare facilité, cette même décomposition (1). C'est pourquoi il y avait quelque intérêt à en donner une démonstration purement algébrique.

IV. — *Démonstration d'une propriété fondamentale des fonctions symétriques.*

Le lecteur a pu remarquer que la nouvelle méthode possède, comme celle de M. Cauchy, l'avantage de démontrer directement que toute fonction symétrique entière est elle-même une fonction entière des coefficients, sans aucun diviseur numérique; puis qu'on l'obtient par de simples divisions algébriques, où le coefficient du premier terme dans les diviseurs est toujours égal à l'unité.

(*) Voir *Nouvelles Annales*, tome VI, page 127.

Mais il est une autre propriété des fonctions symétriques entières, propriété dont on fait usage dans la théorie de l'élimination, et qu'il faut déduire aussi de la méthode elle-même. Voici en quoi consiste cette propriété.

Écrivons l'équation proposée sous la forme

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0;$$

et si l'on donne une fonction rationnelle et entière des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_m$, on pourra faire, dans chacun de ses termes, la somme des indices des lettres p, en ayant soin de compter l'indice d'une même lettre autant de fois que cette lettre sera facteur. Cette somme faite sera l'*indice* du terme que l'on considère. C'est ainsi que les monômes

$$p_1^2 p_2; \qquad p_1 p_2 p_3; \qquad p_2^3 p_m$$

ont respectivement pour indices les nombres suivants

$$4; \qquad 6; \qquad 6+m.$$

Cette opération ainsi faite sur chaque terme, la somme la plus grande qu'on aura obtenue marquera l'*indice* de la fonction.

Or, si l'on donne la forme générale d'une fonction symétrique entière à une, ou deux, ou trois, etc., lettres, le *degré* de cette fonction est marqué, comme à l'ordinaire, par le plus haut exposant s'il y a une seule lettre, ou la plus haute somme d'exposants s'il y a plusieurs lettres.

D'autre part, quand la fonction a été calculée, elle est exprimée en fonction rationnelle et entière des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Elle a donc un certain *indice*.

Le théorème qu'il s'agit de démontrer est le suivant :

L'indice d'une fonction symétrique est égal à son degré.

Considérons premièrement une fonction symétrique à

une seule lettre, c'est-à-dire dont le symbole général est

$$\sum \varphi(x).$$

Comme la forme générale $\varphi(x)$ ne peut être que la somme de plusieurs puissances de x affectées respectivement de divers coefficients, il suffit de faire la démonstration dont il s'agit pour la fonction monôme

$$\sum \mathrm{A}\, x^n,$$

où A est un nombre.

Pour obtenir cette fonction, il faut effectuer la division indiquée par

$$\frac{\mathrm{A}\, m x^{m-1+n} + \mathrm{A}\,(m-1)\, p_1 x^{m-2+n} + \mathrm{A}\,(m-2)\, p_2 x^{m-3+n} + \ldots}{x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots}.$$

Or, si l'on représente le quotient par

$$q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \ldots + q_{r-1} x^{n-r} + q_r x^{n-r-1} + \ldots,$$

on aura, d'après les règles de la division algébrique,

$$q_r = -p_1 q_{r-1} - p_2 q_{r-2} - \ldots - p_r q_0 + (m-r)\,\mathrm{A}\, p_r.$$

Or, q_0 étant égal à $m\mathrm{A}$, a pour indice *zéro ;* donc les coefficients suivants, considérés comme fonctions des lettres p,

$$\begin{aligned} q_1 &= -p_1 q_0 + \mathrm{A}\,(m-1)\, p_1, \\ q_2 &= -p_1 q_1 - p_2 q_0 + \mathrm{A}\,(m-2)\, p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_r &= -p_1 q_{r-1} - \ldots, \end{aligned}$$

ont respectivement pour indices les nombres $1, 2, \ldots, r$. Donc enfin le coefficient de x^{-1}, qui sera représenté par q_n, et qui est la valeur de la fonction proposée de degré n, a pour indice le même nombre n.

Il est manifeste que si le coefficient A était lui-même une fonction rationnelle et entière des lettres p, son indice marquerait celui de q_0, et, par conséquent, s'ajouterait

à r pour former celui de q_r. Ainsi, l'indice de la fonction symétrique

$$A \sum x^n$$

sera égal à $n + n'$, si n' est l'indice de A.

A l'égard des fonctions à deux lettres, il suffit également de faire la démonstration, pour une fonction monôme telle que

$$\sum a^n b^{n'}.$$

Or, d'après les règles exposées, il faut effectuer d'abord la réduction du produit

$$a^n x^{n'} F'_1(x),$$

au moyen de l'équation auxiliaire $F_1(x) = 0$, et vu la forme de $F_1(x)$, savoir,

$$\begin{array}{l|l|l} x^{m-1} + a & x^{m-2} + a^2 & x^{m-2} + \ldots \\ \quad + p_1 & \quad + p_1 a & \\ & \quad + p_2 & \end{array}$$

il sera aisé de voir que cette réduction donnera une fonction ψa telle, qu'en chacun de ses termes le degré de a uni à l'indice de la lettre p fera une somme égale à $n + n'$; de sorte que la réduction qu'il faudra faire ensuite, c'est-à-dire la réduction de

$$\psi(x) F'(x),$$

au moyen de $F(x) = 0$, donnera nécessairement une fonction de l'indice $n + n'$.

Cette démonstration s'étendra de la même manière au cas d'un plus grand nombre de lettres.

Si l'on opère sur l'équation générale de degré m à deux inconnues x et y, les indices des coefficients de x marquent le degré de chacun d'eux en y. Par suite, le théorème qu'on vient de démontrer fait connaître le degré

en y de toute fonction symétrique des valeurs

$$x_1, x_2, \ldots, x_m,$$

qui satisfont à l'équation proposée; et c'est pourquoi ce théorème joue un grand rôle dans la théorie de l'élimination : mais nous pouvons aussi en tirer un moyen d'abréger, dans certains cas, le calcul des fonctions symétriques.

V. — *Abréviations et exemples.*

Première abréviation. Soit n le degré de la fonction symétrique. Si n est moindre que m, on peut supprimer dans $F(x)$, dans $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc., comme aussi dans $F'(x)$, $F'_1(x)$, $F'_2(x)$, etc., tous les coefficients dont l'indice est supérieur à n. Cela résulte manifestement du théorème ci-dessus démontré.

Deuxième abréviation. — A la proposition que nous avons prise pour point de départ, on peut ajouter les suivantes, dont le lecteur trouvera aisément la démonstration :

1°. La somme des valeurs que prend la fonction entière $a.\varphi(b)$, dans laquelle on remplace successivement a et b par toutes les racines de $F(x) = 0$ combinées deux à deux de toutes les manières possibles, est égale au second terme du reste dans la division de $F'(x)\,\varphi(x)$ par $F(x)$, ce second terme pris en signe contraire.

2°. Le coefficient du troisième terme, dans le même reste, ce coefficient pris d'ailleurs avec son signe, sera la valeur de $\sum a.b.\varphi(c)$; celui du quatrième terme, pris en signe contraire, donnera la valeur de $\sum a.b.c.\varphi(d)$, etc., et ainsi de suite.

D'après cela, si les formes générales $\varphi(a, b)$, $\varphi(a, b, c)$, etc., se réduisent à $a.\psi(b)$, $a.b.\psi(c)$, etc., il

n'y aura pas *deux ou trois* divisions à faire, mais *une seule*. Et de même, si la forme $\varphi(a, b, c)$ revient à la suivante $a\psi(b, c)$, il n'y aura pas lieu d'employer la seconde fonction auxiliaire, mais seulement la première; il n'y aura pas *trois* divisions à faire, mais *deux* seulement, et ainsi de suite.

En un mot, toute lettre qui entre dans $\varphi(a, b, \ldots)$, comme facteur de tous les termes et avec l'exposant 1, ne nécessite pas une division de plus, ainsi que la méthode générale semblait l'indiquer d'abord. Elle exige seulement que l'on considère un terme de plus dans le reste de la division qu'on effectue.

Troisième abréviation. Comme on ne veut obtenir de chaque division ou réduction qu'un terme unique, et dont le degré est connu d'avance, on s'abstiendra d'écrire tous les résultats partiels de calcul qui seraient relatifs aux termes de degré moindre, et cette attention simplifiera beaucoup le travail du calculateur.

Exemple. On demande la détermination de $\sum a^2 b$, avec l'équation générale

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \ldots = 0.$$

Il n'y aura ici qu'une seule division à faire; on n'aura à tenir compte que des quatre premiers termes de l'équation donnée. On n'écrira rien de ce qui devrait affecter les termes du reste au delà du second, c'est-à-dire au delà du terme qui est affecté de la première puissance de x dans le dividende, après qu'on a supprimé préalablement les puissances de x communes à tous les termes du dividende et du diviseur;

$$\begin{array}{l|l|l|l} mx^4 + (m-1)p_1x^3 + (m-2)p_2 & x^2 + (m-3)p_3 & x & \underline{x^3 + p_1x^2 + p_2x +} \\ \qquad + p_1^2 & \qquad + p_1p_2 & & mx - p_1 \end{array}$$

Ainsi le second terme du reste étant $-3p_3+p_1p_2$, on a donc

$$\sum a^2 b = 3p_3 - p_1p_2.$$

On vérifiera aisément ce résultat par la transformation très-facile de la fonction proposée en sommes de puissances semblables. Et ensuite le lecteur pourra mieux apprécier l'avantage de la nouvelle méthode, en s'exerçant sur quelque fonction moins simple, comme seraient

$$\sum a^2 bc, \quad \sum (a^3+\alpha a^2)(b^2+\beta b)cd,$$

où α et β sont des nombres donnés, et dont la première aurait exigé dans la division précédente seulement la conservation d'un terme de plus au dividende et au diviseur, tandis que la seconde s'obtiendra à l'aide de deux divisions.

Nota. La méthode ci-dessus exposée, pour le calcul des fonctions symétriques, a été communiquée à la Société Philomathique dans sa séance du 29 décembre 1849.