NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Théorème de Fermat et manuscrit arabe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 9 (1850), p. 386-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1850_1_9__386_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1850, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORÈME DE FERMAT ET MANUSCRIT ARABE

(voir t. VIII, p. 362).

Le *Journal* de M. Crelle (tome XL, 2e cahier) contient trois Mémoires arithmologiques de M. E.-E. Kummer, célèbre professeur à l'Université de Breslau. Les deux premiers Mémoires traitent de certaines classes et propriétés des nombres complexes (voir *Journal* de M. Liouville, tome XII, page 185; 1847). Le troisième Mémoire (du 29 juin 1849) est une conséquence des deux premiers, et porte ce titre :

Démonstration générale du théorème de Fermat,

savoir : *que l'équation* $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ *est insoluble en nombres entiers pour tous les exposants* λ *qui sont des nombres premiers impairs, et qui ne se trouvent pas comme facteurs dans les numérateurs des* $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ *premiers nombres Bernoulliens.*

Quoique, dans cet énoncé, on ne parle que de nombres entiers, la démonstration s'applique également aux nombres complexes formés avec les racines de l'unité de degré λ ; en consultant une Table des nombres Bernoulliens, on voit que les nombres premiers suivants satisfont à la condition, savoir :

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43.

Par exemple, le nombre 29 ne se rencontre pas comme facteur dans aucun des numérateurs des treize premiers nombres Bernoulliens, et ainsi des autres. Ainsi le théorème de Fermat est démontré pour tous ces nombres premiers, tandis que 37 se rencontre comme facteur dans l'un des numérateurs des dix-sept premiers nombres Bernoulliens. M. Kummer déclare que ses recherches sur les nombres complexes ne lui permettent de se prononcer ni sur la possibilité, ni sur l'impossibilité de l'équation

$$x^{37} + y^{37} = z^{37}.$$

Ainsi M. Kummer a découvert que, dans les nombres complexes formés avec les racines $\lambda^{ième}$ de l'unité, il existe dans leurs propriétés intimes des différences assez considérables, selon que λ, nombre premier impair, se trouve ou ne se trouve pas comme facteur dans un numérateur de l'un des $\frac{1}{2}(\lambda - 3)$ premiers nombres Bernoulliens. M. Crelle a acquis des droits à l'éternelle reconnaissance des géomètres, en accueillant et recueillant de magnifiques travaux sur la partie la plus noble, la plus géné-

reuse et la plus sublime de la science mathématique. (Voir *Note* à la fin.)

On a lieu d'être surpris que, malgré l'importance mystique qu'on attachait aux nombres dans l'école pythagoricienne et néoplatonicienne, la théorie des nombres ait fait si peu de progrès chez les Grecs, peuple de génie, et ait fait des progrès chez les Indiens, peuple réputé stationnaire. Deux causes ont peut-être contribué à ce résultat : les besoins du commerce ont créé l'arithmétique, de même que la division des champs et la construction des bâtiments ont fait naître la géométrie, surtout en Égypte. Or, chez les Grecs, les professions commerciales étaient décriées, et passaient pour des occupations serviles. Aussi ils ne cultivaient l'arithmétique qu'en vue de la musique, qui comptait parmi les arts libéraux ; tandis que l'Inde a été, de temps immémorial, le théâtre d'une immense activité commerciale.

C'est à cette activité qu'on doit sans doute l'invention d'une *numération écrite*, prompte, simple, parfaite ; système abrégé qui manquait totalement aux Grecs et aux Égyptiens. C'est la seconde cause, et probablement la principale. Il est même probable que ce système a été importé et propagé en Occident par des négociants israélites, longtemps avant que Fibonnaci ait rédigé et publié ce système. Il reste à expliquer pourquoi les Indiens, qui ont été si loin dans l'arithmétique, dans l'arithmologie, dans l'algèbre, se sont arrêtés si court dans la géométrie. On ne sache pas qu'ils aient eu connaissance des coniques ; du moins le *Lilawatti*, le *Vija-gannita* et le *Gannita-d'hyaya* n'en parlent point : la théorie de ces courbes paraît être une création entièrement grecque.

Les Arabes ont participé aux deux civilisations indienne et grecque ; ils ont cultivé avec succès les sciences de calcul et celles de l'espace.

Ainsi M. F. Wœpeke, professeur particulier à l'Université de Bonn, nous apprend (1) qu'un manuscrit arabe, composé par Aboul-Fath-Omar-ben-Ibrahim-Alkhâyâmi, et cité par Montucla, contient la construction des équations cubiques par l'intersection de deux coniques. L'auteur arabe donne le tableau de ces vingt-cinq équations, dont il s'occupe successivement.

Équations simples.

(1) $a = x$,
(2) $a = x^2$,
(3) $a = x^3$,
(4) $bx = x^2$,
(5) $bx = x^3$,
(6) $cx^2 = x^3$.

Équations composées.

(7) $x^2 + bx = a$,
(8) $x^3 + a = bx$,
(9) $bx + a = x^3$,
(10) $x^3 + cx^2 = bx$,
(11) $x^3 + bx = cx^2$,
(12) $cx^2 + bx = x^3$,
(13) $x^3 + bx = a$,
(14) $x^3 + a = bx$,
(15) $bx + a = x^3$,
(16) $x^3 + cx^2 = a$,
(17) $x^3 + a = cx^2$,
(18) $cx^2 + a = x^3$,
(19) $x^3 + cx^2 + bx = a$,
(20) $x^3 + cx^2 + a = bx$,
(21) $x^3 + bx + a = cx^2$,
(22) $cx^2 + bx + a = x^3$,
(23) $x^3 + cx^2 = bx + a$,
(24) $x^3 + bx = cx^2 + a$,
(25) $x^3 + a = cx^2 + bx$.

(*) Journal de M. Crelle, tome LX, page 160, 1850; en français.

Les équations (4-6 et 10-12) sont ramenées, par des procédés géométriques, à celles qu'on en déduit en les divisant par x et x^2. La résolution algébrique et géométrique des équations carrées ressemble à celle qui est donnée par Mohamed-ben-Mousa (*voir* tome V, page 567). M. Wœpeke a traduit tout ce qui concerne la construction des racines de l'équation (17), que l'auteur arabe effectue au moyen de l'intersection d'une hyperbole et d'une parabole. L'auteur arabe n'admet que les racines *positives*, et il considère les solutions négatives comme désignant des *impossibilités*. Le savant traducteur a mis des notes qui éclaircissent le texte. Le manuscrit appartient à la bibliothèque de Leyde. On n'en connaît pas la date précise : les deux limites sont le milieu du XI^e^ et la fin du XIV^e^ siècle. Montucla mentionne ce manuscrit (*Histoire des Mathématiques,* tome I, page 385), d'après la préface d'un ouvrage du célèbre Meermann (Gerard), et intitulé : *Specimen calculi fluxionalis* (1742, in-4°). A cette occasion, Montucla se plaint de ce que les mathématiciens négligent l'étude de l'arabe, et les arabistes l'étude des mathématiques. Ce reproche ne peut pas s'adresser à l'Allemagne; M. Wœpeke possède les sciences de calcul, comprend l'idiome arabe, et écrit avec clarté notre langue. La Société asiatique devrait engager et encourager ce jeune professeur à publier le texte d'*Alkhâyâmy*, avec une traduction française. C'est un nouveau service que cette illustre Société rendrait à l'érudition orientale.

Nous remarquerons que les Arabes, en empruntant aux Grecs la construction des *lieux solides*, en ont augmenté l'étendue; mais, jusqu'ici, on ne sache pas qu'ils aient connu la solution de Cardan. Toutefois les constructions géométriques peuvent amener à la solution algébrique de l'équation du quatrième degré.

En effet, soit donnée une équation du quatrième degré; on construit les racines à l'aide de l'intersection de deux coniques. Représentons les équations de ces coniques par $P=0, Q=0$, à l'une de ces coniques on peut substituer une troisième conique représentée par l'équation $P+\mu Q=0$, où μ est un coefficient arbitraire ; et l'on détermine ce coefficient de manière que cette troisième conique se réduise à deux droites. La question est ramenée à l'intersection d'une conique et de deux droites, et, par conséquent, à une équation quadratique. Or, pour que la troisième conique représente deux droites, il faut poser $L=0$; L est l'expression $AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE + 4ACF$ rapportée à l'équation hexanôme (*). Cette détermination donne pour μ une équation du troisième degré, qui n'est autre que la *réduite* de la solution algébrique. Cette observation a été faite depuis longtemps par M. Lamé, dans son excellent Opuscule sur *Diverses méthodes géométriques* (**). Cette méthode n'est pas applicable à l'équation du troisième degré ; elle conduit à une réduite aussi de ce degré. On n'a pas encore fait pour le quatrième degré ce que M. Bonniakowski a fait pour le troisième (tome IV, page 382) ; savoir :

Étant donnée l'équation générale

$$a_0 x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

et la résolvant par la méthode connue, comment déduit-on les trois racines lorsque a_0 devient zéro?

Note. La théorie des nombres est peu cultivée, et communément même dédaignée en France, et pour de bonnes raisons. Cette théorie ne fait pas tourner des roues, ne fait pas ouvrir des vannes, ne fait condenser ni gaz ni

(*) L est le *déterminant* de l'équation hexanôme rendue homogène.

(**) LAME (G.), *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*. Paris, Vve Courcier, 1818 ; in-8o.

vapeur, et, ce qui est encore pis, ne sert pas aux examens; dès lors les esprits calculateurs, partout en majorité, sont en droit de demander à quoi bon étudier une théorie qui ne rapporte rien. Mon intelligence bornée ne me fournit aucune réponse à de semblables questions. Le bruit court que, par le même esprit de calcul, le prochain règlement de l'École Polytechnique *proscrira* la mécanique *rationnelle* des Lagrange, des Laplace, des Poisson, et *prescrira* la mécanique *très-industrielle* de ces messieurs. Comme je crois à la pudeur, je ne crois pas à cette nouvelle : il y a quelque malentendu. (Septembre, 26.)