NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Nouvelle démonstration de l'irréductibilité de l'équation $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$; p étant un nombre premier. D'après M. L. Kronecker, étudiant à Berlin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 419-421

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__419_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOUVELLE DÉMONSTRATION

De l'irréductibilité de l'équation $1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} = 0$; p étant un nombre premier;

D'APRÈS M. L. KRONECKER,
Etudiant a Berlin.

(Journal de M. Crelle, tome XXIX, page 280; 1845.)

1. *Lemme.* p étant un nombre premier, soit α une racine imaginaire de l'équation $x^p - 1 = 0$; $a, a_1 \ldots a_{p-1}$ sont p nombres entiers donnés; faisant

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} = f(x),$$

et

$$a + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = f(1) = \mathrm{A}, \quad f(\alpha) f(\alpha^2) \ldots f(\alpha^{p-1}) = \mathrm{B}.$$

On sait que B est un nombre rationnel entier; on aura

$$\mathrm{B} - \mathrm{A}^{p-1} = \dot{p} \ (*).$$

Démonstration. Posant

$$a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^{p-1} = f(x),$$

(*) Je designe par le point leibnitzien place au-dessus d'un nombre le multiple de ce nombre.

on aura

$$f(x)f(x^2)\dots f(x^{p-1}) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \dots + M_n x^n + \dots$$

Faisant successivement x égal à 1, α, $\alpha^2 \dots \alpha^{p-1}$, le membre à gauche devient d'abord A^{p-1}, et pour les autres racines le produit reste toujours égal à B ; il n'y a de changement que dans l'ordre des facteurs. Donc la somme de ces membres à gauche est $A^{p-1} + (p-1)B$. Prenons dans le membre à droite le terme général $M_n x^n$, la somme sera

$$M_n[1 + \alpha^n + \alpha^{2n} + \dots + \alpha^{(p-1)n}].$$

On sait que lorsque n n'est pas un multiple de p, ce qui multiplie M_n est nul ; et lorsque n est un multiple de p, ce coefficient est égal à p ; donc

$$A^{p-1} + (p-1)B = p(M_0 + M_p + M_{2p} + \dots);$$

de là

$$B - A^{p-1} = p. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

THÉORÈME II. *La fonction* $X = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$, *où p est un nombre premier, ne peut être le produit de deux fonctions rationnelles à coefficients entiers.*

Démonstration. Soit

$$X = \varphi(x)\ \psi(x),$$

φ et ψ sont des fonctions rationnelles à coefficients entiers; ils ne peuvent avoir des coefficients fractionnaires (t. III, p. 47); faisant $x = 1$, on obtient

$$p = \varphi(1)\ \psi(1);$$

il faut que l'une de ces deux valeurs $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ soit égale à l'unité et l'autre à p. Supposons donc $\varphi(1) = 1$; α étant une racine imaginaire quelconque de $X = 0$, on a, d'après le lemme,

$$\varphi(\alpha)\ \varphi(\alpha^2) \dots \varphi(\alpha^{p-1}) - 1 = p;$$

car

$$A = \varphi(1) = 1.$$

En prenant pour α une racine commune à $X = 0$ et $\varphi(x) = 0$, on aurait donc $-1 = \dot{p}$, résultat absurde; donc, etc.

Remarque. Ce théorème fondamental est dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, p. 599, § CCCXLI; et l'on en trouve aussi une démonstration dans Legendre. Celle de M. Kronecker semble la plus simple.