C.-G.-J. JACOBI

Expression de chaque racine des équations du 2ème, 3ème et 4ème degré en fonction symétrique de toutes les racines

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 22-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__22_1>

EXPRESSION

de chaque racine des équations du 2ème, 3ème et 4ème degré en fonction symétrique de toutes les racines.

PAR M. C.-G -J. JACOBI.

(Crelle, t. XIII, p. 340. 1835, en latin.)

La résolution algébrique des équations exige que chaque racine (*) puisse être exprimée en fonction symétrique de

(*) L'auteur, dans tout le cours de ce travail, désigne les racines par le mot *elementa*. En effet les coefficients sont des combinaisons dont les racines sont les *éléments*.

toutes les racines. On sait que cela est possible pour les équations du 2ème, 3ème et 4ème degré; mais comme ces fonctions symétriques ne sont pas indiquées dans les ouvrages élémentaires, je vais les exposer brièvement.

Résolution des équations du 2ème degré.

Les racines étant a et b, chacune est exprimée par la formule

$$\frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2}.$$

Résolution des équations du 3ème degré.

Les trois racines étant a, b, c, posons :

$$a+b+c=u\,;\quad a+\alpha b+\alpha^2 c=u'\,;\quad a+\alpha^2 b+\alpha c=u''\,;$$

α et α^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité ; d'où l'on tire

$$a=\frac{u+u'+u''}{3}\,;\quad b=\frac{u+\alpha^2 u'+\alpha u''}{3}\,;\quad c=\frac{u+\alpha u'+\alpha^2 u''}{3}\,;$$

faisons

$$u'=(v+\sqrt{w})^{\frac{1}{3}}\,;\quad u''=(v-\sqrt{w})^{\frac{1}{3}}\,;$$

d'où

$$v=\frac{u'^3+u''^3}{2}=\frac{(u'+u'')\,(u'+\alpha u'')\,(u'+\alpha^2 u'')}{2}$$

$$\sqrt{w}=\frac{u'^3-u''^3}{2}=\frac{(u'-u'')\,(u'-\alpha u'')\,(u'-\alpha^2 u'')}{2}\,;$$

remplaçant u' et u'' par leurs valeurs, il vient

$$v=\frac{(2a-b-c)\,(2b-c-a)\,(2c-a-b)}{2}$$

$$\sqrt{w}=\frac{3\sqrt{-3}}{2}\,(a-b)\,(a-c)\,(b-c)=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{-3(a-b)^2\,(a-c)^2\,(b-c)^2}\,;$$

u, u', u'' sont donc exprimés en fonction symétrique des racines, et par conséquent aussi les racines a, b, c (*).

On a

$$u'u'' = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc =$$
$$= \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2}{2} = (v^2 - w)^{\frac{1}{3}};$$

mettant à la place de v et de w les valeurs trouvées, on obtient une identité remarquable.

Résolution des équations du 4ème degré.

Soient a, b, c, d les quatre racines.

Posons

$$a+b+c+d = u;\quad a+b-c-d = u';\quad a-b+c-d = u'';$$
$$a-b-c+d = u''';$$

d'où

$$a = \frac{u+u'+u''+u'''}{4};\quad b = \frac{u+u'-u''-u'''}{4};$$
$$c = \frac{u-u'+u''-u'''}{4};\quad d = \frac{u-u'-u''+u'''}{4}.$$

Dans les formules relatives à la résolution des équations du 3ème degré, remplaçons a, b, c respectivement par u'^2, u''^2, u'''^2, on obtient

$$2v = (2u'^2 - u''^2 - u'''^2)(2u''^2 - u''''^2 - u'^2)(2u'''^2 - u'^2 - u''^2)$$
$$2\sqrt{w} = 3\sqrt{-3}\,(u'^2 - u''^2)(u'^2 - u'''^2)(u''^2 - u'''^2);$$

or,

$$u'^2 - u''^2 = (i' + u'')(u' - u'') = 4(a-d)(b-c)$$
$$u'^2 - u'''^2 = (u' + u''')(u' - u''') = 4(a-c)(b-d)$$
$$u''^2 - u'''^2 = (u' + u''')(u' - u''') = 4(a-b)(c-d);$$

ensuite

$$2u'^2 - u''^2 - u'''^2 = 8(ab+cd) - 4(ac+bd) - 4(ad+bc)$$
$$2u''^2 - u'''^2 - u'^2 = 8(ac+bd) - 4(ad+bc) - 4(ab+cd)$$
$$2u'''^2 - u'^2 - u''^2 = 8(ad+bc) - 4(ab+cd) - 4(ac+bd);$$

(*) Nous supprimons le développement, que chacun peut écrire.

posons de plus

$$s = u'^2 + u''^2 + u'''^2,$$

la résolution ci-dessus des équations du 3ème degré donne

$$4a = u + \sqrt{\frac{s + \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \sqrt[3]{v - \sqrt{w}}}{3}}$$

$$+ \sqrt{\frac{s + \alpha\sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha^2\sqrt[3]{v - \sqrt{w}}}{3}}$$

$$+ \sqrt{\frac{s + \alpha^2\sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha\sqrt[3]{v - \sqrt{w}}}{3}},$$

et de même $4b$, $4c$, $4d$.

Or

$$s = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$$

$$v = 32[2(ab+cd)-(ac+bd)-(ad+bc)]$$
$$[2(ac+bd)-(ad+bc)-(ab+cd)]$$
$$[2(ad+bc)-(ac+bd)-(ad+bc)$$

$$w = -3[96(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)]^2;$$

u, s, w étant donc des fonctions symétriques des racines, on satisfait à la question. On a

$$\sqrt[3]{(v + \sqrt{w})(v - \sqrt{w})} = \sqrt[3]{v^2 - w} =$$

$$= u'^4 + u''^4 + u'''^4 - u'^2u''^2 - u'^2u'''^2 - u''^2u'''^2$$

$$= 8[(a-b)^2(c-d)^2 + (a-c)^2(b-d)^2 + (a-d)^2(b-c)^2]$$

$$\left[s + \sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \sqrt[3]{s - \sqrt{w}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[s + \alpha\sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha^2\sqrt[3]{v - \sqrt{w}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[s + \alpha^2\sqrt[3]{v + \sqrt{w}} + \alpha\sqrt[3]{v - \sqrt{w}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(s^3 + 2v - 3\sqrt[3]{v^2 - w}\right)^{\frac{1}{2}} = uu'u'' =$$

$$= (a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$

Ces expressions étant symétriques par rapport aux racines, on voit que deux racines *cubiques* peuvent s'exprimer l'une par l'autre, et des trois racines *quadratiques*, que nous avons désignées par u', u'', u''', une peut se déterminer par les deux autres. A l'aide de cette observation, on voit comment cette grande ambiguïté de radicaux ne représente pourtant que quatre quantités diverses.

Considérations générales.

Si nous examinons attentivement la composition des expressions qui représentent les quatre racines, nous voyons qu'il faut d'abord extraire la racine carrée d'une fonction symétrique des racines ($\sqrt{w}$), et extraire la racine cubique de celle-ci, jointe à une autre fonction symétrique (v), et ensuite réunir celle-ci à une semblable racine cubique ; ajouter à ce résultat une troisième fonction symétrique (s), et extraire la racine carrée du tout ; formant trois semblables racines quadratiques et les réunissant à une quatrième fonction symétrique u, on obtient les quatre racines. Ces extractions de racines ne peuvent être qu'indiquées si les quantités sous les radicaux sont exprimées en coefficients de l'équation du quatrième degré, à laquelle ces racines appartiennent ; mais si les quantités sous les radicaux sont exhibées en fonction de racines elles-mêmes, comme nous avons fait, alors nous voyons que les extractions deviennent possibles, et amènent successivement à diverses fonctions non symétriques des racines jusqu'à ce qu'on parvienne à chaque racine en particulier.

On voit que dans ces questions il faut commencer par chercher des fonctions non symétriques, lesquelles, élevées à certaines puissances, deviennent symétriques ; car on ne peut pas autrement parvenir à des fonctions non symétriques, par des extractions de racines opérées sur des fonctions symétriques. Mais il n'y a d'autres fonctions de ce genre que le produit formé des différences des racines, et tel qu'en permutant les racines on obtient deux valeurs de signes opposés, et le carré de ce produit donne alors une fonction symétrique. Ainsi dans les solutions précédentes le dernier radical doit surmonter et surmonte en effet un carré ; donc ce radical doit être quadratique ; c'est ce qui résulte aussi de la considération suivante.

Supposons les coefficients de l'équation fonctions d'une quantité t, et soit x la racine ; l'équation peut s'écrire $F(x, t)=0$; d'où $\frac{dx}{dt} = -\frac{F'(t)}{F'(x)}$. Si l'équation a deux racines égales, et que nous les prenions pour x, $\frac{dx}{dt}$ devient infini. Si donc x peut s'exprimer en t à l'aide de radicaux, l'expression doit être ainsi formée que la différentiation amène un dénominateur qui s'évanouisse toutes les fois que deux racines deviennent égales, ce qui n'est autrement possible que lorsque ce dénominateur est formé du carré du produit des différences de toutes les racines de l'équation. Ainsi le carré doit se trouver, dans ces expressions, seul sous le radical, sans être joint par addition à d'autres quantités ; en d'autres termes, il doit être le radical ultime, ainsi que nous l'avons vu dans la résolution algébrique des équations du 2^{eme}, 3^{eme} et 4^{eme} degré.

On a souvent fait l'observation que si on donne la résolution algébrique d'une equation du $n^{ème}$ degré, aucune relation n'existant entre les racines, l'expression des racines doit impliquer nécessairement tant de radicaux qu'elles puissent convenir aussi aux solutions des équations de degré inférieur ; de là on est facilement porté à conjecturer que le nombre des dimensions auquel monte l'expression renfermée sous le radical ultime (w), ne peut être moindre que le plus petit multiple des nombres 2, 3, 4...n ; pour n=2, 3, 4, ce plus petit multiple est 2, 6, 10, et c'est aussi dans ces cas, le nombre des dimensions du carré du produit des différences des racines qu'on trouve sous le radical ultime; mais pour n=5, le moindre multiple est 60, pendant que le nombre des dimensions du carré est seulement de 20 et monte en général au nombre $n(n-1)$; cet accord manque aussi pour des nombres supérieurs à 5.