NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Notice sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 153-162

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__153_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTICE SUR L'ÉLIMINATION.

Suite. (V. t. I, p. 125.)

FONTAINE, VANDERMONDE, LAPLACE.

—

9. Considérées en elles-mêmes, les formules de Cramer, indépendamment de leur application primitive, jouent un

grand rôle dans la théorie combinatoire, dans la théorie des nombres, dans la résolution générale des équations, dans le calcul aux différences finies, et dans l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles, et renferment même le contenu de beaucoup de théorèmes géométriques : aussi ces formules se sont-elles présentées à tous ceux qui ont cherché la forme générale soit des racines des équations algébriques, soit des intégrales des équations différentielles. Au premier rang parmi ces géomètres, dans l'ordre de date, il faut compter Fontaine (*). Calculateur intrépide, profond dans l'art combinatoire, il a signalé le premier une belle identité dont il tire un grand parti (**). Cette identité consiste en ceci : soient huit quantités quelconques, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 ; pour abréger, nous représentons, avec Vandermonde, par $[1, 2]$ le binôme $x_1y_2 - x_2y_1$, et ainsi des autres. Cette notation admise, l'identité peut s'écrire ainsi :

$$[1, 2][3, 4] + [1, 4][2, 3] = [1, 3][2, 4].$$

10. La même identité peut se traduire en langage géométrique. En effet, les huit quantités représentant les coordonnées rectangulaires de quatre points situés sur un même plan, chaque binôme est le double de l'aire d'un triangle, ayant pour sommets l'origine et deux de ces points. De là ce théorème : Si d'un point O situé dans le plan du quadrilatère ABCD, on mène des droites aux quatre angles, on a :

$$OAB \times OCD \pm OBC \times OAD = OAC \times OBD.$$

Par OAB on entend l'aire du triangle OAB et ainsi des autres. On prend le signe supérieur quand le point O est en dehors

(*) Fontaine (des Bertins, Alexis), né à Claveison (Drôme), vers 1705, mort en 1771.

(**) Traité de Calcul différentiel et intégral, p. 90, in-4., 1770. C'est un recueil de mémoires ; celui que nous citons est de 1748.

du quadrilatère, et le signe inférieur quand le point O est dans l'intérieur du quadrilatère.

Vandermonde.

11. Un des génies les plus abstraits du dernier siècle, Vandermonde, élève de Fontaine (*), a eu l'ingénieuse idée de prendre la question à rebours. Au lieu de chercher directement la résolution générale de n équations du premier degré à n inconnues, il a entrepris de démontrer que la formule de Cramer convient à ces équations. Dans cette vue, il change et améliore encore la notation de son devancier. Chaque coefficient est désigné par deux chiffres superposés ; le supérieur indique le quantième de l'équation, et l'inférieur la place de l'inconnue dans l'équation. Ainsi $\frac{5}{3}$ désigne le coefficient de la troisième inconnue dans la cinquième équation. Bien entendu que les inconnues conservent toujours respectivement la même place que dans la première équation.

12. Pour former le dénominateur, il a recours à une méthode récurrente, différente de celle de Bezout, mais susceptible de s'écrire d'une manière fort abrégée (**).

Dans cette notation, il fait usage d'un genre de combinaisons que les Allemands désignent sous le nom de combinaisons *cycliques* : ce sont les arrangements *circulants* de M. Cauchy. Ils se présentent fréquemment dans la théorie des fonctions symétriques des racines et servent à la résolution générale des équations binômes ; il est utile de les connaître. Pour fixer les idées, supposons 4 éléments à combiner, que nous représentons par les nombres 1, 2, 3, 4 ; ils donnent 24 arrangements. Écrivons le premier arrangement 1, 2, 3, 4 autour

(*) Vandermonde, né à Paris en 1735, mort le 1er janvier 1796 ; les prénoms de Vandermonde ne sont indiqués dans aucune notice biographique.

(**) Mém. de l'Acad. des Sc., 1772, 2e partie, p. 516.

d'une circonférence ; en commençant par 2 et circulant, on obtient l'arrangement 2341 ; partant de 3, on a 3412, et puis 4123 ; ensuite on retombe sur le premier arrangement 1234. On a ainsi un premier groupe :

1234
2341
3412
4123

Écrivons maintenant sur la circonférence 1324 et opérant de même, on obtient le second groupe :

1324
3241
2413
4132

En général, on écrit successivement sur la circonférence les six arrangements qui se terminent à droite par 4 ; chacun fournit un groupe circulant de 4 arrangements, et en tout 24 arrangements, et, comme il est facile de voir, essentiellement différents. Par conséquent, on a ainsi les arrangements possibles décomposés en six groupes. Si on avait 5 objets à combiner, on conçoit qu'on écrive circulairement les 24 arrangements terminés à droite par 5 ; chacun fournit un groupe de 5 arrangements, et ainsi de suite.

13. Cela posé, rappelons que $\overset{\alpha}{a}$ désigne le coefficient de l'inconnue qui occupe la place a dans l'équation du rang α. Voici, d'après cette convention, la notation de Vandermonde :

$$\frac{\alpha \mid \beta}{a \mid b} = \overset{\alpha}{a} \cdot \overset{\beta}{b} - \overset{\alpha}{b} \cdot \overset{\beta}{a} \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha \mid \beta \mid \gamma}{a \mid b \mid c} = \overset{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta \mid \gamma}{b \mid c} + \overset{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta \mid \gamma}{c \mid a} + \overset{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta \mid \gamma}{a \mid b} \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \overset{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - \overset{\alpha}{b} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + \overset{\alpha}{c} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - \overset{\alpha}{d} \cdot \frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c} \qquad (3)$$

et ainsi de suite.

On voit 1° que les lettres grecques conservent un ordre invariable ; 2° que les lettres latines suivent un ordre circulant ; 3° lorsque le nombre des lettres est pair, les termes sont alternativement positifs et négatifs ; si le nombre des lettres est impair, les termes de la formule sont tous positifs. C'est en ce point que ce procédé se rattache à celui de Cramer.

Si on traduit ces formules selon la notation usitée, elles deviennent :

$$\frac{\alpha \mid \beta}{a \mid b} = ab' - a'b,$$

$$\frac{\gamma \mid \beta \mid \gamma}{a \mid b \mid c} = a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b').$$

14. Ensuite Vandermonde établit cette proposition fondamentale : en changeant mutuellement deux lettres du même alphabet, la fonction représentée par abréviation ne fait que changer de signe.

Cette proposition est basée sur deux autres, qu'il démontre péniblement. Nous préférons la démonstration plus claire, plus facile de Laplace, que nous donnons ci-dessous.

15. Un corollaire important découle de cette proposition : Si deux lettres du même alphabet deviennent égales, la formule devient identiquement nulle. En effet, en changeant entre elles ces deux lettres devenues égales, la formule restera évidemment la même, et toutefois elle doit changer de signe, d'après la proposition fondamentale (14) ; or une quantité ne peut conserver sa valeur, en changeant de signe, que lorsqu'elle est nulle.

A l'aide de corollaires, on démontre ensuite facilement, comme nous verrons plus bas, que les formules de Cramer résolvent complétement les équations du premier degré.

16. En combinant ensemble les équations (2) et (3), Vandermonde exprime la formule avec quatre lettres en produits

de formules en deux lettres. A cet effet, il remplace $\frac{\beta \mid \gamma \mid \delta}{b \mid c \mid d}$ par sa valeur tirée de l'équation (2), et ainsi des autres. Cette décomposition facilite les calculs numériques.

Laplace.

17. Dans un mémoire intitulé : Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, et qui contient la base des méthodes d'approximation développées depuis dans la Mécanique céleste, l'illustre géomètre est amené à résoudre n équations linéaires à n inconnues (*). « Les géomètres, » dit-il, ont donné pour cet objet des règles générales, mais » comme elles ne me paraissent avoir été jusqu'ici démon- » trées que par induction, et que, d'ailleurs, elles sont im- » praticables pour peu que le nombre des équations soit con- » sidérable, je vais reprendre de nouveau cette matière et » donner quelques procédés plus simples que ceux qui sont » déjà connus. »

Laplace ne cite que Cramer et Bezout, sans faire aucune mention du travail de Vandermonde, qui a précédé le sien, quoique imprimé dans le même volume. Il est extrêmement probable que Laplace n'a pas pris connaissance du mémoire de son confrère : on sait, d'ailleurs, que les analystes français lisent peu les ouvrages les uns des autres. Ceci nous explique également comment la résolution de l'équation du onzième degré à deux termes, la plus importante découverte de Vandermonde, soit restée ignorée jusqu'à ce qu'elle ait attiré l'attention de Lagrange, après la découverte similaire de M. Gauss.

18. Laplace adopte la notation et la méthode récurrente

(*) Mémoires de l'Acad. des Sciences, 2e partie, p. 294. C'est le deuxième mémoire de Laplace, le premier est inséré dans le Recueil des Savants étrangers, t. VII.

de Bezout : il nomme *variation* ce que Cramer appelle *dérangement*. Il montre d'abord que la règle de Bezout retombe dans celle de Cramer. Cela est évident pour les deux permutations $+ ab - ba$; en écrivant dans ces deux termes la lettre c la dernière, le nombre de variations dans chacun d'eux reste le même, aussi conservent-ils le même signe qu'ils avaient ; mais si, dans ces termes, on écrit la lettre c l'avant-dernière, le nombre de leurs variations est augmenté d'une unité, et suivant la règle, ils changent de signe ; car un nombre ne peut augmenter de l'unité sans changer de parité. Si l'on écrit la lettre c l'antépénultième, le nombre de variations augmente de deux unités : alors le premier signe du terme reparaît, et ainsi de suite pour un plus grand nombre de facteurs. En général, tous les termes dont le nombre de variations sera nul ou pair auront le signe $+$ et les autres le signe $-$. D'ailleurs le nombre de termes est, suivant les deux méthodes, égal à $1.2.3 \ldots . n - 1$, n s'il y a n lettres ; et tous ces termes sont différents les uns des autres. Donc les formules qu'on obtient par les deux procédés sont identiques. Il suffit donc de s'en tenir à la méthode de Bezout.

19. Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait 10 lettres ; pour connaître le signe d'un terme, il faudra compter le nombre de *variations* relativement à la première lettre à gauche, ensuite relativement à la seconde lettre, jusqu'à la pénultième inclusivement, et ajouter tous ces nombres. Si la première lettre restant à sa place, on permute les autres d'une manière quelconque ; il est evident que le nombre de variations dépendant de la première lettre n'a pas changé ; car elle sera toujours suivie de lettres plus avancées et moins avancées qu'elle dans l'alphabet, dans un autre ordre, mais toujours dans le même nombre ; et si l'on rend fixes les deux premières lettres, quelque permutation qu'on fasse entre les

huit dernières, le nombre de variations dépendantes des deux lettres fixes ne change pas, et ainsi de suite. Il en est de même si l'on rend fixes les lettres à droite.

20. En général, le nombre des lettres étant n, si on rend fixes les p premières lettres et les q dernières d'un terme, quelque permutation qu'on fasse entre les $n-p-q$ lettres intermédiaires, le nombre de variations provenant des lettres fixes reste toujours le même. Le changement dans le nombre total des variations ne peut provenir que des lettres mobiles.

21. Donc, si on rend mobiles seulement deux lettres adjacentes, il est évident que leur échange de place amènera ou une variation en plus ou en moins; le nombre total de variations changera donc de parité; par conséquent, suivant la règle, le signe du terme changera.

22. Reprenons l'exemple du § 19. Soit un terme de 10 facteurs et où la lettre quelconque d occupe la septième place, et la lettre f la première place. Admettons que le terme a le signe $+$; si on insère la lettre d entre la sixième et la cinquième vers la droite, il y aura une variation de plus ou de moins, en vertu de (21), le terme prendra le signe $-$; si on place maintenant la lettre d entre la cinquième et la quatrième, le terme reprendra le signe $+$, et ainsi de suite. En général, quand une lettre fait un nombre pair de mouvements, soit vers la droite, soit vers la gauche, le signe du terme ne change pas; autrement, il change. Ainsi, lorsque la septième lettre d sera arrivée avant la première f, elle aura fait six mouvements successifs vers la gauche; par conséquent le signe ne change pas. Dans cette position, la première lettre f est devenue la seconde; elle n'aura besoin que de faire cinq mouvements vers la droite pour arriver à la septième place, qu'occupait primitivement la lettre d. Il y aura donc un changement de signe; et généralement, lorsque deux lettres échangent leurs places dans un terme, si l'une

fait p mouvements vers la droite, l'autre fera $p-1$ mouvements vers la gauche ; or l'un de ces deux nombres p, $p-1$ est nécessairement impair. Ainsi, par suite de cet échange, le terme change de signe.

23. Laplace donne le nom de *résultante* à la somme des permutations de n lettres prises n à n, les signes des termes étant déterminés d'après la règle de Cramer. Il suit du paragraphe précédent que, lorsque dans une résultante on échange deux lettres entre elles, on obtient une seconde résultante égale à la première prise avec un signe opposé.

C'est le théorème de Vandermonde (14) avec son corollaire (15).

24. Ensuite Laplace passe à la résolution des équations du premier degré, et procède de la même manière que Vandermonde. Un seul exemple suffit pour montrer la marche de la démonstration générale.

Soient les trois équations

$$\begin{aligned} a'x + b'y + c'z &= d', \\ a''x + b''y + c''z &= d'', \\ a'''x + b'''y + c'''z &= d'''. \end{aligned}$$

Formons la résultante (abc), on aura :

$$(abc) = a'(b''c''' - c''b''') + a''(c'b''' - b'c''') + a'''(b'c'' - c'b'').$$

Si, dans cette résultante, on écrit b partout où est a, sans mettre a à la place de b, elle s'annule ; de même, quand on remplace a par c, et cela en vertu du corollaire (15) ; donc si on multiplie la première équation par $b''c''' - c''b'''$; la seconde, par $c'b''' - b'c'''$; la troisième par $b'c'' - c'b''$, et qu'on les ajoute ensemble, les coefficients de y et z sont identiquement nuls. Il ne reste que x dont on trouve la valeur, conforme à celle qui est indiquée par la méthode Cramer.

25. M. Gergonne est le premier qui, dans ses Annales, ait

donné une exposition élémentaire de la démonstration de Laplace t. XII, p. 281-1821. Depuis, divers auteurs ont admis cette exposition dans leurs ouvrages, et, comme d'ordinaire, sans déclarer l'emprunt. M. Gergonne appelle *inversion* le *dérangement* de Cramer, la *variation* de Laplace.

26. Le mémoire de Laplace est terminé par des considérations sur les moyens de décomposer les *résultantes* en facteurs plus simples; ces moyens sont les mêmes que ceux de Vandermonde (16). Une observation très-ingénieuse du même géomètre, sur les indices considérés comme des exposants, a donné naissance à la belle théorie des *fonctions alternées* de M. Cauchy et à sa démonstration des formules de Cramer.

(*Suite*). Tm.