NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MENTION

Solution du problème 101

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 13-16

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__13_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DU PROBLÈME 101.

(T. IV, p. 370.)

PAR M. MENTION,
Élève en spéciales.

—

Quatre droites dans un même plan forment quatre triangles; dans chaque triangle existe un point de rencontre des trois hauteurs; les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

LEMME I. Le point F (*fig.* 1) est un point quelconque du prolongement de BC; je mène les trois hauteurs du triangle, je marque le pied G de celle qui correspond à la base BC; si l'on prolonge la hauteur CO jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire abaissée du point F sur AC, on a la relation (N étant le point de rencontre de la perpendiculaire TF avec AG) :

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF.CG}{CF.BG}.$$

Démonstration. Je mène par le point C une parallèle à NT, ce qui me donne :

$$\frac{NT}{CK} = \frac{OT}{OC}.$$

Mais les triangles semblables BOC et CFT donnent :

$$\frac{BO}{FT} = \frac{CO}{CT}.$$

Multipliant ces deux égalités termes à termes, nous avons :

$$\frac{NT \cdot BO}{FT \cdot CK} = \frac{OT}{CT}, \quad \text{d'où} \quad \frac{NT}{FT} = \frac{OT}{CT} \cdot \frac{CK}{BO}.$$

Or nous avons aussi :

$$\frac{CK}{BO} = \frac{CG}{BG} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{CT} = \frac{BC}{CF};$$

d'où, *componendo :*

$$\frac{OT}{CT} = \frac{BF}{CF};$$

donc enfin :

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF \cdot CG}{CF \cdot BG}.$$

C. Q. F. D.

Lemme II. Si de deux points D et E (*fig.* 2) des côtés d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur le troisième côté, on a (G étant le pied de la hauteur correspondante à ce côté, D′ et H les pieds des perpendiculaires abaissées des points D et E)

$$\frac{GH}{D'G} = \frac{AE \cdot BD \cdot CG \cdot FE}{FD \cdot BG \cdot CE \cdot AD}.$$

Le point F est le point où la droite qui joint les deux points rencontre le troisième côté.

Nous avons d'abord successivement, à cause des perpendiculaires :

$$\frac{GH}{CH} = \frac{AE}{CE}, \quad \frac{BD'}{D'G} = \frac{BD}{AD};$$

d'où, faisant le produit :

$$\frac{GH}{D'G} \cdot \frac{BD'}{CH} = \frac{AE \cdot BD}{CE \cdot AD} \quad \text{ou} \quad \frac{GH}{D'G} = \frac{AE \cdot BD}{CE \cdot AD} \cdot \frac{CH}{BD'}.$$

Nous avons aussi, à cause des perpendiculaires :

$$\frac{CH}{CG} = \frac{EH}{AG}, \quad \frac{BG}{BD'} = \frac{AG}{DD'};$$

et, *multiplicando* :

$$\frac{CH}{BD'} = \frac{EH}{DD'} \cdot \frac{CG}{BG}, \quad \text{or} \quad \frac{EH}{DD'} = \frac{FE}{FD},$$

donc :

$$\frac{CH}{BD'} = \frac{FE \cdot CG}{FD \cdot BG};$$

et par suite :

$$\frac{GH}{D'G} = \frac{AE \cdot BD \cdot CG \cdot FE}{CE \cdot AD \cdot BG \cdot FD}.$$

III. Je viens à la démonstration du théorème,

Soit BCDE (*fig.* 3) le quadrilatère donné. Je prends, par exemple, les triangles ABC, BDF, ECF. Dans le premier, le point de rencontre est O ; dans le second, il est O″ ; dans le troisième, il est O′.

Je prolonge AG jusqu'à la rencontre N avec la hauteur FO′ du triangle ECF, et jusqu'à la rencontre M avec la hauteur FO″ du triangle BDF. Alors j'obtiens un triangle dont les côtés sont coupés aux points O, O′, O″ ; ce triangle est MNF. Donc, si je prouve qu'on a l'égalité suivante :

$$MO''.NG.FO' = FO''.MO.NO',$$

les trois points O, O′, O″ seront en ligne droite. Or dans le triangle FGN, O′H étant parallèle à GN, nous aurons :

$$FO' : NO' :: FH : HG;$$

et, par la même raison, on a aussi :

$$MO'' : FO'' :: D'G : FD'.$$

Enfin, prolongeant CO jusqu'en T, nous avons :

$$NO : MO :: NT : FT.$$

Et, multipliant ces trois proportions termes à termes, tout revient donc à prouver que

$$\frac{FH \cdot D'G \cdot NT}{FD' \cdot GH \cdot FT} = 1.$$

Or $\frac{FH}{FD'} = \frac{FE}{FD}$, et d'après le second lemme, j'ai :

$$\frac{D'G}{GH} = \frac{CE \cdot AD \cdot BG \cdot FD}{AE \cdot BD \cdot CG \cdot FE};$$

enfin, le premier lemme me donne

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF \cdot CG}{GF \cdot BG}.$$

Remplaçant par ces différentes valeurs, j'aurai :

$$\frac{FH.D'G.NT}{FD'.GH.FT} = \frac{FE.CE.AD.BG.FD.BF.CG}{FD.AE.BD.CG.FE.CF.BG} = \frac{CE.AD.BF}{AE.BD.CF} = 1.$$

Or, il suffit évidemment de démontrer que trois des points de rencontre sont en ligne droite. Donc, etc. C. Q. F. D.

Note. Le lemme I peut se démontrer directement. Supposons que FTN soit une droite quelconque coupant OB en Q; on a la relation connue :

$$\frac{GC \cdot BF}{BG \cdot CF} = \frac{TN \cdot FQ}{TF \cdot NQ};$$

or FTN étaut parallèle à OB, on a :

$$\frac{FQ}{NQ} = 1.$$

Donc, etc. Tm.