NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. CHEVILLARD

Note sur l'analyse indéterminée du premier degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 471-473

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__471_1>

NOTE SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER DEGRÉ.

PAR A. CHEVILLARD,
Professeur au collége de Sorrèze.

On se sert ordinairement de la propriété des réduites pour former immédiatement les solutions finales de l'équation $ax+by=c$. Mais en analysant complétement la méthode si connue des indéterminées successives, il devient évident que cette méthode fondée sur le plus grand commun diviseur, comme la théorie des réduites, conduit explicitement aux mêmes résultats. On aurait donc tort de s'aider d'une théorie par l'autre, puisqu'au fond c'est la même. Je reprends rapidement le calcul des indéterminées pour arriver aux conséquences.

$$ax+by=c,\quad y=\frac{c-ax}{b}=-qx+t,\quad t=\frac{c-rx}{b},\ a=bq+r;$$

$$bt+rx=c,\quad x=\frac{c-bt}{r}=-q't+t',\quad t'=\frac{c-r't}{r},\quad b=q'r+r'.$$

$$rt'+r't=c,\quad t=\frac{c-rt'}{r'}=-q''t'+t'',\ t''=\frac{c-r''t'}{r'},\quad r=q''r'+r'',$$

$$r't''+r''t'=c,\ t'=\frac{c-r't''}{r''}=-q'''t''+t''',t'''=\frac{c-r'''t''}{r''},r'=q'''r''+r''',$$

$$r''t'''+r'''t''=c,\ t''=\frac{c-r''t'''}{r'''}=-q^{\text{IV}}t'''+t^{\text{IV}},\ t^{\text{IV}}=\frac{c-1.t'''}{r'''},\ r''=q^{\text{IV}}r'''+1;$$

$$r'''t^{\text{IV}}+t'''=c$$

Exprimons maintenant y et x en fonction de l'indéterminée finale t^{IV}. On trouve en remontant, par les substitutions,

$$t'''=c-r'''t^{\text{IV}}. \qquad (1)$$

$$t''=-q^{\text{IV}}t'''+t^{\text{IV}}=-q^{\text{IV}}c+q^{\text{IV}}r'''t^{\text{IV}}+t^{\text{IV}}=-q^{\text{IV}}c+t^{\text{IV}}r''.$$

$$t'=-q'''t''+t'''=q'''q^{\text{IV}}c-q'''t^{\text{IV}}r''+c-r'''t^{\text{IV}}=cQ'''-t^{\text{IV}}r',$$

$$Q'''=q'''q^{\text{IV}}+1.$$

$$t=-q''t'+t''=-q''cQ'''+q''t^{\text{IV}}r'-q^{\text{IV}}c+t^{\text{IV}}r''=-cQ''+t^{\text{IV}}r,$$

$$Q''=q''Q'''+q^{\text{IV}}.$$

$$x=-q't+t'=cq'Q''=q't^{\text{IV}}r+cQ'''-t^{\text{IV}}r'=cQ'-t^{\text{IV}}b,$$

$$Q'=q'Q''+Q'''.$$

$$y=-qx+t=-qcQ'+qt^{\text{IV}}b-cQ''+t^{\text{IV}}r=-cQ+t^{\text{IV}}a,$$

$$Q=qQ'+Q''.$$

Les valeurs finales

$$x=cQ'-bT, \quad y=-cQ+aT,$$

démontrent la loi connue sur la croissance en progressions des valeure entières de x et de y. De plus, elles montrent comment on peut les calculer sans le secours des indéterminées éliminées, puisqu'il suffira pour cela de former les équations (1). Voici comment on disposera les calculs :

$$ax+by=c.$$

$$(2) \qquad \begin{array}{cccccc} & q & q' & q'' & q''' & q^{\text{IV}} \quad 1 \\ a \mid & b \mid & r \mid & r' \mid & r'' \mid & r''' \\ r & r' & r'' & r''' & 1 & \end{array}$$

$$(3) \qquad Q \quad Q' \quad Q'' \quad Q''' \quad q^{\text{IV}} \quad 1$$

$$\begin{aligned} q'''q^{\text{IV}}+1&=Q''', \\ q''Q'''+q^{\text{IV}}&=Q'', \\ q'Q''+Q'''&=Q', \\ qQ'+Q''&=Q. \\ y&=-cQ+aT, \\ x&=cQ'-bT. \end{aligned}$$

On cherchera le plus grand commun diviseur entre a et b en divisant d'abord a par b, quand même on aurait $a<b$.

On aura ainsi la ligne (2) terminée par le reste 1. On formera la ligne (3) en répétant les deux derniers nombres de la ligne (2). *Chaque autre nombre de la ligne* (3) *est égal au supérieur de la ligne* (2) *multiplié par le précédent dans* (3), *plus l'anté-précédent.* Q et Q' ainsi trouvés, y et x seront les valeurs ci-dessus, si le nombre des quotients est impair. S'il est pair, on voit bien que les calculs ci-dessus auraient donné pour y et x les mêmes valeurs changées de signes. Enfin, pour changer moins les valeurs finales, on disposera toujours la proposée de manière à ce que le terme constant soit le moindre des trois nombres a, b, c. c pourra être négatif, mais a et b seront toujours rendus positifs en posant, par exemple, $y = -y'$ si b est négatif. Je ne fais qu'une seule application, parce que je prends le cas le plus défavorable.

$$225x + 157y = 944.$$

Comme 944 est trop grand, je résous par rapport à y, qui a le moindre coefficient, et j'ai

$$y = \frac{944 - 225x}{157} = 6 - x + \frac{2 - 68x}{157} = 6 - x + y',$$

et il reste à résoudre

$$68x + 157y' = 2,$$

à laquelle j'applique le procédé.

	0	2	3	4	1
68	157	68	21	5	reste.
68	21	5	1		
	13	30	13	4	1

4, nombre pair de quotients.

Donc $$y' = 2 \times 13 - 68T,$$
$$x = -2 \times 30 + 157T.$$

Ainsi $x = -60 + 157T$,

$$y = 6 + 60 - 157T + 26 - 68T = 92 - 225T.$$