

JEAN ANASTASSIADIS

## **Définition des fonctions eulériennes par des équations fonctionnelles**

*Mémoires des sciences mathématiques*, fascicule 156 (1964)

[http://www.numdam.org/item?id=MSM\\_1964\\_\\_156\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSM_1964__156__1_0)

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BSM 2421

**Jean ANASTASSIADIS**

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Thessaloniki

---

**DÉFINITION  
DES FONCTIONS EULÉRIENNES**

PAR DES

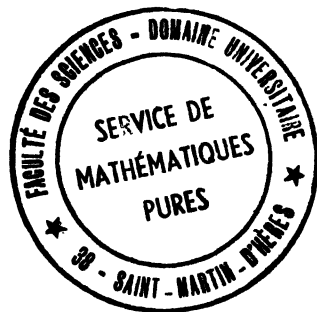
**ÉQUATIONS FONCTIONNELLES**

---

**MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES**

Directeur : **H. VILLAT**

FASCICULE CLVI



PARIS

**GAUTHIER-VILLARS & C<sup>o</sup>, ÉDITEUR-IMPRIMEUR**

55, Quai des Grands-Augustins

1964

© Gauthier-Villars & C<sup>ie</sup>, 1964.  
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés  
y compris la photographie et le microfilm, réservés pour tous pays.

**A LA MÉMOIRE**  
**DE MON FRÈRE INOUBLIABLE THALÉS**



---

# DÉFINITION

## DES FONCTIONS EULÉRIENNES

PAR DES

## ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Par M. Jean ANASTASSIADIS.

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Thessaloniki.

---

### CHAPITRE I.

FONCTIONS CONVEXES, SEMI-MONOTONES ET SEMI-CONVEXES.

#### 1. Fonctions convexes et concaves d'une variable.

1.1. Soit  $f(x)$  une fonction réelle et finie d'une variable réelle, définie dans l'intervalle ouvert  $\mathcal{J} = (a, b)$ . On dit que  $f(x)$  est *convexe* (resp. *concave*) dans cet intervalle 1° si elle est bornée supérieurement (resp. inférieurement) dans un seul intervalle partiel  $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$  et 2° si,  $x_1, x_2$  étant deux points de  $\mathcal{J}$ , on a

$$(1.1) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

[resp.

$$(1.2) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}].$$

Il est évident que si  $f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ ,  $-f(x)$  est concave dans cet intervalle.

1.2. On reconnaît qu'une condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x)$  soit convexe dans  $\mathcal{J} = (a, b)$  est

$$(1.3) \quad (1 - \mathfrak{S})f(x_1) + \mathfrak{S}f(x_2) \geq f((1 - \mathfrak{S})x_1 + \mathfrak{S}x_2),$$

pour chaque  $\mathfrak{S}$  tel que

$$0 < \mathfrak{S} < 1,$$

où  $x_1, x_2$  sont deux points quelconques de  $\mathcal{J}$ .

Supposons que (1.3) soit remplie; si pour un seul couple de  $x_1, x_2 \in \mathcal{J}$  l'égalité a lieu dans (1.3) au moins pour un  $\mathfrak{S} \in (0, 1)$ , l'égalité existe pour chaque  $\mathfrak{S} \in (0, 1)$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in [x_1, x_2]$ , on a

$$(1.4) \quad f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

$f(x)$  est donc une fonction linéaire.

En langage géométrique, cela veut dire que, si l'arc de la courbe  $y = f(x)$  ( $x \in \mathcal{J}$ ) est convexe, l'arc de la courbe entre les deux points  $P_1, P_2$  n'a jamais de points au-dessus du segment  $P_1 P_2$ ; la condition nécessaire et suffisante afin que l'arc  $P_1 P_2$  de la courbe ait avec le segment  $P_1 P_2$  un point intérieur commun (c'est-à-dire un point commun qui se trouve entre  $P_1, P_2$ ) est que l'arc de la courbe  $P_1 P_2$  s'identifie avec le segment  $P_1 P_2$ .

1.3. Il résulte aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x)$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$  est que la fonction

$$(1.5) \quad \varphi(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \quad (y \neq 0)$$

soit croissante dans  $\mathcal{J}$ , quand les points  $x, x+y$  sont dans  $\mathcal{J}$ .

1.4. Une autre condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x)$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$  est la condition

$$(1.6) \quad \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

où  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1 < x_2 < x_3$ ) sont trois points de  $\mathcal{J}$ .

1.5. Il résulte de (1.1) en posant  $x_1 = x - h, x_2 = x + h$ ,

$$(1.7) \quad 2f(x) \leq f(x-h) + f(x+h) \quad (x-h, x+h \in \mathcal{J}),$$

ou bien

$$(1.8) \quad \Delta^2 f \equiv f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0 \quad (x-h, x+h \in \mathcal{J}).$$

D'autre part on reconnaît sans peine que la condition (1.7) ou la condition (1.8) est suffisante pour que  $f(x)$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$ .

1.6. On peut démontrer facilement que, si  $f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ , pour tout groupe  $x_1, x_2, \dots, x_k$  de  $k \geq 2$  points distincts de  $\mathcal{J}$  et tout groupe  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  de  $k$  nombres réels tels que  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) et

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1,$$

on a

$$(1.9) \quad f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_k f(x_k).$$

Cette condition est évidemment suffisante.

1.7. On peut prouver maintenant la proposition suivante :

*Si  $f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J} = (a, b)$ , elle admet à chaque point  $x_0 \in \mathcal{J}$  des dérivées à droite  $f'_d(x_0)$  et à gauche  $f'_g(x_0)$  finies et l'on a toujours*

$$(1.10) \quad f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0).$$

Si, en effet,  $x \in \mathcal{J}$  et  $x > x_0$ , d'après 1.3 la fonction

$$(1.11) \quad \sigma(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante. D'autre part si  $\xi \in \mathcal{J}$ ,  $\xi < x_0$ , on a

$$(1.12) \quad \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

donc  $\sigma(x)$  est bornée inférieurement et admet une limite finie à droite; par conséquent, il existe  $f'_d(x_0)$  et elle est finie. Il résulte de (1.12) que

$$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \leq f'_d(x_0).$$

On démontre de même qu'il existe la dérivée à gauche  $f'_g(x_0)$  et elle est finie. Enfin on reconnaît aisément qu'on a

$$f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0).$$

1.8. On sait que l'existence des dérivées finies à droite et à gauche au point  $x_0$  a comme conséquence la *continuité de la fonction convexe  $f(x)$  à ce point*; donc, de (1.3) résulte la continuité de  $f(x)$  dans  $\mathcal{J}$ , tandis que seulement de (1.1) elle ne résulte pas.



1.9. On tire de (1.8), grâce à la continuité de  $f(x)$ , l'inégalité

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta f(x; h_1, h_2) = \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h_2} - \frac{f(x) - f(x-h_1)}{h_1} \geq 0 \\ (h_1, h_2 > 0, x+h_2, x-h_1 \in \mathcal{J}). \end{array} \right.$$

On peut conclure sans peine de (1.13) l'inégalité

$$(1.14) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (x_2 > x_1, x_2 > x_1, x_2 \geq x_1, x_2 \geq x_1).$$

Enfin on peut démontrer aisément l'inégalité intégrale

$$(1.15) \quad \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)] \geq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt.$$

1.10. Puisqu'une fonction convexe  $f(x)$  a des dérivées à droite et à gauche finies à chaque point de  $\mathcal{J}$ , il résulte de la proposition bien connue de Denjoy [15] <sup>(1)</sup>, que  $f(x)$  est dérivable dans  $\mathcal{J}$ , excepté aux points d'un ensemble dénombrable au plus <sup>(2)</sup>.

De cette proposition résulte le théorème suivant :

*La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction finie  $f(x)$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$  est que :*

1°  $f(x)$  soit continue dans  $\mathcal{J}$  et admette une dérivée en tout point de l'ensemble  $E = \mathcal{J} - A$ , où  $A$  est un ensemble dénombrable au plus et  
2°  $f'(x)$  soit croissante dans  $E$ .

Réciproquement, si  $\varphi(x)$  est croissante dans  $\mathcal{J} = (a, b)$ , donc intégrable au sens de Riemann dans cet intervalle, la fonction

$$(1.16) \quad f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$$

est convexe dans  $\mathcal{J}$ .

On a, en effet,

$$\begin{aligned} & f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \\ &= \int_a^{x+h} \varphi(t) dt + \int_a^{x-h} \varphi(t) dt - 2 \int_a^x \varphi(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} \varphi(t) dt + \int_x^{x-h} \varphi(t) dt = \int_0^h [\varphi(x+t) - \varphi(x-t)] dt \geq 0. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Les numéros dans les crochets renvoient à la bibliographie, qui se trouve à la fin du volume.

<sup>(2)</sup> Pour une démonstration directe de ce théorème, voir par exemple : P. MONTEL [30].

1.11. Soit  $f(x)$  une fonction continue dans  $\mathcal{J}$ , qui admet une dérivée finie à droite en chaque point de  $\mathcal{J}$  excepté aux points d'un ensemble  $A$  dénombrable au plus; on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction soit croissante dans  $\mathcal{J}$  est que  $f'_d(x) \geq 0$  dans  $\mathcal{J} - A$ . Il résulte de cette propriété que la condition nécessaire et suffisante, afin qu'une fonction  $f(x)$  continue et deux fois dérivable dans  $\mathcal{J}$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$ , est que

$$(1.17) \quad f''(x) \geq 0$$

pour tout point  $x \in \mathcal{J}$ .

1.12. Si  $f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ ,  $cf(x)$  est convexe dans cet intervalle quand  $c > 0$  et concave dans  $\mathcal{J}$  quand  $c < 0$ .

Il résulte aussi de la définition de la convexité d'une fonction que, si  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  sont deux fonctions convexes dans  $\mathcal{J}$ ,  $f_1(x) + f_2(x)$  est aussi convexe dans  $\mathcal{J}$ .

Si  $f(x)$  est concave et positive dans  $\mathcal{J}$ ,  $\frac{1}{f}$  est convexe dans cet intervalle.

On a, en effet,

$$2f(x) \geq f(x+h) + f(x-h) \geq 2\sqrt{f(x+h)f(x-h)} \quad (x-h, x+h \in \mathcal{J});$$

donc

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{\sqrt{f(x+h)f(x-h)}} = \frac{\sqrt{f(x+h)f(x-h)}}{f(x+h)f(x-h)} \leq \frac{1}{2} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{f(x+h)f(x-h)}.$$

On en tire

$$\frac{2}{f(x)} \leq \frac{1}{f(x+h)} + \frac{1}{f(x-h)},$$

ce qui démontre la convexité dans  $\mathcal{J}$  de  $\frac{1}{f(x)}$ .

On peut démontrer sans peine les propositions suivantes :

a. Soit  $f(x)$  une fonction convexe et strictement monotone dans l'intervalle ouvert  $\mathcal{J} = (a, b)$ , et  $f^{-1}(x)$  la fonction inverse de  $f(x)$ , qui est définie dans l'intervalle  $f(\mathcal{J})$ . Si  $f(x)$  est décroissante (resp. croissante) dans  $\mathcal{J}$ ,  $f^{-1}(x)$  est convexe (resp. concave) dans  $f(\mathcal{J})$ .

b. Soit  $\mathcal{J} = (a, b)$  où  $a > 0$ ; si  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ , il en est de même de  $xf(x)$  et réciproquement.

c. Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions positives convexes dans l'intervalle  $\mathcal{J} = (a, b)$ ; s'il existe un nombre  $c \in \mathcal{J}$  tel que dans chacun

des intervalles  $(a, c]$  et  $[c, b)$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont toutes les deux ou bien croissantes ou bien décroissantes, le produit  $f(x)g(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ .

d. Si  $f(x)$  est une fonction convexe dans  $\mathcal{J}$ ,  $g(x)$  une fonction convexe (resp. concave) et croissante (resp. décroissante) dans un intervalle contenant  $f(\mathcal{J})$ , la fonction composée  $g(f(x))$  est convexe (resp. concave) dans  $\mathcal{J}$ .

1.13. Soit

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

une suite de fonctions définies dans le même intervalle  $\mathcal{J}$ , convergente vers une fonction  $f(x)$ . Si  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sont toutes convexes dans  $\mathcal{J}$ ,  $f(x)$  est aussi convexe dans  $\mathcal{J}$ .

On tire, en effet, de l'inégalité

$$(1 - \mathfrak{S})f_n(x_1) + \mathfrak{S}f_n(x_2) \geq f_n((1 - \mathfrak{S})x_1 + \mathfrak{S}x_2),$$

la relation

$$(1 - \mathfrak{S})f(x_1) + \mathfrak{S}f(x_2) \geq f((1 - \mathfrak{S})x_1 + \mathfrak{S}x_2),$$

ce qui démontre la convexité de  $f(x)$  dans  $\mathcal{J}$ .

Soit  $\{f_a(x)\}$  une famille de fonctions définies et convexes dans le même intervalle, bornées dans leur ensemble, en nombre fini ou infini.

La fonction

$$f(x) = \sup f_a(x),$$

égale à la borne supérieure des valeurs des fonctions pour chaque valeur de  $x$ , est une fonction convexe.

Puisqu'une fonction convexe dans  $\mathcal{J}$  est continue dans  $\mathcal{J}$ , il résulte de ce qui précède que, la limite d'une suite convergente de fonctions convexes dans  $\mathcal{J}$  est une fonction continue dans cet intervalle; aussi, la borne supérieure d'une famille de fonctions convexes dans  $\mathcal{J}$ , bornées dans leur ensemble, est une fonction continue dans cet intervalle.

## 2. Fonctions logarithmiquement convexes.

2.1. Soit  $f(x)$  une fonction réelle d'une variable réelle définie, finie et positive dans l'intervalle  $\mathcal{J} = (a, b)$ . On dit que  $f(x)$  est *logarithmiquement convexe* dans  $\mathcal{J}$ , si la fonction  $\log f(x)$  est convexe dans cet intervalle; si  $\log f(x)$  est concave dans  $\mathcal{J}$ , on dit que  $f(x)$  est *logarithmiquement concave* dans cet intervalle.

Il résulte aussitôt de la définition qu'une fonction logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ ; on a, en effet, de la convexité logarithmique

$$(2.1) \quad 2 \log f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \log f(x_1) + \log f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in \mathcal{J})$$

ou bien

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

ce qui démontre la convexité de  $f(x)$  dans  $\mathcal{J}$ .

Il résulte aussi de la définition qu'une fonction concave dans  $\mathcal{J}$  est logarithmiquement concave dans cet intervalle. On tire, en effet, de

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \quad (x_1, x_2 \in \mathcal{J}),$$

l'inégalité

$$2 \log f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \log f(x_1) + \log f(x_2).$$

2.2. On doit à P. Montel [30] la proposition remarquable suivante :

*La condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x)$  soit logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$  est que  $e^{ax} f(x)$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$  quelle que soit la valeur de la constante  $a$ .*

Il est presque évident que la condition est nécessaire, parce que si  $\log f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ ,  $\log f(x) + ax$  est aussi convexe dans cet intervalle, quelle que soit la valeur de la constante  $a$ ; donc  $\log[e^{ax} f(x)]$  et, par conséquent, d'après 2.1,  $e^{ax} f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ .

La condition est suffisante. On a, en effet, de la convexité de  $e^{ax} f(x)$  dans  $\mathcal{J}$ ,

$$2 e^{ax} f(x) \leq e^{a(x+h)} f(x+h) + e^{a(x-h)} f(x-h) \quad (x+h, x-h \in \mathcal{J})$$

ou

$$(2.2) \quad e^{ah} f(x+h) - 2 e^{ah} f(x) + f(x-h) \geq 0$$

quelle que soit la valeur de la constante  $a$ .

Mais, puisque  $f(x)$  est une fonction positive, quand  $Z$  est négatif ou nul, le trinôme

$$(2.3) \quad Z^2 f(x+h) - 2 Z f(x) + f(x-h)$$

est positif. D'autre part, grâce à (2.2), quand  $Z$  est positif, le trinôme est positif ou nul. Donc, le trinôme (2.3) est positif ou nul pour chaque valeur de  $Z$  et, par conséquent,

$$f'(x) - f(x+h)f(x-h) \leq 0$$

ou bien

$$2 \log f(x) \leq \log f(x+h) + \log f(x-h),$$

ce qui démontre que  $f(x)$  est logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$  <sup>(1)</sup>.

2.3. On doit aussi à P. Montel [30] la proposition suivante :

*La condition nécessaire et suffisante, afin que  $f(x)$  soit logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$ , est que  $[f(x)]^m$  soit convexe dans  $\mathcal{J}$ , quel que soit le nombre  $m$  positif et voisin de zéro.*

Si, en effet,  $\log f(x)$  est une fonction convexe dans  $\mathcal{J}$ ,  $m \log f(x)$  est convexe dans cet intervalle quand  $m > 0$ ; donc,  $\log [f(x)]^m$  et, par conséquent, d'après 2.1,  $[f(x)]^m$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ .

Réciproquement, si  $[f(x)]^m$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ ,

$$\frac{[f(x)]^m - 1}{m}$$

est aussi convexe dans cet intervalle, donc, sa limite, quand  $m \rightarrow 0$ ,  $\log f(x)$  est convexe dans  $\mathcal{J}$ .

2.4. *Une condition suffisante, pour que  $f(x)$  soit logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$ , est que  $\frac{1}{f(x)}$  soit concave dans cet intervalle.*

Si, en effet,  $\frac{1}{f(x)}$  est concave dans  $\mathcal{J}$ , d'après 2.1,  $\log \frac{1}{f(x)}$  y est concave; c'est-à-dire que  $-\log f(x)$  est concave dans cet intervalle,  $\log f(x)$  est donc convexe dans  $\mathcal{J}$ .

2.5. *Le produit d'un nombre fini de fonctions logarithmiquement convexes dans un intervalle est une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle.*

Soient  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ ,  $k$  fonctions logarithmiquement convexes dans  $\mathcal{J}$ ; on a

$$2 \log f_i(x) \leq \log f_i(x-h) + \log f_i(x+h) \quad (i=1, 2, \dots, k; x-h, x+h \in \mathcal{J});$$

---

<sup>(1)</sup> Cette démonstration ne suppose rien sur la dérivabilité de la fonction  $f(x)$ ; mais on peut obtenir aussitôt cette condition en supposant que  $f(x)$  est deux fois dérivable et en utilisant le théorème 1.11.

en ajoutant ces relations ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), on trouve

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^k \log f_i(x) &= 2 \log \prod_{i=1}^k f_i(x) \leq \sum_{i=1}^k [\log f_i(x-h) + \log f_i(x+h)] \\ &= \log \prod_{i=1}^k f_i(x-h) + \log \prod_{i=1}^k f_i(x+h), \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

2.6. On peut aussi démontrer que la somme d'un nombre fini de fonctions logarithmiquement convexes dans  $\mathcal{J}$  est aussi une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle.

Soient, en effet,  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ ,  $k$  fonctions logarithmiquement convexes dans  $\mathcal{J}$ ; d'après 2.2,

$$e^{ax} f_1(x), e^{ax} f_2(x), \dots, e^{ax} f_k(x)$$

sont convexes dans cet intervalle quelle que soit la valeur de la constante  $a$ ; mais, d'après 1.12, leur somme

$$e^{ax} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)]$$

est une fonction convexe quelle que soit la valeur de la constante  $a$ ; donc, d'après 2.2,

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)$$

est logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$  (\*).

2.7. Il est évident que, si  $f(x)$  est logarithmiquement convexe dans  $\mathcal{J}$  et si  $c$  est un nombre réel  $\neq 0$ , les fonctions  $f(x+c)$  et  $f(cx)$  sont logarithmiquement convexes dans les intervalles correspondants.

2.8. Il résulte des propositions 1.13, grâce à la proposition 2.2, que, la limite d'une suite convergente des fonctions logarithmiquement convexes dans  $\mathcal{J}$ , est aussi une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle, si cette fonction est positive; de même, la plus grande limite d'une famille de fonctions logarithmiquement convexes dans  $\mathcal{J}$ , en nombre fini ou infini, est aussi une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle.

2.9. On doit à E. Artin [9] la remarque intéressante suivante : Soit  $f(t, x)$  une fonction définie et positive quand  $t \in [a, b]$  et  $x \in [\tau, \eta]$ ;

---

(\*) Dans cette démonstration nous n'avons rien supposé sur la dérivabilité de  $f(x)$ .

supposons que, pour chaque valeur de  $t$ , la fonction  $f(t, x)$  soit logarithmiquement convexe en  $x$  dans  $[\zeta, \eta]$ . On forme la fonction

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_n(x) = h[f(a, x) + f(a+h, x) + \dots + f(a+(n-1)h, x)] \\ \quad \quad \quad \left( n = 1, 2, \dots; h = \frac{b-a}{n} \right). \end{array} \right.$$

$F_n(x)$ , étant la somme d'un nombre fini de fonctions logarithmiquement convexes dans  $[\zeta, \eta]$ , est une fonction logarithmiquement convexe dans cet intervalle, d'après 2.6; donc, grâce à 2.8,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \int_a^b f(t, x) dt$$

est une fonction logarithmiquement convexe dans  $[\zeta, \eta]$ .

Si la limite  $b$  de l'intégrale augmente indéfiniment et s'il existe l'intégrale

$$(2.5) \quad \int_a^\infty f(t, x) dt,$$

cette intégrale est aussi logarithmiquement convexe dans  $[\zeta, \eta]$ . En effet, l'intégrale (2.5) est la limite d'intégrales dont la limite supérieure est finie; mais chacune d'elles est logarithmiquement convexe, comme nous venons de le voir; donc, d'après 2.8, la limite, c'est-à-dire l'intégrale (2.5), est une fonction de  $x$  logarithmiquement convexe dans  $[\zeta, \eta]$ .

En particulier, si l'on considère l'intégrale

$$(2.6) \quad \int_a^b \varphi(t) t^{x-1} dt \quad (\varphi(t) > 0, \text{ quand } t \in [a, b]),$$

on parvient au théorème suivant :

*Si  $\varphi(t)$  est une fonction continue et positive dans  $[a, b]$ , l'intégrale (2.6) est une fonction de  $x$  logarithmiquement convexe dans chaque intervalle où l'intégrale (2.6) existe;  $b$  peut être fini ou infini.*

### 3. Fonctions semi-monotones.

3.1. On dit [2] que l'ensemble linéaire  $D$  est de *différence*  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) si, quand  $x \in D$ , ou bien  $x + \omega \in D$  ou bien  $x - \omega \in D$ . Ainsi l'intervalle fermé  $J = [a, b]$  est un ensemble de différence  $\omega$ , pour chaque  $\omega \leq \frac{b-a}{2}$ ; de même, l'ensemble de deux nombres  $a, a + \omega$  est un ensemble de différence  $\omega$ .

3.2. Une fonction réelle  $f(x)$ , définie dans l'ensemble  $D$  de différence  $\omega$ , est dite *semi-croissante*  $\omega$  dans  $D$  [2], si

$$(3.1) \quad f(x + \omega) \geq f(x) \quad (x, x + \omega \in D).$$

On définit de même une fonction *semi-décroissante*  $\omega$  dans  $D$ .

Pour une fonction  $f(x)$  semi-croissante  $\omega$  (resp. semi-décroissante  $\omega$ ) dans  $D$ , le quotient

$$(3.2) \quad \Delta_{\omega} f(x) = \frac{f(x + \omega) - f(x)}{\omega} \quad (x, x + \omega \in D)$$

est  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ).

3.3. Il est évident, si l'ensemble  $D$  est l'intervalle  $\mathcal{J}$ , qu'une fonction croissante dans  $\mathcal{J}$  est aussi semi-croissante  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , pour chaque  $\omega \leq \frac{b-a}{2}$ ; la réciproque n'a pas lieu en général. Une fonction semi-croissante  $\omega$  a seulement « une tension générale croissante ». Mais, si la fonction  $f(x)$  est semi-croissante  $\omega$  pour chaque  $\omega \leq \delta$  ( $\delta$  très petit, mais fixe), elle est croissante. On peut donc déduire les propriétés des fonctions croissantes de celles des fonctions semi-croissantes  $\omega$ , en supposant  $\omega \rightarrow 0$ .

Mêmes remarques pour les fonctions semi-décroissantes  $\omega$ .

3.4. On peut démontrer aisément les théorèmes suivants :

a. *La somme d'un nombre fini de fonctions semi-croissantes  $\omega$  (resp. semi-décroissantes  $\omega$ ) dans  $D$  est une fonction semi-croissante  $\omega$  (resp. semi-décroissante  $\omega$ ) dans cet ensemble.*

On tire, en effet, de

$$f_i(x + \omega) \geq f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, k; x, x + \omega \in D)$$

l'inégalité

$$f_1(x + \omega) + \dots + f_k(x + \omega) \geq f_1(x) + \dots + f_k(x).$$

b. *Le produit d'un nombre fini de fonctions semi-croissantes  $\omega$  (resp. semi-décroissantes  $\omega$ ) et positives dans  $D$  est une fonction semi-croissante  $\omega$  (resp. semi-décroissante  $\omega$ ) dans cet ensemble.*

La démonstration est immédiate.

c. *Si les fonctions  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sont semi-croissantes  $\omega$  (resp. semi-décroissantes  $\omega$ ) dans  $D$  et si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

*la fonction  $f(x)$  est aussi semi-croissante  $\omega$  (resp. semi-décroissante  $\omega$ ) dans  $D$ .*



On a, en effet,

$$f_n(x + \omega) - f_n(x) \geq 0$$

pour chaque  $x \in D$  fixe ( $x + \omega \in D$ ) et pour  $n$  naturel quelconque; donc

$$f(x + \omega) - f(x) \geq 0.$$

Cette inégalité, étant valable pour  $x \in D$  quelconque ( $x + \omega \in D$ ), démontre le théorème.

3.5. Soit  $f(x)$  une fonction quelconque définie dans l'ensemble  $D$  de différence  $\omega$ ; on appelle *semi-dérivée  $\omega$  de  $f(x)$  au point  $x_0$*  le quotient

$$(3.3) \quad \Delta_{\omega} f(x_0) = \frac{f(x_0 + \omega) - f(x_0)}{\omega};$$

si  $x_0 \in D$ , mais  $x_0 + \omega$  n'appartient pas à  $D$ , on dit que  $f(x)$  n'a pas de semi-dérivée  $\omega$  au point  $x_0$ .

Il résulte immédiatement de cette définition que *la condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x)$  soit semi-croissante  $\omega$  (resp. semi-décroissante  $\omega$ ) dans  $D$ , est que la semi-dérivée  $\omega$  soit  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$ ) dans  $D$  (c'est-à-dire à chaque point  $x \in D$  pour qui  $x + \omega \in D$ ).*

Pour que  $f(x)$  soit *strictement* semi-croissante  $\omega$  (resp. semi-décroissante  $\omega$ ) dans  $D$ , il faut et il suffit que  $\Delta_{\omega} f(x)$  soit  $> 0$  (resp.  $< 0$ ) dans  $D$ .

3.6. La semi-dérivée  $\omega$  de  $f(x)$  d'ordre  $n$  se définit par la relation

$$(3.4) \quad \Delta_{\omega}^n f(x) = \Delta_{\omega} \left( \Delta_{\omega}^{n-1} f(x) \right).$$

Ainsi la semi-dérivée  $\omega$  seconde est

$$(3.5) \quad \Delta_{\omega}^2 = \frac{f(x + 2\omega) - 2f(x + \omega) + f(x)}{\omega^2} \quad (x, x + \omega, x + 2\omega \in D).$$

#### 4. Fonctions semi-convexes.

4.1. On dit [2] qu'une fonction réelle  $f(x)$ , définie dans l'intervalle  $\mathcal{J} = [a, b]$ , est *semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$*  ( $\omega > 0$  fixe), si

$$(4.1) \quad f(x + \omega) \leq \frac{1}{2} [f(x) + f(x + 2\omega)] \quad (x, x + 2\omega \in \mathcal{J}).$$

Il est évident qu'une fonction convexe dans  $\mathcal{J}$  est aussi semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , pour chaque  $\omega \leq \frac{b-a}{2}$ ; la réciproque n'a pas

lieu en général. Mais, si  $f(x)$  est semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , pour chaque  $\omega \leq \frac{b-a}{2}$ , elle est convexe dans cet intervalle. On peut donc déduire les propriétés des fonctions convexes de celles des fonctions semi-convexes.

On dit qu'une fonction réelle  $f(x)$ , définie dans l'intervalle  $\mathcal{J} = [a, b]$ , est *semi-concave*  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$  ( $\omega > 0$  fixe), si

$$(4.2) \quad f(x + \omega) \geq \frac{1}{2} [f(x) + f(x + 2\omega)] \quad (x, x + 2\omega \in \mathcal{J}).$$

Puisque,  $f(x)$  étant semi-concave  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ ,  $-f(x)$  est semi-convexe  $\omega$  dans cet intervalle, à chaque propriété concernant les fonctions semi-convexes  $\omega$  dans un intervalle correspond une propriété concernant les fonctions semi-concaves  $\omega$  dans cet intervalle. Il suffit, donc, d'examiner les fonctions semi-convexes  $\omega$  dans un intervalle.

4.2. On peut démontrer sans peine les propositions suivantes :

a. La somme d'un nombre fini de fonctions semi-convexes  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$  est aussi une fonction semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ .

La démonstration est immédiate.

b. Soient  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  deux fonctions semi-convexes  $\omega$  et positives dans  $\mathcal{J} = [a, b]$ ; s'il existe un nombre  $c \in \mathcal{J}$  tel que, dans chacun des intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$ ,  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  sont toutes les deux ou bien semi-croissantes  $\omega$  ou bien semi-décroissantes  $\omega$ , le produit  $f_1(x)f_2(x)$  est semi-convexe dans  $\mathcal{J}$ .

Démontrons le théorème dans le cas où  $c = b$ ; dans le cas où  $a \leq c < b$  il en résulte immédiatement.

On a

$$\begin{aligned} f_1(x + \omega) &\leq \frac{1}{2} [f_1(x) + f_1(x + 2\omega)] \\ f_2(x + \omega) &\leq \frac{1}{2} [f_2(x) + f_2(x + 2\omega)] \end{aligned} \quad (x, x + 2\omega \in \mathcal{J});$$

donc,  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  étant positives dans  $\mathcal{J}$ ,

$$(4.3) \quad f_1(x + \omega)f_2(x + \omega) \leq \frac{1}{4} [f_1(x)f_2(x) + f_1(x)f_2(x + 2\omega) + f_2(x)f_1(x + 2\omega) + f_1(x + 2\omega)f_2(x + 2\omega)].$$

Les fonctions  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  étant toutes les deux semi-croissantes  $\omega$  ou semi-décroissantes  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , on a

$$[f_1(x + 2\omega) - f_1(x)][f_2(x + 2\omega) - f_2(x)] \geq 0,$$

ou bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [f_1(x)f_2(x) + f_1(x)f_2(x+2\omega) + f_2(x)f_1(x+2\omega) + f_1(x+2\omega)f_2(x+2\omega)] \\ \leq \frac{1}{2} [f_1(x)f_2(x) + f_1(x+2\omega)f_2(x+2\omega)]; \end{aligned}$$

on a, donc, grâce à (4.3)

$$f_1(x+\omega)f_2(x+\omega) \leq \frac{1}{2} [f_1(x)f_2(x) + f_1(x+2\omega)f_2(x+2\omega)].$$

c. Si les fonctions  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sont semi-convexes  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

la fonction  $f(x)$  est aussi semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ .

On a, en effet, pour chaque  $x \in \mathcal{J}$  ( $x + 2\omega \in \mathcal{J}$ ) et pour  $n$  naturel quelconque,

$$f_n(x+\omega) - \frac{1}{2} [f_n(x) + f_n(x+2\omega)] \leq 0;$$

donc,

$$f(x+\omega) \leq \frac{1}{2} [f(x) + f(x+2\omega)].$$

Puisque  $x \in \mathcal{J}$  est quelconque ( $x + 2\omega \in \mathcal{J}$ ), le théorème est démontré.

d. La condition nécessaire et suffisante pour que  $f(x)$  soit semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , est que la semi-dérivée  $\omega$  de  $f(x)$  dans  $\mathcal{J}$  soit semi-croissante  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ .

La condition est nécessaire. Soit, en effet,  $f(x)$  une fonction semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ ; on a, pour  $x, x + 2\omega \in \mathcal{J}$ ,

$$f(x+\omega) \leq \frac{1}{2} [f(x) + f(x+2\omega)]$$

ou

$$\frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} \leq \frac{f(x+2\omega) - f(x+\omega)}{\omega},$$

donc,

$$(4.4) \quad \Delta_{\omega} f(x) \leq \Delta_{\omega} f(x+\omega).$$

La condition est suffisante, puisque, de (4.4), il résulte immédiatement la semi-convexité  $\omega$  de  $f(x)$  dans  $\mathcal{J}$ .

e. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f(x)$  soit semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , est que la semi-dérivée  $\omega$  seconde de  $f(x)$  soit  $\geq 0$ .

Le fait que cette condition soit suffisante résulte immédiatement de (3.5). La condition est aussi nécessaire parce que de

$$f(x + \omega) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(x + 2\omega)],$$

résulte

$$\frac{f(x + 2\omega) - 2f(x + \omega) + f(x)}{\omega^2} = \frac{\Delta^2}{\omega^2} f(x) \geq 0.$$

4.3. On dit qu'une fonction réelle  $f(x)$ , définie dans l'intervalle  $\mathcal{J} = [a, b]$ , est *semi-bornée inférieurement*  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , s'il y a un sous-intervalle  $\mathcal{J}_1 = [x_0, x_0 + \omega] \subset \mathcal{J}$ , tel que, pour  $x \in \mathcal{J}_1$  quelconque, on ait

$$(4.5) \quad f(x) \leq f(x \pm \omega) \quad (x \pm \omega \in \mathcal{J});$$

on dirait alors que  $f(x)$  prend son *semi-minimum*  $\omega$  à  $\mathcal{J}_1$ . Si  $\mathcal{J}_1 = [a, a + \omega]$  ou  $[b - \omega, b]$ , l'inégalité (4.5) est remplacée par

$$f(x) \leq f(x + \omega) \quad \text{ou} \quad f(x) \leq f(x - \omega).$$

On définit, de même, une fonction *semi-bornée supérieurement*  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ .

Nous allons démontrer le théorème suivant :

*Une fonction  $f(x)$  semi-convexe  $\omega$  et semi-bornée inférieurement  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , ou bien est semi-monotone  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , ou bien elle se compose de deux branches de la façon suivante : si elle prend son semi-minimum  $\omega$  à l'intervalle  $[x_0, x_0 + \omega]$ , elle est semi-décroissante  $\omega$  dans l'intervalle  $[a, x_0 + \omega]$  et semi-croissante  $\omega$  dans l'intervalle  $[x_0, b]$ .*

1° Si  $f(x)$  prend son semi-minimum  $\omega$  dans l'intervalle  $\mathcal{J}' = [a, a + \omega]$ , on a pour  $x \in \mathcal{J}'$  quelconque ( $x + \omega \in \mathcal{J}$ )

$$(4.6) \quad f(x) \leq f(x + \omega) \quad (x, x + 2\omega \in \mathcal{J}).$$

Mais,  $f(x)$  étant semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , on a

$$(4.7) \quad f(x + \omega) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(x + 2\omega)] \quad (x, x + 2\omega \in \mathcal{J})$$

et, compte tenu de (4.6),

$$f(x) \leq f(x + 2\omega) \quad (x \in \mathcal{J}')$$

et de (4.7)

$$f(x + \omega) \leq \frac{1}{2} [f(x) + f(x + 2\omega)] \leq f(x + 2\omega) \quad (x \in \mathcal{J}');'$$

on en tire, par récurrence,

$$f(x + n\omega) \leq f(x + (n+1)\omega) \quad [n \text{ naturel}, x \in \mathcal{J}', x + (n+1)\omega \in \mathcal{J}].$$

On en déduit, pour  $x \in \mathcal{J}$  quelconque, ( $x + \omega \in \mathcal{J}$ )

$$f(x) \leq f(x + \omega),$$

ce qui démontre que  $f(x)$  est semi-croissante  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ .

2° Supposons maintenant que la fonction  $f(x)$  prenne son semi-minimum  $\omega$  dans l'intervalle  $\mathcal{J}'' = [b - \omega, b]$ . On a alors, pour chaque  $x \in \mathcal{J}''$  ( $x - \omega \in \mathcal{J}$ ),

$$(4.8) \quad f(x) \leq f(x - \omega) \quad (x \in \mathcal{J}'').$$

Mais,  $f(x)$  étant semi-convexe  $\omega$  dans  $\mathcal{J}$ , on a

$$(4.9) \quad f(x - \omega) \leq \frac{1}{2} [f(x) + f(x - 2\omega)] \quad (x, x - 2\omega \in \mathcal{J})$$

et, en tenant compte de (4.8),

$$f(x) \leq f(x - 2\omega) \quad (x \in \mathcal{J}'').$$

On tire de (4.9)

$$f(x - \omega) \leq f(x - 2\omega) \quad (x \in \mathcal{J}'')$$

et, par récurrence,

$$f(x - n\omega) \leq f(x - (n+1)\omega) \quad [n \text{ naturel}, x \in \mathcal{J}'', x - (n+1)\omega \in \mathcal{J}].$$

On en déduit, pour  $x \in \mathcal{J}$  quelconque ( $x + \omega \in \mathcal{J}$ ),

$$f(x) \geq f(x + \omega),$$

ce qui démontre la semi-décroissance  $\omega$  de  $f(x)$  dans  $\mathcal{J}$ .

3° Si les cas 1° et 2° n'ont pas lieu, soit  $\mathcal{J}_1 = [x_0, x_0 + \omega]$  l'intervalle dans lequel  $f(x)$  prend son semi-minimum  $\omega$  : Alors  $f(x)$  est semi-convexe  $\omega$  dans  $[a, x_0 + \omega]$  et prend son semi-minimum  $\omega$  dans  $[x_0, x_0 + \omega]$ .  $f(x)$  est donc (cas 2°) semi-décroissante  $\omega$  dans  $[a, x_0 + \omega]$ . De même (cas 1°),  $f(x)$  est semi-croissante  $\omega$  dans  $[x_0, b]$  (\*).

---

(\*) P. Montel [31] a trouvé récemment quelques propriétés remarquables de ces fonctions, qu'il préfère d'appeler *périodiquement monotones* (resp. *périodiquement convexes ou concaves*). Voir aussi [7].

CHAPITRE II.

LA FONCTION  $\Gamma(x)$ .

5. Définitions formelles de la fonction  $\Gamma(x)$ .

5.1. Si  $\nu$  et  $n$  sont deux nombres naturels, il existe évidemment la relation

$$(5.1) \quad (\nu - 1)! = \frac{n!}{(\nu)_{n+1}} n^\nu \left[ \frac{n+1}{n} \frac{n+2}{n} \dots \frac{n+\nu}{n} \right],$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$(5.2) \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad (a)_0 = 1.$$

La relation (5.1) a lieu quel que soit le nombre naturel  $n$ ; si donc on suppose  $\nu$  fixe et  $n$  tendant vers l'infini, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n+1}{n} \frac{n+2}{n} \dots \frac{n+\nu}{n} \right] = 1$$

et l'on parvient à la formule

$$(5.3) \quad (\nu - 1)! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^\nu}{(\nu)_{n+1}}.$$

5.2. Nous allons démontrer que le second membre de (5.3) est une fonction de  $\nu$ , définie pour chaque valeur de  $\nu > 0$  (\*).

Posons, en effet,

$$(5.4) \quad \Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}},$$

où  $x$  est une variable qui prend des valeurs positives.

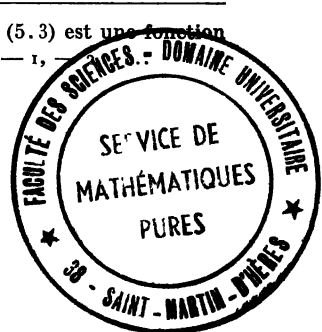
On tire de (5.4)

$$(5.5) \quad \Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} = e^{x(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n})} \frac{1}{x} \prod_{\nu=1}^n \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1 + \frac{x}{\nu}}.$$

Démontrons d'abord que la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

(\*) Weierstrass [36] a démontré que le second membre de (5.3) est une fonction méromorphe dans tout le plan ayant pour pôles simples  $0, -1, -2, \dots$



existe. Posons

$$C'_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n, \quad C''_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1);$$

on en tire

$$(5.6) \quad C'_n - C''_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0,$$

donc

$$(5.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (C'_n - C''_n) = 0.$$

Mais on sait que

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n > 1),$$

donc

$$\begin{aligned} C'_n - C'_{n+1} &= \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0 \\ -C''_n + C''_{n-1} &= \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < 0. \end{aligned}$$

On en tire

$$C'_1 > C'_2 > C'_3 > \dots, \quad C''_1 < C''_2 < C''_3 < \dots,$$

donc, grâce à (5.7), il existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C''_n = C.$$

Ce nombre, qui s'appelle la constante d'Euler, est positif et l'on a [37]

$$(5.8) \quad C = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right\} e^{-t} dt.$$

Nous allons maintenant démontrer que  $\Gamma_n(x)$  tend uniformément, pour  $n \rightarrow \infty$  et  $x > 0$ , vers une fonction, qui sera désignée par  $\Gamma(x)$ . Pour cela, il faut démontrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}$$

converge uniformément, pour  $x > 0$ ; il suffit alors de démontrer que la série

$$(5.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right\}$$

converge absolument et uniformément pour  $x > 0$ . Pour le démontrer, soit  $R$  un nombre positif et prenons le nombre naturel  $n > 2R$ ; donc, pour chaque  $n > N$  et  $0 < x < R$ , on a

$$(5.10) \quad \frac{x}{n} < \frac{1}{2}.$$

Mais on tire de

$$\log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \dots$$

l'inégalité

$$\left| \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right| \leq \frac{x^2}{2n^2\left(1 - \frac{x}{n}\right)} < \frac{R^2}{n^2} \quad (n > N),$$

De la convergence de la série

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2}$$

on conclut la convergence absolue et uniforme de la série (5.9). On a donc défini la fonction

$$(5.11) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x n!}{(x)_{n+1}}$$

pour les valeurs positives de  $x$ .

Il résulte d'une façon pareille, en faisant de modifications évidentes à la démonstration, que le produit (5.5) converge dans l'intervalle  $(-k, -k + 1)$ , où  $k$  est un nombre naturel quelconque.

$\Gamma(x)$  est donc définie — et la formule (5.11) est valable — pour toutes les valeurs réelles de  $x$ , sauf pour les valeurs  $0, -1, -2, \dots$ .

5.3. On tire de (5.5) que

$$(5.12) \quad \Gamma(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}};$$

on appelle *formule de Weierstrass* cette formule.

De (5.12) on peut trouver aisément la formule suivante due à Euler :

$$(5.13) \quad \Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} \right\}.$$



On a, en effet,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma(x)} &= x \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\left(1 + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} - \log m\right)x} \right] \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \right] \\
 &= x \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \log m\right)x} \prod_{n=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \right\} \right] \\
 &= x \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ m^{-x} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right] = x \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right] \\
 &= x \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \prod_{n=1}^m \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \right\} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^x \right],
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire la formule (5.13).

5.4. On peut déduire de (5.11) une équation fonctionnelle fondamentale pour la fonction  $\Gamma(x)$ .

Posons à (5.4)  $x + 1$  à la place de  $x$ ; on a

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n^{x+1} n!}{(x+1)_{n+1}};$$

d'autre part, on tire de (5.2)

$$(5.14) \quad (a+1)_n = \frac{1}{a} (a)_{n+1},$$

donc,

$$\Gamma_n(x+1) = x \frac{n^{x+1} n!}{(x)_{n+1}} = x \Gamma_n(x) \frac{n}{x+n+1};$$

on en tire

$$(5.15) \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

5.5. En posant à (5.5)  $x = 1$ , on a

$$\Gamma_n(1) = \frac{n}{n+1},$$

d'où l'on tire

$$(5.16) \quad \Gamma(1) = 1.$$

De (5.15) et (5.16) on tire

$$(5.17) \quad \Gamma(x+n) = (x)_n \Gamma(x)$$

et, pour  $x = 1$ ,

$$(5.18) \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

De la formule (5.11) on déduit aussitôt que  $\Gamma(x)$  est positive pour  $x > 0$ .

5.6. Nous allons démontrer que la fonction  $\Gamma(x)$  a des dérivées d'ordre quelconque.

Puisque  $\Gamma(x) > 0$ , pour  $x > 0$ ,  $\log \Gamma(x)$  existe et l'on tire de (5.12)

$$(5.19) \quad \log \Gamma(x) = -Cx - \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{n} - \log \left( 1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

Pour démontrer que  $\log \Gamma(x)$  est une fonction dérivable pour  $x > 0$ , il suffit de démontrer la convergence uniforme pour  $x > 0$  de la série formée par les dérivées de termes de (5.19) :

$$(5.20) \quad -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right) = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

Mais, puisque  $x > 0$ ,

$$\frac{x}{n(x+n)} < \frac{x}{n^2};$$

donc, quand  $x$  se trouve dans l'intervalle  $(0, k]$ , où  $k$  est un nombre positif fixe mais quelconque, on a

$$\frac{x}{n(n+x)} < \frac{k}{n^2} \quad (0 < x \leq k).$$

Les termes, donc, de la série qui figure dans le second membre de (5.20) sont plus petits de termes correspondants de la série convergente

$$k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Nous avons donc démontré qu'on a

$$(5.21) \quad \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$$

quand  $x \in (0, k]$ . Mais,  $k$  étant positif quelconque, la formule (5.21) est valable pour tout  $x > 0$ .

Formons maintenant la série de dérivées de termes de la série qui figure au troisième membre de (5.21); on a

$$(5.22) \quad \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Puisque, pour  $x > 0$ , on a

$$\frac{1}{(x+n)^2} < \frac{1}{n^2},$$

la série (5.22) converge uniformément pour  $x > 0$  et l'on a

$$(5.23) \quad \frac{d' \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

On peut tirer de cette formule, la formule générale

$$(5.24) \quad \frac{d^{v-1}}{dx^{v-1}} \left( \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (v-1)!}{(x+n)^v} \quad (v \geq 2).$$

Citons en passant que la formule (5.23) montre que la fonction  $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  est croissante pour  $x > 0$ , car la dérivée de cette fonction est positive pour  $x > 0$ .

5.7. De (5.23) on tire aussitôt que, pour  $x > 0$ , on a

$$\frac{d'}{dx^2} (\log \Gamma(x)) > 0.$$

Donc, grâce à 1.11,  $\log \Gamma(x)$  est convexe pour  $x > 0$ , c'est-à-dire  $\Gamma(x)$  est logarithmiquement convexe pour  $x > 0$ .

5.8. On peut démontrer [4] que la fonction

$$(5.25) \quad \varphi(x) = \left( \frac{e}{x} \right)^x \Gamma(x)$$

est décroissante pour  $x > 0$ .

On a, en effet,

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \varphi'(x) &= \left( \frac{e}{x} \right)^x [\Gamma'(x) - \Gamma(x) \log x] \\ &= \left( \frac{e}{x} \right)^x \Gamma(x) \left[ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x \right]. \end{aligned}$$

On peut écrire (5.21) sous la forme

$$(5.27) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C - \frac{1}{x} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{x+m} \right)$$

et, puisque

$$\frac{1}{x+m} = \int_0^{\infty} e^{-t(x+m)} dt \quad (m = 1, 2, \dots; x > 0),$$

on a, compte tenu de (5.8),

$$\begin{aligned}
 (5.28) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= -C - \int_0^\infty e^{-xt} dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \sum_{m=1}^n (e^{-mt} - e^{-(m+x)t}) dt \\
 &= -C + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-xt} - e^{-(n+1)t} + e^{-(x+n+1)t}}{1 - e^{-t}} dt \\
 &= \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) dt - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt.
 \end{aligned}$$

Mais, si  $0 < t \leq 1$ ,

$$\frac{1 - e^{-xt}}{1 - e^{-t}}$$

est une fonction bornée de  $t$  qui tend vers 1, quand  $t \rightarrow 0$ ; si  $t \geq 1$ ,

$$\frac{1 - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} < \frac{1}{1 - e^{-1}}.$$

Donc, on peut trouver un nombre  $K$ , qui ne dépend pas de  $t$ , tel que, pour chaque  $0 < t < \infty$ ,

$$\frac{1 - e^{-tx}}{1 - e^{-t}} < K$$

et l'on a

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt < K \int_0^\infty e^{-(n+1)t} dt = \frac{K}{n+1}.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} dt = 0$$

et l'on tire de (5.28)

$$(5.29) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

D'autre part

$$(5.30) \quad \log x = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt;$$

on trouve alors de (5.29) et (5.30)

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x + \frac{1}{2x} = - \int_0^\infty e^{-xt} \left( \frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-xt} dt.$$

Mais on reconnaît aisément que, pour chaque  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} > 0,$$

donc,

$$(5.31) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x + \frac{1}{2x} = - \int_0^{\infty} e^{-xt} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) dt < 0 \quad (x > 0).$$

On a, à plus forte raison,

$$(5.32) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x < 0 \quad (x > 0).$$

Puisque, grâce à 5.5,  $\Gamma(x)$  est positive, pour  $x > 0$ , on tire des (5.26) et (5.32)

$$\varphi'(x) < 0 \quad (x > 0),$$

c'est-à-dire  $\varphi(x)$  est décroissante pour  $x > 0$ .

## 6. La fonction $\mu(x)$ .

6.1. La fonction  $\mu(x)$  introduite d'abord par Plana [34], et après lui par Binet [11], est définie par la relation

$$(6.1) \quad \mu(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

On voit aussitôt que  $\mu(x)$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$(6.2) \quad \mu(x) - \mu(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1.$$

D'autre part, la fonction  $\mu(x)$  est décroissante pour  $x > 0$ , car on a

$$\begin{aligned} \mu'(x) &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x - \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x} + 1 \\ &= \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \log x + \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

et, grâce à (5.31),

$$\mu'(x) < 0,$$

pour  $x > 0$ ;  $\mu(x)$  est donc décroissante pour  $x > 0$ .

6.2. Posons [9] pour abrégier

$$(6.3) \quad g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1;$$

l'équation (6.2) devient

$$(6.4) \quad \mu(x+1) = \mu(x) - g(x).$$

Démontrons d'abord que la série

$$(6.5) \quad g(x) + g(x+1) + \dots + g(x+n) + \dots$$

est convergente pour  $x > 0$ .

On a, en effet,

$$(6.6) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots, \quad |y| < 1$$

et, en posant

$$(6.7) \quad y = \frac{1}{2x+1},$$

on tire

$$(6.8) \quad g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \dots$$

qui, grâce à (6.6), est valable pour  $x > 0$ . D'autre part, de (6.8) on tire

$$\begin{aligned} 0 < g(x) &< \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{3(2x+1)^4} + \frac{1}{3(2x+1)^6} + \dots \\ &= \frac{1}{3(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{12x(x+1)} = \frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}. \end{aligned}$$

Les membres de la série (6.5) étant tous positifs, pour  $x > 0$ , il suffit pour la démonstration de sa convergence pour  $x > 0$ , la démonstration de la convergence pour  $x > 0$  de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{12(x+n)} - \frac{1}{12(x+n+1)} \right];$$

mais cette série est convergente et a pour somme  $\frac{1}{12x}$ .

6.3. Nous avons démontré dans 6.1 que  $\mu(x)$  est décroissante pour  $x > 0$ ; donc  $\mu(x) + k$ , où  $k$  est une constante, est aussi décroissante pour  $x > 0$ .

Nous allons trouver une fonction  $\nu(x)$  qui vérifie les conditions suivantes :

- I. Elle est décroissante pour  $x > 0$ ;
- II.  $\nu(x+1) = \nu(x) - g(x)$ ;
- III.  $\nu(1) = g(1) + g(2) + \dots + g(n) + \dots$  (').

On tire de l'équation

$$(6.9) \quad \nu(x+1) = \nu(x) - g(x),$$

comme on le reconnaît aisément,

$$(6.10) \quad \nu(x+n) = \nu(x) - g(x) - g(x+1) - \dots - g(x+n-1).$$

Mais  $\nu(x)$  étant supposée décroissante pour  $x > 0$ , on tire de

$$n < n+x \leq n+1 \quad (n \text{ naturel, } x \in (0, 1])$$

la double inégalité

$$\begin{aligned} \nu(n) = \nu(1) - g(1) - \dots - g(n-1) &\geq \nu(x) - g(x) - g(x+1) - \dots - g(x+n-1) \\ &\geq \nu(1) - g(1) - \dots - g(n) = \nu(n+1). \end{aligned}$$

La différence entre le premier et le troisième membre de cette relation est

$$\nu(n) - \nu(n+1) = g(n);$$

mais

$$g(n) = \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} - 1$$

tend vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . Donc, grâce à la condition III,

$$(6.11) \quad \nu(x) = g(x) + g(x+1) + \dots + g(x+n) + \dots,$$

cette série étant convergente pour  $x > 0$ , d'après 6.2.

Nous avons démontré (6.11) quand  $x \in (0, 1]$ . Pour les autres valeurs de  $x > 0$  il résulte (6.11) aussitôt de l'équation (6.9).

6.4. On reconnaît aussitôt que si l'on demande une autre fonction  $\nu_1(x)$  décroissante pour  $x > 0$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle (6.9) et dont

$$\nu_1(1) = k,$$

on trouve

$$(6.12) \quad \nu_1(x) = k - \nu(1) + \nu(x).$$

---

(') Cette série est convergente d'après 6.2.

Ainsi la fonction  $\mu(x)$  vérifie ces conditions et l'on a, grâce à (6.2),

$$\mu(1) = 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi) = k;$$

on trouve donc

$$(6.13) \quad \mu(x) = 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi) - \nu(1) + \nu(x),$$

où  $\nu(x)$  est la fonction (6.11).

6.5. Nous avons démontré dans 6.2 que

$$(6.14) \quad g(x) + g(x+1) + \dots + g(x+n) + \dots < \frac{1}{12x} \quad (x > 0),$$

donc, grâce à (6.11),

$$(6.15) \quad 0 < \nu(x) < \frac{1}{12x}.$$

On peut donc écrire

$$(6.16) \quad \nu(x) = \frac{\mathfrak{Z}(x)}{12x} \quad [0 < \mathfrak{Z}(x) < 1].$$

On peut donner à  $\nu(x)$  une autre forme; remplaçons les valeurs de  $g(x+n)$ , tirées de (6.8), à (6.11); on trouve

$$(6.17) \quad \nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+2n+1)^{2p}}.$$

### 7. Définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$ . La proposition de Bohr-Mollerup.

7.1. Les définitions données à la fonction  $\Gamma(x)$  sont purement formelles. La fonction  $\Gamma(x)$  est définie par une relation, comme, par exemple, (5.11). On peut définir  $\Gamma(x)$  comme une intégrale, comme nous allons le voir dans le paragraphe 10. Weierstrass a donné une définition de  $\Gamma(x)$  basée à la recherche d'une fonction entière quand on donne ses racines. D'autre part Hölder [22] a démontré que  $\Gamma(x)$  ne vérifie aucune équation différentielle algébrique (\*).

On a demandé depuis longtemps de trouver une définition plus fonctionnelle pour cette remarquable fonction. Mais l'équation fonctionnelle

$$(7.1) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

---

(\*) Une autre démonstration de ce fait a été donnée par A. Ostrowski [33].



ne suffit pas à définir la fonction  $\Gamma(x)$ , car si  $p(x)$  est une fonction périodique quelconque admettant la période 1, la fonction  $t(x) = \Gamma(x)p(x)$  vérifie évidemment l'équation (7.1).

Si l'on part donc de l'équation fonctionnelle fondamentale (7.1), on doit trouver une propriété complémentaire, telle que cette propriété avec (7.1) puisse définir  $\Gamma(x)$ . Cette propriété est la convexité logarithmique de  $\Gamma(x)$ , propriété qui a été établie à 5.7.

7.2. On peut, en effet, démontrer la proposition suivante de Bohr-Mollerup [12] <sup>(\*)</sup> :

*La fonction  $\Gamma(x)$  est la seule fonction qui est définie et positive pour  $x > 0$  et qui vérifie les conditions suivantes :*

- I.  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ;
- II. elle est logarithmiquement convexe pour  $x > 0$ ;
- III.  $\Gamma(1) = 1$ .

Soit  $f(x)$  une fonction quelconque qui vérifie les conditions de la proposition; si  $n$  est un nombre naturel  $\geq 2$  et  $0 < x \leq 1$ , on tire des conditions I et III :

$$(7.2) \quad \begin{cases} f(x+n) = (x)_n f(x), \\ f(n) = (n-1)! \end{cases}$$

La fonction  $f(x)$ , d'après la condition II, est supposée logarithmiquement convexe pour  $x > 0$ ; donc, d'après 2.2,  $e^{ax}f(x)$  est convexe pour  $x > 0$  quelle que soit la valeur de la constante  $a$ . En considérant donc les quatre nombres

$$n-1 < n < n+x \leq n+1 \quad (n \text{ naturel } \geq 2, 0 < x \leq 1),$$

on a, d'après 1.3,

$$\begin{aligned} \frac{e^{a(n-1)}f(n-1) - e^{an}f(n)}{-1} &\leq \frac{e^{a(n+x)}f(n+x) - e^{an}f(n)}{x} \\ &\leq \frac{e^{a(n+1)}f(n+1) - e^{an}f(n)}{1} \end{aligned}$$

ou bien, compte tenu des (7.2),

$$\frac{x(n-1)! + (n-1)! - xe^{-a(n-2)!}}{e^{ax}(x)_n} \leq f(x) \leq \frac{xe^a n! - x(n-1)! + (n-1)!}{e^{ax}(x)_n}$$

---

<sup>(\*)</sup> Voir aussi le très remarquable travail de ARTIN [9], dont beaucoup de résultats se trouvent dans ce livre.

Cette inégalité, étant valable quel que soit  $n$ , reste valable si l'on remplace  $n$  par  $n + 1$  dans le premier membre; on trouve alors

$$\frac{xn! + n! - xe^{-a}(n-1)!}{e^{ax}(x)_{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{xe^a n! - x(n-1)! + (n-1)!}{e^{ax}(x)_n}.$$

Cette inégalité est valable quelle que soit la valeur de la constante  $a$ , donc elle est valable pour  $a = -\log n$ ; on a alors

$$\frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \frac{x+n}{n},$$

d'où l'on tire

$$(7.3) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} = \Gamma(x) \quad (x \in (0, 1]).$$

Nous avons vérifié que  $f(x) = \Gamma(x)$  quand  $x \in (0, 1]$ . Pour les autres valeurs de  $x$ , (7.3) résulte de l'équation fonctionnelle (7.1) qui est vérifiée par  $f(x)$  et  $\Gamma(x)$ .

7.3. Il résulte de la démonstration qu'il n'est pas nécessaire de supposer que  $f(x)$  soit logarithmiquement convexe dans tout le domaine  $x > 0$ ; il suffit qu'elle soit logarithmiquement convexe dans le domaine  $x > \mathfrak{N}$ , où  $\mathfrak{N}$  est une constante positive, qui peut être aussi grande qu'on veut. On parvient donc au théorème suivant:

*La fonction  $\Gamma(x)$  est la seule fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui vérifie les conditions suivantes :*

- I.  $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$ ;
- II. elle est logarithmiquement convexe pour  $x > \mathfrak{N}$ , où  $\mathfrak{N}$  est une constante positive, qui peut être aussi grande qu'on veut;
- III.  $\Gamma(1) = 1$ .

### 8. Autre définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$ .

8.1. Au paragraphe 5.8 nous avons démontré que la fonction

$$(8.1) \quad \varphi(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x \Gamma(x)$$

est décroissante pour  $x > 0$ .

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant [4] :

*Une fonction  $f(x)$  définie et positive pour  $x > 0$ , se confond avec  $\Gamma(x)$ , si  $f(x)$  vérifie les conditions suivantes :*

- I.  $f(x + 1) = xf(x)$ ;

II.  $\left(\frac{e}{x}\right)^x f(x)$  est décroissante <sup>(10)</sup> pour  $x > \mathfrak{N}$ , où  $\mathfrak{N}$  est une constante positive aussi grande qu'on veut <sup>(11)</sup>;

III.  $f(1) = 1$ .

On tire des conditions I et III les relations (7.2); si  $n$  est un nombre naturel  $> \mathfrak{N}$  et  $0 < x \leq 1$ , on tire de

$$n < n + x \leq n + 1,$$

grâce à la condition II :

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n f(n) \geq \left(\frac{e}{n+x}\right)^{n+x} f(n+x) \geq \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} f(n+1),$$

ou, compte tenu des (7.2),

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n (n-1)! \geq \left(\frac{e}{n+x}\right)^{n+x} (x)_n f(x) \geq \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} n!,$$

ou bien

$$\frac{(n-1)! (n+x)^{n+x}}{e^x n^n (x)_n} \geq f(x) \geq \frac{en! (n+x)^{n+x}}{e^x (n+1)^{n+1} (x)_n}.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le nombre naturel  $n (> \mathfrak{N})$ , reste valable si l'on remplace, dans le premier membre,  $n-1$  par  $n$ ; on a alors

$$f_n(x) \geq f(x) \geq f_n(x) e \left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)^{n+x+1},$$

où nous avons posé

$$f_n(x) = \frac{n! (n+x+1)^{n+x+1}}{e^x (n+1)^{n+1} (x)_{n+1}}.$$

Mais

$$\left(\frac{n+x}{n+x+1}\right)^{n+x+1}$$

est toujours plus petit que  $\frac{1}{e}$  et tend vers  $\frac{1}{e}$  quand  $n \rightarrow \infty$ ; on a donc

$$(8.2) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

<sup>(10)</sup> Pour la fonction  $f(x)$  rien n'est supposé.

<sup>(11)</sup> Dans la suite nous désignerons par  $\mathfrak{N}$  une telle constante, c'est à-dire une constante positive, qui peut être aussi grande qu'on veut.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n! n^x \cdot 1}{(x)_{n+1}} \frac{(n+x+1)^{n+x+1}}{e^x n^x (n+1)^{n+1}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x+1}{n} \right)^x \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+x+1}{n+1} \right)^{n+1} \frac{1}{e^x} \\ &= \Gamma(x) \cdot 1 \cdot e^x \frac{1}{e^x} = \Gamma(x). \end{aligned}$$

Nous avons démontré que,

$$(8.3) \quad f(x) = \Gamma(x)$$

quand  $x \in (0, 1]$ . Pour les autres valeurs de  $x > 0$ , (8.3) résulte de l'équation fonctionnelle

$$f(x+1) = x f(x)$$

qui est vérifiée par  $f(x)$  et  $\Gamma(x)$ .

### 9. Les valeurs de $\Gamma(x)$ pour les grandes valeurs de $x$ .

9.1. Nous allons utiliser les résultats précédents pour estimer  $\Gamma(x)$  pour les grandes valeurs de  $x$ .

Considérons la fonction

$$(9.1) \quad \varphi(x) = a \left( \frac{x}{e} \right)^x \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\nu(x)},$$

où  $\nu(x)$  est la fonction rencontrée dans 6.3 et  $a$  une constante. On a

$$\varphi(x+1) = a \left( \frac{x+1}{e} \right)^{x+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{\nu(x+1)}$$

et, grâce à (6.9),

$$\begin{aligned} (9.2) \quad \varphi(x+1) &= a \left( \frac{x+1}{e} \right)^{x+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{\nu(x) - (x+\frac{1}{2}) \log(1+\frac{1}{x}) + 1} \\ &= x a \left( \frac{x}{e} \right)^x \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\nu(x)} = x \varphi(x). \end{aligned}$$

En prenant

$$(9.3) \quad a = e^{1-\nu(1)},$$

on a

$$(9.4) \quad \varphi(1) = 1.$$

D'autre part

$$\left( \frac{e}{x} \right)^x \varphi(x) = e^{1-\nu(1)} e^{\nu(x)} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

est une fonction décroissante, pour  $x > 0$ , car, d'une part,  $\nu(x)$  est une fonction décroissante, pour  $x > 0$ , donc,  $e^{\nu(x)}$  est aussi une telle fonction et, d'autre part,  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  est une fonction décroissante, pour  $x > 0$ .

Donc, la fonction  $\varphi(x)$ , définie par (9.1), est une fonction définie et positive pour  $x > 0$ , qui vérifie les conditions suivantes :

- I.  $\varphi(x+1) = x \varphi(x)$ ;
- II.  $\left(\frac{e}{x}\right)^x \varphi(x)$  est une fonction décroissante pour  $x > 0$ ;
- III.  $\varphi(1) = 1$ .

D'après, donc, le théorème 8.1 :

$$(9.5) \quad \varphi(x) = \Gamma(x)$$

et l'on a

$$(9.6) \quad \Gamma(x) = a \left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\nu(x)} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (a = e^{1-\nu(1)}).$$

En utilisant la formule (6.16), on a

$$(9.7) \quad \Gamma(x) = a \left(\frac{x}{e}\right)^x \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{\mathfrak{Z}(x)}{12x}} \quad [0 < \mathfrak{Z}(x) < 1],$$

et, en posant  $x = n$ , on trouve

$$\Gamma(n) = (n-1)! = a \frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{e^n} e^{\frac{\mathfrak{Z}(n)}{12n}}$$

et, en multipliant par  $n$ ,

$$(9.8) \quad n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\mathfrak{Z}(n)}{12n}} \quad [0 < \mathfrak{Z}(n) < 1].$$

Au paragraphe 10.3 [formule (10.16)] nous calculerons la constante  $a$ .

## 10. Propriétés de la fonction $\Gamma(x)$ .

10.1. Considérons la fonction

$$(10.1) \quad \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0);$$

il faut démontrer d'abord l'existence de cette intégrale, pour  $x > 0$ . Considérons les deux intégrales

$$(10.2) \quad \int_\varepsilon^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \int_1^l e^{-t} t^{x-1} dt,$$

où  $\varepsilon$  est un nombre positif  $< 1$  et  $l$  un nombre positif très grand. On a, pour  $t > 0$ ,

$$e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1},$$

donc,

$$\int_{\varepsilon}^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon^x}{x} < \frac{1}{x}.$$

Nous avons, par conséquent, quel que soit  $\varepsilon$  positif et  $< 1$ , une borne supérieure pour la première intégrale des (10.2). D'autre part cette intégrale croît quand  $\varepsilon$  décroît et, par conséquent, il existe l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0).$$

En ce qui concerne la seconde intégrale, puisque

$$e^{-t} < \frac{n!}{t^n} \quad (t > 0),$$

on a

$$e^{-t} t^{x-1} < \frac{n!}{t^{n-x+1}}.$$

Si, donc, on prend le nombre naturel  $n > x + 1$ , on a

$$\int_1^l e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{n!}{n-x};$$

$\frac{n!}{n-x}$  est donc, pour  $x$  fixe, une borne supérieure pour la seconde intégrale des (10.2). Mais, puisque quand  $l$  croît, cette intégrale croît aussi, il existe l'intégrale

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0).$$

Il existe, par conséquent, l'intégrale (10.1), pour  $x > 0$ .

10.2. Considérons l'intégrale

$$\int_{\varepsilon}^l e^{-t} t^x dt$$

et intégrons par parties; on a

$$\int_{\varepsilon}^l e^{-t} t^x dt = e^{-\varepsilon} \varepsilon^x - e^{-l} l^x + x \int_{\varepsilon}^l e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Mais, on reconnaît aisément que, si  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $l \rightarrow \infty$ , on a

$$e^{-\varepsilon x} - e^{-l x} \rightarrow 0;$$

on parvient, donc, à la formule

$$\int_0^{\infty} e^{-t x} dt = x \int_0^{\infty} e^{-t x^{-1}} dt$$

ou bien, compte tenu de (10.1),

$$(10.3) \quad \varphi(x+1) = x \varphi(x).$$

D'autre part on peut sans peine démontrer que, la fonction .

$$(10.4) \quad \sigma(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x \varphi(x)$$

est décroissante pour  $x > \mathcal{N}$ . On a, en effet,

$$\begin{aligned} \sigma'(x) &= \left(\frac{e}{x}\right)^x [\varphi'(x) - \varphi(x) \log x] \\ &= \left(\frac{e}{x}\right)^x \left[ \int_0^{\infty} e^{-t x^{-1}} \log t dt - \log x \int_0^{\infty} e^{-t x^{-1}} dt \right] \\ &= \left(\frac{e}{x}\right)^x \left[ \int_0^e e^{-t x^{-1}} \log t dt - \log x \int_0^e e^{-t x^{-1}} dt \right] \\ &\quad + \left(\frac{e}{x}\right)^x \left[ \int_e^{\infty} e^{-t x^{-1}} \log t dt - \log x \int_e^{\infty} e^{-t x^{-1}} dt \right] \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^e e^{-t x^{-1}} \log t dt \leq \int_0^e e^{-t x^{-1}} dt,$$

parce que  $0 < t \leq e$ , et

$$\int_e^{\infty} e^{-t x^{-1}} \log t dt > \int_e^{\infty} e^{-t x^{-1}} dt,$$

parce que  $e < t < \infty$ . Donc,

$$\sigma'(x) < \left(\frac{e}{x}\right)^x [1 - \log x] \int_0^e e^{-t x^{-1}} dt + \left(\frac{e}{x}\right)^x [1 - \log x] \int_e^{\infty} e^{-t x^{-1}} \log t dt.$$

En prenant, par exemple,  $x > 3$ , on a

$$(10.5) \quad \sigma'(x) < 0,$$

parce que les intégrales sont positives.

Enfin, on reconnaît aussitôt que

$$(10.6) \quad \varphi(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Donc, la fonction  $\varphi(x)$  est définie et positive pour  $x > 0$  et satisfait les conditions suivantes :

- I.  $\varphi(x+1) = x\varphi(x)$ ;
- II.  $\left(\frac{e}{x}\right)^x \varphi(x)$  est décroissante quand  $x > \mathfrak{N}$ ;
- III.  $\varphi(1) = 1$ .

D'après le théorème 8.1, on a

$$\varphi(x) = \Gamma(x).$$

On parvient, donc, à la formule

$$(10.7) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

10.3. Considérons la fonction

$$(10.8) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\alpha_p} p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right),$$

où  $p$  est un nombre naturel et  $\alpha_p$  une constante. Cette fonction est logarithmiquement convexe, car  $x \log p$  est une fonction linéaire et chacune des autres fonctions est une fonction logarithmiquement convexe, d'après 5.7, 2.5 et 2.7. D'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \frac{1}{\alpha_p} p^{x+1} \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+p}{p}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_p} \frac{x}{p} p^{x+1} \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+2}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) = x\varphi(x); \end{aligned}$$

enfin, on tire de (10.8), pour  $x = 1$ ,

$$\varphi(1) = \frac{1}{\alpha_p} p \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{2}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p}{p}\right).$$

Si l'on prend

$$(10.9) \quad \alpha_p = p \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{2}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p}{p}\right),$$

on a

$$(10.10) \quad \varphi(1) = 1.$$



Donc, d'après la proposition de Bohr-Mollerup (§ 7.2), on a

$$\varphi(x) = \Gamma(x),$$

c'est-à-dire

$$(10.11) \quad \Gamma(x) = \frac{1}{p \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{p}{p}\right)} p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right).$$

On peut calculer  $a_p$ ; on tire de (10.9), grâce à (5.11)

$$(10.12) \quad \begin{aligned} a_p &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{\frac{1}{p}}}{\left(\frac{1}{p}\right)_{n+1}} \frac{n! n^{\frac{2}{p}}}{\left(\frac{2}{p}\right)_{n+1}} \dots \frac{n! n^{\frac{p}{p}}}{\left(\frac{p}{p}\right)_{n+1}} \\ &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^p n^{\frac{p+1}{p}} p^{np+p}}{(np+p)!}. \end{aligned}$$

Mais, on a évidemment

$$(np+p)! = (np)! (np)^p \left[ \left(1 + \frac{1}{np}\right) \left(1 + \frac{2}{np}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{np}\right) \right].$$

Puisque l'expression entre le crochet tend vers 1, quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(np+p)!}{(np)! (np)^p} = 1$$

et l'on tire de (10.12)

$$(10.13) \quad a_p = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^p p^{np}}{(np)! n^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Si maintenant on y remplace  $n!$  et  $(np)!$  par les formules (9.8), on a

$$a_p = \sqrt{p} a^{p-1} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{p \frac{\mathfrak{D}(n)}{12n} - \frac{\mathfrak{D}(np)}{12np}},$$

ou bien

$$(10.14) \quad a_p = \sqrt{p} a^{p-1}.$$

En égalant maintenant (10.9) et (10.14) et en prenant  $p = 2$ , on a

$$a_2 = 2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1) = \sqrt{2} a,$$

donc

$$(10.15) \quad a = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1).$$

Nous allons voir au paragraphe 10.6 [formule (10.33)] que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ; on a, donc,

$$(10.16) \quad \alpha = \sqrt{2\pi}$$

et de (10.14)

$$(10.17) \quad \alpha_p = \sqrt{p} (2\pi)^{\frac{p-1}{2}}$$

On parvient, donc, à la formule de multiplication de Gauss [19] :

$$(10.18) \quad \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}} \Gamma(x).$$

En particulier pour  $p = 2$  on a la formule de Legendre [28] :

$$(10.19) \quad \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} \Gamma(x).$$

10.4. La formule (9.8) devient, grâce à (10.16),

$$(10.20) \quad n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\mathfrak{S}(n)}{12n}} \quad [0 < \mathfrak{S}(n) < 1].$$

D'autre part, d'après (9.3), on a

$$v(1) = 1 - \log \alpha$$

et, en tenant compte de (10.16),

$$(10.21) \quad v(1) = 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

En posant cette valeur à (6.13), on trouve

$$(10.22) \quad \mu(x) = v(x).$$

On a donc, grâce à (6.1), (6.11) et (6.17),

$$(10.23) \quad \mu(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \frac{1}{2} \log(2\pi) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2x+2n+1)^{2p}}.$$

10.5. Nous allons démontrer maintenant la proposition suivante :

Une fonction périodique  $\varphi(x)$  admettant la période 1, positive pour  $0 \leq x \leq 1$ , qui possède une dérivée seconde continue dans cet intervalle et qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(10.24) \quad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = c \varphi(x) \quad (c = \text{Cte})$$

est une constante.

Appelons

$$(10.25) \quad g(x) = \frac{d^2}{dx^2} (\log \varphi(x));$$

$g(x)$  admet 1 comme période et vérifie l'équation fonctionnelle

$$(10.26) \quad \frac{1}{4} \left[ g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] = g(x).$$

Mais, puisque  $g(x)$  est continue dans l'intervalle  $[0, 1]$ , elle y est bornée :

$$|g(x)| \leq K \quad (x \in [0, 1]);$$

de la périodicité de  $g(x)$ , il résulte que

$$(10.27) \quad |g(x)| \leq K$$

est valable pour chaque  $x$ . De (10.25) on tire

$$|g(x)| \leq \frac{1}{4} (K + K) = \frac{K}{2};$$

donc, si  $K$  est une borne supérieure pour  $|g(x)|$ ,  $\frac{K}{2}$  en est une autre; on peut, par conséquent, construire une borne supérieure aussi petite qu'on veut. On a, donc,

$$g(x) = 0$$

et, de (10.25),

$$\log \varphi(x) = ax + b.$$

Mais, puisque  $\varphi(x)$  admet la période 1, on a

$$a(x+1) + b = ax + b,$$

ce qui donne  $a = 0$ .

On a finalement

$$\log \varphi(x) = b,$$

ou

$$\varphi(x) = \text{Cte} \quad (1^2).$$

10.6. Nous avons défini, au paragraphe 5.2, la fonction  $\Gamma(x)$  pour toutes les valeurs réelles de  $x$ , sauf pour les valeurs 0, -1, -2, ...

Considérons maintenant la fonction

$$(10.28) \quad \varphi(x) = \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x,$$

où nous supposons que  $x$  n'est pas un nombre entier. On a

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \Gamma(x+1) \Gamma(-x) \sin \pi(x+1) \\ &= x \Gamma(x) \frac{\Gamma(1-x)}{-x} (-\sin \pi x) = \varphi(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\varphi(x)$  admet la période 1.

D'autre part de (10.19) on a, si l'on pose  $1-x$  à la place de  $x$ ,

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) = 2 \sqrt{\pi} 2^{x-1} \Gamma(1-x).$$

On a, donc,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) \sin \frac{\pi x}{2} \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right) \cos \frac{\pi x}{2} \\ &= \pi \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x = \pi \varphi(x). \end{aligned}$$

$\varphi(x)$  vérifie alors l'équation fonctionnelle

$$(10.29) \quad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \pi \varphi(x).$$

Enfin,  $\varphi(x)$  possède des dérivées d'ordre quelconque, car  $\Gamma(x)$  et  $\sin x$  en possèdent.

Nous pouvons encore écrire  $\varphi(x)$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x} \Gamma(1-x) \sin \pi x \\ &= \Gamma(x+1) \Gamma(1-x) \left[ \pi - \frac{\pi^3 x^2}{3!} + \frac{\pi^5 x^4}{5!} - \dots \right]. \end{aligned}$$

On sait que la série du troisième membre converge, pour chaque  $x$ . Donc le troisième membre de cette égalité a un sens, aussi pour  $x = 0$ ; il représente, donc, une fonction qui admet des dérivées d'ordre quel-

(12) Cette méthode de démonstration est due à Herglotz. Voir ARTIN [9], p. 25.

conque. Il est, par conséquent, naturel de donner la valeur  $\pi$  à  $\varphi(x)$ , pour  $x = 0$ , c'est-à-dire

$$(10.30) \quad \varphi(0) = \pi.$$

Mais, puisque  $\varphi(x)$  admet la période 1, on définit  $\varphi(x)$  pour chaque  $x$  entier par la valeur  $\pi$ . Ainsi,  $\varphi(x)$  est définie pour chaque  $x$ , elle est continue et admet des dérivées d'ordre quelconque.

Donc, d'après le théorème 10.5,

$$(10.31) \quad \varphi(x) = \Gamma(x) \Gamma(1-x) \sin \pi x = \text{Cte.}$$

De (10.31) on tire, pour  $x = 0$ , grâce à (10.30), que la constante est  $\pi$  et l'on a

$$(10.32) \quad \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

qui est due à Euler et qui s'appelle quelquefois *relation des compléments*.

Pour  $x = \frac{1}{2}$ , (10.32) donne

$$(10.33) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## 11. Autre définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$ .

11.1. Soit  $f(x)$  une fonction quelconque; posons

$$(11.1) \quad \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = \varphi(x).$$

Si  $f(x)$  vérifie une des équations fonctionnelles suivantes :

$$(11.2) \quad f(x+1) = x f(x),$$

$$(11.3) \quad f\left(\frac{x}{p}\right) f\left(\frac{x+1}{p}\right) \dots f\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{x-\frac{1}{2}}} f(x),$$

$$(11.4) \quad f(x) f(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$\varphi(x)$  vérifie respectivement une des équations fonctionnelles suivantes :

$$(11.5) \quad \varphi(x+1) = \varphi(x),$$

$$(11.6) \quad \varphi\left(\frac{x}{p}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{p}\right) \dots \varphi\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = \varphi(x),$$

$$(11.7) \quad \varphi(x) \varphi(1-x) = 1.$$

En particulier, si  $f(x)$  vérifie la relation de Legendre

$$(11.8) \quad f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}} f(x),$$

$\varphi(x)$  vérifie l'équation

$$(11.9) \quad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x).$$

Supposons que  $f(x)$ , donc  $\varphi(x)$ , soit continue pour  $x \geq 0$  et que  $f(x)$  vérifie l'équation (11.2), c'est-à-dire que  $\varphi(x)$  est une fonction périodique admettant 1 comme période. Si  $f(x)$  est positive pour  $x > 0$ , il en est de même de  $\varphi(x)$ , pour  $x > 0$ , donc,

$$g(x) = \log \varphi(x)$$

est une fonction continue pour  $x > 0$ . Les équations correspondantes de (11.6), (11.7) et (11.8) sont

$$(11.10) \quad g\left(\frac{x}{p}\right) + g\left(\frac{x+1}{p}\right) + \dots + g\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = g(x),$$

$$(11.11) \quad g(x) = -g(1-x) = -g(-x),$$

$$(11.12) \quad g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = g(x).$$

Supposons encore que  $f(x)$ , donc  $\varphi(x)$ , admette une dérivée du second ordre continue. D'après le théorème 10.5, si  $\varphi(x)$  vérifie l'équation (11.9), elle est constante. On peut trouver cette constante si l'on pose à (11.9)  $x = 1$ ; on trouve

$$\varphi(x) = 1$$

et, d'après (11.1),

$$(11.13) \quad f(x) = \Gamma(x).$$

On parvient, donc, au théorème suivant :

*La fonction  $\Gamma(x)$  est la seule fonction positive, pour  $x > 0$ , qui admet une dérivée seconde continue et qui vérifie les équations fonctionnelles (11.2) et (11.8).*

E. Artin, à qui l'on doit ce théorème, a examiné ([9], p. 32-35) les cas dans lesquels on peut éliminer la supposition de dérivabilité de  $f(x)$ . Nous envoyons le lecteur intéressé au Mémoire d'Artin.

## 12. Quelques généralisations.

12.1. Soit [3]  $f(x)$  une fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(12.1) \quad f(x+1) = \frac{x(x+a_1)\dots(x+a_p)}{(x+b_1)\dots(x+b_q)} f(x) \quad (a_i, b_i > 0).$$

Si  $n$  est un nombre naturel, on tire de cette relation

$$(12.2) \quad f(x+n) = \frac{(x)_n \prod_{i=1}^p (x+a_i)_n}{q \prod_{i=1}^q (x+b_i)_n} f(x) \equiv \sigma_n(x) f(x),$$

$$(12.3) \quad f(1+n) = \frac{n! \prod_{i=1}^p (a_i+1)_n}{q \prod_{i=1}^q (b_i+1)_n} f(1) \equiv \sigma_n(1) f(1).$$

On remarque aussitôt que si

$$p > q-1 \quad \text{ou} \quad p = q-1 \quad \text{et} \quad b_1 + \dots + b_q > a_1 + \dots + a_p,$$

on a

$$(12.4) \quad \frac{f(n)}{f(n-1)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)},$$

pour  $n$  suffisamment grand.

En posant, en effet, à (12.4) les valeurs tirées de (12.3), on a

$$(n-1) \frac{(a_1+n-1)\dots(a_p+n-1)}{(b_1+n-1)\dots(b_q+n-1)} \leq n \frac{(a_1+n)\dots(a_p+n)}{(b_1+n)\dots(b_q+n)};$$

on en tire

$$(12.5) \quad (-q+p+1)n^{p+q} + (b_1+\dots+b_q - a_1 - \dots - a_p)n^{p+q-1} + \dots \geq 0.$$

Pour  $n$  suffisamment grand, le polynôme du premier membre a le signe du premier terme. Donc, l'inégalité (12.4) est vraie, si  $p+1 > q$ ; si  $p+1 = q$  et  $b_1 + \dots + b_q > a_1 + \dots + a_p$ , l'inégalité est aussi vraie. Si  $p+1 = q$  et  $b_1 + \dots + b_q = a_1 + \dots + a_p$ , il faut examiner les coefficients suivants.

On remarque aussi que, si

$$p < q-1 \quad \text{ou} \quad p = q-1 \quad \text{et} \quad b_1 + \dots + b_q < a_1 + \dots + a_p,$$

on a

$$(12.6) \quad \frac{f(n)}{f(n-1)} \geq \frac{f(n+1)}{f(n)}.$$

12.2. Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

Si  $f(x)$  est une fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui :

- I. vérifie l'équation fonctionnelle (12.1);
  - II. est logarithmiquement convexe pour  $x > \mathfrak{N}$  <sup>(13)</sup>;
  - III.  $p > q - 1$  ou  $p = q - 1$  et  $b_1 + \dots + b_q > a_1 + \dots + a_p$ ;
- on a

$$f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x + a_1) \dots \Gamma(x + a_p)}{\Gamma(x + b_1) \dots \Gamma(x + b_q)} k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} \frac{b_1 \dots b_q}{a_1 \dots a_p} f(1).$$

Il suffit de démontrer le théorème quand  $x \in (0, 1]$ . Pour les autres valeurs de  $x$  il résulte le théorème de (12.1).

Grâce à la condition II pour les quatre nombres

$$n - 1 < n < n + x \leq n + 1 \quad (n > \mathfrak{N} + 1, x \in (0, 1]),$$

on a

$$\frac{\log f(n-1) - \log f(n)}{-1} \leq \frac{\log f(n+x) - \log f(n)}{x} \leq \frac{\log f(1+n) - \log f(n)}{1}$$

ou, compte tenu des (12.2),

$$(12.7) \quad \left[ \frac{f(n)}{f(n-1)} \right]^x \frac{f(n)}{\sigma_n(x)} \leq f(x) \leq \left[ \frac{f(n+1)}{f(n)} \right]^x \frac{f(n)}{\sigma_n(x)}.$$

Cette inégalité, étant valable quel que soit  $n > \mathfrak{N} + 1$ , reste valable, si dans le premier membre, on remplace  $n - 1$  par  $n$ ; on trouve alors

$$(12.8) \quad \left[ \frac{f(n+1)}{f(n)} \right]^x \frac{f(n+1)}{\sigma_{n+1}(x)} \leq f(x) \leq \left[ \frac{f(n+1)}{f(n)} \right]^x \frac{f(n)}{\sigma_n(x)}.$$

D'autre part, on reconnaît aisément qu'on a

$$\frac{f(n)}{\sigma_n(x)} = \frac{f(n+1)}{\sigma_{n+1}(x)} \frac{x+n}{n} \frac{(x+a_1+n) \dots (x+a_p+n)}{(a_1+n) \dots (a_p+n)} \frac{(b_1+n) \dots (b_q+n)}{(x+b_1+n) \dots (x+b_q+n)};$$

si, donc, on pose

$$\left[ \frac{f(n+1)}{f(n)} \right]^x \frac{f(n+1)}{\sigma_{n+1}(x)} = F_n(x),$$

<sup>(13)</sup> Voir la note <sup>(11)</sup> du paragraphe 8.1.



on tire de (12.8)

$$F_n(x) \leq f(x) \leq F_n(x) \left[ \frac{x+n}{n} \prod_{i=1}^p \frac{x+a_i+n}{a_i+n} \prod_{i=1}^q \frac{b_i+n}{x+b_i+n} \right].$$

Mais l'expression, qui se trouve dans le crochet du troisième membre, tend vers 1, quand  $n \rightarrow \infty$ ; on a, donc,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x),$$

ou bien, compte tenu de (12.2) et (12.3)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ n \frac{(a_1+n) \dots (a_p+n)}{(b_1+n) \dots (b_q+n)} \right]^x \frac{n!}{(x)_{n+1}} \times \prod_{i=1}^q \frac{(x+b_i)_{n+1}}{(b_i+1)_n} \prod_{i=1}^p \frac{(a_i+1)_n}{(x+a_i)_{n+1}} f(1) \right\}.$$

Mais on peut écrire  $F_n(x)$  comme il suit :

$$F_n(x) = \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \frac{\prod_{i=1}^p \frac{n! n^{x+a_i}}{(x+a_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^q \frac{n! n^{b_i}}{(b_i)_{n+1}}}{\prod_{i=1}^q \frac{n! n^{x+b_i}}{(x+b_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^p \frac{n! n^{a_i}}{(a_i)_{n+1}}} \times \left[ \frac{n! (a_1+n) \dots (a_p+n)}{n^p (b_1+n) \dots (b_q+n)} \right]^x \frac{b_1 \dots b_q}{a_1 \dots a_p} f(1).$$

Puisque l'expression, qui se trouve dans le crochet du second membre, tend vers 1 quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x+a_1) \dots \Gamma(x+a_p)}{\Gamma(x+b_1) \dots \Gamma(x+b_q)} k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} \frac{b_1 \dots b_q}{a_1 \dots a_p} f(1).$$

12.3. On peut démontrer de la même façon la proposition suivante :

*Si  $f(x)$  est une fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui :*

I. vérifie l'équation fonctionnelle (12.1);

II. est logarithmiquement concave pour  $x > \alpha n$ ;

III.  $p < q - 1$  ou  $p = q - 1$  et  $b_1 + \dots + b_q < a_1 + \dots + a_q$  ;  
on a aussi

$$f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x + a_1) \dots \Gamma(x + a_p)}{\Gamma(x + b_1) \dots \Gamma(x + b_q)} k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} \frac{b_1 \dots b_q}{a_1 \dots a_p} f(1).$$

12.4. Nous avons supposé que  $a_i, b_i > 0$  ; si  $a_i, b_i$  sont de signes quelconques, le domaine de définition de  $f(x)$  est

$$x > N,$$

où

$$N = \max(|a_1|, \dots, |a_p|, |b_1|, \dots, |b_q|) + 1,$$

dans lequel  $f(x)$  est supposée positive.

Si

$$p > q - 1 \quad \text{ou} \quad p = q - 1 \quad \text{et} \quad b_1 + \dots + b_q > a_1 + \dots + a_p,$$

on a

$$\frac{f(N + n)}{f(N + n - 1)} \leq \frac{f(N + n + 1)}{f(N + n)}$$

pour  $n$  suffisamment grand. En effet, l'équation correspondante à (12.5) se réduit à celle-ci, si l'on remplace  $n$  par  $n + N$ .

Les formules (12.2) et (12.3) deviennent, si nous supposons  $x > 0$ ,

$$(12.9) \quad f(x + N + n) = \frac{(x + N)_n \prod_{i=1}^p (x + N + a_i)_n}{\prod_{i=1}^q (x + N + b_i)_n} f(x + N) \equiv \sigma_n(x + N) f(x + N),$$

$$(12.10) \quad f(1 + N + n) = \frac{(1 + N)_n \prod_{i=1}^p (1 + N + a_i)_n}{\prod_{i=1}^q (1 + N + b_i)_n} f(1 + N) \equiv \sigma_n(1 + N) f(1 + N).$$

Donc, pour les quatre nombres

$$\begin{aligned} N + n - 1 < N + n < N + n + x \leq N + n + 1 \\ (N + n > \mathfrak{N} + 1 \quad (14), \quad x \in (0, 1]), \end{aligned}$$

---

(14) Nous supposons que  $f(x)$  est logarithmiquement convexe dans le domaine  $x > \mathfrak{N}$ , où  $\mathfrak{N} > N$ .

on a

$$\frac{\log f(N+n-1) - \log f(N+n)}{-1} \leq \frac{\log f(N+n+x) - \log f(N+n)}{x} \\ \leq \frac{\log f(N+n+1) - \log f(N+n)}{1}$$

ou bien

$$\left[ \frac{f(N+n)}{f(N+n-1)} \right]^x \frac{f(N+n)}{\sigma_n(N+x)} \leq f(N+x) \leq \left[ \frac{f(N+n+1)}{f(N+n)} \right]^x \frac{f(N+n)}{\sigma_n(N+x)}.$$

En remplaçant dans le premier membre  $n-1$  par  $n$  et en posant

$$(12.11) \quad \psi_n(x) = \left[ \frac{f(N+n+1)}{f(N+n)} \right]^x \frac{f(N+n+1)}{\sigma_{n+1}(N+x)},$$

on trouve, comme précédemment,

$$(12.12) \quad f(N+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x).$$

Mais

$$\psi_n(x) = \left[ \frac{(N+n) \prod_{i=1}^p (N+a_i+n)}{\prod_{i=1}^q (N+b_i+n)} \right]^x \frac{(N+1)_n}{(x+N)_{n+1}} \\ \times \frac{\prod_{i=1}^p (N+a_i+1)_n \prod_{i=1}^q (x+N+b_i)_{n+1}}{\prod_{i=1}^q (N+b_i+1)_n \prod_{i=1}^p (x+N+a_i)_{n+1}} f(1+N) \\ = \frac{\frac{n! n^{x+N}}{(x+N)_{n+1}} \prod_{i=1}^p \frac{n! n^{x+N+a_i}}{(x+N+a_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^q \frac{n! n^{N+b_i}}{(N+b_i)_{n+1}}}{\frac{n! n^N}{(N)_{n+1}} \prod_{i=1}^q \frac{n! n^{x+N+b_i}}{(x+N+b_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^p \frac{n! n^{N+a_i}}{(N+a_i)_{n+1}}} \\ \times \left[ (N+n) \frac{(N+a_1+n) \dots (N+a_p+n)}{(N+b_1+n) \dots (N+b_q+n)} \frac{n^q}{n^{p+1}} \right]^x \\ \times \frac{(N+b_1) \dots (N+b_q)}{N(N+a_1) \dots (N+a_p)} f(1+N).$$

On a donc

$$f(N+x) = \frac{\Gamma(N+x) \Gamma(N+x+a_1) \dots \Gamma(N+x+a_p)}{\Gamma(N+x+b_1) \dots \Gamma(N+x+b_q)} k',$$

où

$$k' = \frac{\Gamma(N + b_1) \dots \Gamma(N + b_q)}{\Gamma(N) \Gamma(N + a_1) \dots \Gamma(N + a_p)} \frac{(N + b_1) \dots (N + b_q)}{N(N + a_1) \dots (N + a_p)} f(1 + N)$$

Nous avons supposé  $x > 0$ ; en posant à (12.13)

$$x + N = x', \quad \text{donc } x' > N,$$

on a finalement

$$f(x') = \frac{\Gamma(x') \Gamma(x' + a_1) \dots \Gamma(x' + a_p)}{\Gamma(x' + b_1) \dots \Gamma(x' + b_q)} k'.$$

12.5. Nous allons examiner maintenant un cas particulier.

Soit  $f(x)$  une fonction définie et positive pour  $x > 0$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(12.13) \quad f(x + 1) = \frac{x}{x + y} f(x) \quad (y > 0).$$

On a  $q = 1$ ; puisque  $b_1 = y > 0$ , la solution logarithmiquement convexe de (12.13) est la fonction

$$(12.14) \quad f(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + y)} \Gamma(y) y f(1);$$

Si l'on prend

$$f(1) = \frac{1}{y},$$

on a

$$(12.15) \quad f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} \quad (x > 0, y > 0).$$

12.6. Un autre cas particulier est le suivant :

Soit  $f(x)$  une fonction qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(12.16) \quad f(x) = \frac{x(x - a - b)}{(x - a)(x - b)} f(x);$$

on a  $p = 1$ ,  $q = 2$ , donc  $p = q - 1$ ; d'autre part,  $a_1 = -a - b$ ,  $b_1 + b_2 = -a - b$ , donc  $a_1 = b_1 + b_2$ . Le polynôme (12.5) devient alors

$$2nab - ab(1 + a + b).$$

Si  $ab > 0$  (resp.  $ab < 0$ ), il faut que  $f(x)$  soit logarithmiquement convexe (resp. concave). On a, donc, plusieurs cas à distinguer :

1°  $a < 0$ ,  $b < 0$ ; la solution logarithmiquement convexe de (12.16) est

$$f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x - a - b)}{\Gamma(x - a) \Gamma(x - b)} k \quad (x > 0),$$

où

$$k = \frac{\Gamma(-a)\Gamma(-b)}{\Gamma(-a-b)} \frac{ab}{-a-b} f(1).$$

2°  $a > 0$ ,  $b > 0$ ; on a alors  $N = a + b + 1$  et la solution logarithmiquement convexe de (12.16) est

$$f(x') = \frac{\Gamma(x')\Gamma(x'-a-b)}{\Gamma(x'-a)\Gamma(x'-b)} k' \quad (x' > a + b + 1),$$

où

$$k' = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} f(a+b+2).$$

3°  $a$ ,  $b$  de signes contraires; on a, en supposant, par exemple,  $a > 0$ ,  $a \geq |b|$ ,  $N = a + 1$  et la solution logarithmiquement concave de (12.16) est la fonction

$$f(x') = \frac{\Gamma(x')\Gamma(x'-a-b)}{\Gamma(x'-a)\Gamma(x'-b)} k'' \quad (x' > a + 1),$$

où

$$k'' = \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \frac{(a-b)(a-b+1)}{a(a+1)(1-b)} f(a+2).$$

$f(x)$  est, à un facteur constant près, la fonction de Gauss [19]

$$f(x) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot x} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot x(x+1)} + \dots$$

12.7. Nous allons chercher maintenant la solution logarithmiquement convexe de l'équation fonctionnelle

$$(12.17) \quad f(x+\omega) = x^k f(x) \quad [f(\omega) = 1, f(x) > 0 \text{ pour } x > 0, \omega > 0, k > 0].$$

On en tire, en prenant  $0 < x \leq \omega$  :

$$(12.18) \quad f(x+n\omega) = \left[ \omega^n \left( \frac{x}{\omega} \right)_n \right]^k f(x)$$

et pour  $x = \omega$  :

$$(12.19) \quad f((n+1)\omega) = \omega^{nk} (n!)^k.$$

Pour les quatre nombres

$$(n-1)\omega < n\omega < n\omega + x \leq (n+1)\omega \quad (n \text{ naturel}, x \in (0, \omega]),$$

on a, puisque  $f(x)$  est supposée logarithmiquement convexe,

$$\begin{aligned} \frac{\log f((n-1)\omega) - \log f(n\omega)}{-\omega} &\leq \frac{\log f(n\omega + x) - \log f(n\omega)}{x} \\ &\leq \frac{\log f((n+1)\omega) - \log f(n\omega)}{\omega} \end{aligned}$$

ou, compte tenu de (12.18) et (12.19)

$$\frac{\log[\omega(n-1)]^k}{\omega} \leq \frac{\log \left\{ \left[ \frac{\omega}{(n-1)!} \left( \frac{x}{\omega} \right)_n \right]^k f(x) \right\}}{x} \leq \frac{\log(\omega n)^p}{\omega}$$

ou bien

$$\left\{ \frac{[\omega(n-1)]^{\frac{x}{\omega}} (n-1)!}{\omega \left( \frac{x}{\omega} \right)_n} \right\}^k \leq f(x) \leq \left\{ \frac{(\omega n)^{\frac{x}{\omega}} (n-1)!}{\omega \left( \frac{x}{\omega} \right)_n} \right\}^k.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le nombre naturel  $n$ , reste valable si au premier membre on remplace  $n-1$  par  $n$ ; on trouve alors

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) \left( \frac{x+n\omega}{n\omega} \right)^k,$$

où nous avons posé

$$f_n(x) = \left[ \frac{n^{\frac{x}{\omega}} n!}{\left( \frac{x}{\omega} \right)_{n+1}} \right]^k \omega^{k \left( \frac{x}{\omega} - 1 \right)}$$

Donc,

$$(12.20) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \left[ \Gamma \left( \frac{x}{\omega} \right) \right]^k \omega^{k \left( \frac{x}{\omega} - 1 \right)}$$

12.8. On peut généraliser ce résultat en demandant la solution logarithmiquement convexe ou concave de l'équation fonctionnelle

$$(12.21) \quad f(x+\omega) = \left\{ \frac{x(x+\alpha_1)\dots(x+\alpha_p)}{(x+b_1)\dots(x+b_q)} \right\}^k f(x),$$

où

$$f(x) > 0, \quad \text{pour } x > 0, \quad \omega > 0, \quad f(\omega) = 1, \quad k > 0, \quad \alpha_i, b_i > 0.$$

On tire de (12.21)

$$(12.22) \quad f(x+n\omega) = \left[ \frac{\omega^{n(p+1-q)} \left( \frac{x}{\omega} \right)_n \prod_{l=1}^p \left( \frac{x+\alpha_l}{\omega} \right)_n}{\prod_{l=1}^q \left( \frac{x+b_l}{\omega} \right)_n} \right]^k f(x)$$

et, pour  $x = \omega$ ,

$$(12.23) \quad f((n+1)\omega) = \left[ \frac{\omega^{n(p+1-q)} n! \prod_{i=1}^p \left( \frac{\omega + a_i}{\omega} \right)_n}{\prod_{i=1}^q \left( \frac{\omega + b_i}{\omega} \right)_n} \right]^k$$

On remarque aussitôt que, si

$$p > q-1 \quad \text{ou} \quad p = q-1 \quad \text{et} \quad b_1 + \dots + b_q > a_1 + \dots + a_p,$$

on a

$$\frac{f(n\omega)}{f((n-1)\omega)} \leq \frac{f((n+1)\omega)}{f(n\omega)}$$

pour  $n$  suffisamment grand. Au contraire, si

$$p < q-1 \quad \text{ou} \quad p = q-1 \quad \text{et} \quad b_1 + \dots + b_q < a_1 + \dots + a_p,$$

on a

$$\frac{f(n\omega)}{f((n-1)\omega)} \geq \frac{f((n+1)\omega)}{f(n\omega)}$$

pour  $n$  suffisamment grand.

Nous pouvons maintenant démontrer, de la même façon comme le théorème 12.2, la proposition suivante :

Si  $f(x)$  est une fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui :

I. vérifie l'équation fonctionnelle (12.21);

II. est logarithmiquement convexe (resp. concave) pour  $n > \mathfrak{N}$ ;

III.  $p > q-1$  (resp.  $p < q-1$ ) ou  $p = q-1$  et  $b_1 + \dots + b_q > a_1 + \dots + a_p$  (resp.  $b_1 + \dots + b_q < a_1 + \dots + a_p$ );

on a

$$f(x) = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{x+a_1}{\omega}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+a_p}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+b_1}{\omega}\right) \dots \Gamma\left(\frac{x+b_q}{\omega}\right)} \right\}^k \omega^{\lambda(p-q+1)\left(\frac{x}{\omega}-1\right)} \mathbf{C},$$

où

$$\mathbf{C} = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{b_1}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{b_q}{\omega}\right) \frac{b_1}{\omega} \dots \frac{b_q}{\omega}}{\Gamma\left(\frac{a_1}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{a_p}{\omega}\right) \frac{a_1}{\omega} \dots \frac{a_p}{\omega}} \right\}^k.$$

CHAPITRE III

LA FONCTION  $B(x, y)$ .

13. Définition fonctionnelle de la fonction  $B(x, y)$ .

13.1. Nous avons démontré au paragraphe 12.5 que, si  $f(x)$  est une fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui vérifie les conditions suivantes :

I.  $f(x + 1) = \frac{x}{x+y} f(x) \quad (y > 0);$

II. elle est logarithmiquement convexe pour  $x > \mathfrak{N}$ ;

III.  $f(1) = \frac{1}{y};$

alors

$$f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Cette fonction est étudiée d'abord par Euler et est désignée par Binet [11] par  $B(x, y)$ ; on a alors

(13.1)  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x > 0, y > 0).$

Si l'on remplace  $x$  par  $y$  et  $y$  par  $x$ , on a

(13.2)  $B(x, y) = B(y, x).$

13.2. Nous allons démontrer que  $B(x, y)$ , considérée comme fonction de  $x$  par exemple, est une fonction décroissante pour  $x > 0$ . On a, en effet,

$$B'_x(x, y) = \frac{\Gamma(x+y) \Gamma'(x) - \Gamma(x) \Gamma'(x+y)}{\Gamma^2(x+y)} \Gamma(y).$$

Mais, comme nous avons remarqué à la fin du paragraphe 5.6,  $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$  est une fonction croissante pour  $x > 0$ .

Donc

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} < 0 \quad (y > 0),$$

ce qui démontre, puisque  $\Gamma(t) > 0$  pour  $t > 0$ ,

$$B'_x(x, y) < 0.$$

De même,  $B(x, y)$ , considérée comme fonction de  $y$ , est décroissante pour  $y > 0$ .





13.3. On voit aussitôt, grâce à l'équation fondamentale (5.15) de  $\Gamma(x)$ , que  $B(x, y)$  vérifie les équations fonctionnelles suivantes :

$$(13.3) \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) \quad (x > 0, y > 0),$$

$$(13.4) \quad B(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x, y) \quad (x > 0, y > 0).$$

13.4. Nous allons démontrer maintenant que nous pouvons remplacer dans l'énoncé du théorème 13.1 la propriété de *convexité logarithmique* par la propriété de *décroissance*, c'est-à-dire nous allons prouver le théorème suivant [5] :

Une fonction  $f(x)$  définie et positive pour  $x > 0$  est identique à  $B(x, y)$  si :

- I.  $f(x+1) = \frac{x}{x+y} f(x) \quad (y > 0)$ ;
- II.  $f(x)$  est décroissante pour  $x > \mathfrak{N}$ ;
- III.  $f(1) = \frac{1}{y}$ .

On tire, en effet, de la condition I,

$$(13.5) \quad f(x+n) = \frac{(x)_n}{(x+y)_n} f(x) \quad (n \text{ naturel, } x \in (0, 1])$$

et, pour  $x = 1$ , compte tenu de III,

$$(13.6) \quad f(n+1) = \frac{n!}{(y)_{n+1}} \quad (n \text{ naturel}).$$

Mais,  $f(x)$  étant supposée décroissante pour  $x > \mathfrak{N}$ , on a

$$f(n) \geq f(n+x) \geq f(n+1) \quad (n > \mathfrak{N}, x \in (0, 1]),$$

ou bien, compte tenu de (13.5) et (13.6),

$$\frac{(n-1)!}{(y)_n} \geq \frac{(x)_n}{(x+y)_n} f(x) \geq \frac{n!}{(y)_{n+1}},$$

d'où l'on a

$$\frac{(n-1)! (x+y)_n}{(y)_n (x)_n} \geq f(x) \geq \frac{n! (x+y)_n}{(x)_n (y)_{n+1}}.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit  $n$ , reste valable si l'on remplace au premier membre  $n$  par  $n+1$ ; on trouve alors

$$\frac{n! (x+y)_{n+1}}{(y)_{n+1} (x)_{n+1}} \geq f(x) \geq \frac{n! (x+y)_{n+1}}{(y)_{n+1} (x)_{n+1}} \frac{x+n}{x+y+n}.$$

Quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{x+n}{x+y+n} \rightarrow 1,$$

et l'on a

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (x+y)_{n+1}}{(y)_{n+1} (x)_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^y}{(y)_{n+1}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+y}}{(x+y)_{n+1}}} = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y).$$

13.5. On peut représenter  $B(x, y)$  par une intégrale. Considérons, en effet, l'intégrale

$$(13.7) \quad f(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

à qui Legendre [28] a donné le nom de l'intégrale eulérienne de première espèce.

Nous allons démontrer d'abord que cette intégrale existe pour  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Il suffit pour le vérifier de démontrer l'existence des deux intégrales

$$(13.8) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Mais, quand  $0 < t \leq \frac{1}{2}$ ,

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} < t^{x-1} (1-t)^{-1} < 2 t^{x-1}$$

et, quand  $\frac{1}{2} \leq t < 1$ ,

$$t^{x-1} (1-t)^{y-1} < t^{-1} (1-t)^{y-1} < 2 (1-t)^{y-1}.$$

Donc les intégrales (13.8), qui sont positives, existent, s'ils existent les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} dt, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1} dt;$$

mais, on sait (§ 10.1) que ces intégrales existent.

Remplaçons maintenant à (13.7)  $x$  par  $x+1$ ; on a

$$f(x+1, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt:$$

considérons l'intégrale

$$I = \int_{\varepsilon}^{1-\eta} (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

et intégrons par parties; on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{(1-\varepsilon)^y e^{\varepsilon} - \eta^y (1-\eta)^x}{x+y} + \int_{\varepsilon}^{1-\eta} \frac{x}{x+y} (1-t)^{x+y} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{dt}{(1-t)^2} \\ &= \frac{(1-\varepsilon)^y \varepsilon^x - \eta^y (1-\eta)^x}{x+y} + \frac{x}{x+y} \int_{\varepsilon}^{1-\eta} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \end{aligned}$$

En faisant maintenant tendre  $\varepsilon$  et  $\eta$  vers zéro, on a

$$f(x+1, y) = \frac{x}{x+y} f(x, y);$$

$f(x, y)$  vérifie donc la condition I du théorème 13.4. D'autre part l'intégrale (13.7) est évidemment une fonction décroissante de  $x$ , pour  $x > 0$ , puisque  $0 < t < 1$ ; la condition II du théorème est donc vérifiée. Enfin, en remplaçant dans (13.7)  $x$  par 1, on a

$$f(1, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \frac{1}{y},$$

c'est-à-dire la condition III est aussi vraie. D'après le théorème 13.4, on a

$$f(x, y) = B(x, y);$$

on parvient, donc, à la formule

$$(13.9) \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

13.6. On peut généraliser les résultats du paragraphe 13.4, en considérant l'équation fonctionnelle

$$(13.10) \quad f(x+1) = \frac{x(x+\alpha_1)\dots(x+\alpha_{p-1})}{(x+b_1)\dots(x+b_p)} f(x),$$

où

$$f(x) > 0 \quad \text{pour } x > 0, \quad \alpha_i, b_i > 0, \quad 0 < x \leq 1.$$

On tire de cette relation,  $n$  désignant un nombre naturel,

$$(13.11) \quad f(x+n) = \frac{(x)_n (x+\alpha_1)_n \dots (x+\alpha_{p-1})_n}{(x+b_1)_n \dots (x+b_p)_n} f(x);$$

or, en tenant compte de

$$(13.12) \quad (a+1)_n = \frac{1}{a} (a)_{n+1},$$

on trouve, pour  $x = 1$ ,

$$(13.13) \quad f(n+1) = \frac{n! (a_1)_{n+1} \dots (a_{p-1})_{n+1}}{(b_1)_{n+1} \dots (b_p)_{n+1}} \frac{b_1 \dots b_p}{a_1 \dots a_{p-1}} f(1).$$

On vérifie sans peine que, si

$$a_1 + \dots + a_{p-1} < b_1 + \dots + b_p,$$

on a

$$(13.14) \quad \frac{(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)} < 1,$$

pour  $n$  suffisamment grand, tandis que, si

$$a_1 + \dots + a_{p-1} > b_1 + \dots + b_p,$$

on a

$$(13.15) \quad \frac{(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)} > 1,$$

pour  $n$  suffisamment grand.

13.7. Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

Si  $f(x)$  est une fonction définie et positive pour  $x > 0$  qui :

I. vérifie l'équation fonctionnelle (13.10);

II. est décroissante (resp. croissante) pour  $x > \mathfrak{N}$ ;

III. et  $a_1 + \dots + a_{p-1} < b_1 + \dots + b_p$  (resp.  $a_1 + \dots + a_{p-1} > b_1 + \dots + b_p$ );  
alors

$$f(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(x+a_1) \dots \Gamma(x+a_{p-1})}{\Gamma(x+b_1) \dots \Gamma(x+b_p)} k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_p)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_{p-1})} \frac{b_1 \dots b_p}{a_1 \dots a_{p-1}} f(1).$$

En supposant  $f(x)$  décroissante et en prenant,  $n > \mathfrak{N}$  et assez grand — tel que (13.14) soit vérifiée — on tire de

$$f(n) \geq f(n+x) \geq f(n+1) \quad (0 < x \leq 1),$$

grâce aux (13.11) et (13.13), la relation

$$\frac{(n-1)! \prod_{i=1}^{p-1} \frac{1}{a_i} (a_i)_n}{\prod_{i=1}^p \frac{1}{b_i} (b_i)_n} f(1) \geq \frac{(x)_n \prod_{i=1}^{p-1} (x+a_i)_n}{\prod_{i=1}^p (x+b_i)_n} f(x) \geq \frac{n! \prod_{i=1}^{p-1} \frac{1}{a_i} (a_i)_{n+1}}{\prod_{i=1}^p \frac{1}{b_i} (b_i)_{n+1}} f(1)$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{(x)_n} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{(a_i)_n}{a_i(x+a_i)_n} \prod_{i=1}^p \frac{b_i(x+b_i)_n}{(b_i)_n} f(1) \\ & \geq f(x) \geq \frac{n!}{(x)_n} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{(a_i)_{n+1}}{a_i(x+a_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^p \frac{b_i(x+b_i)_n}{(b_i)_{n+1}} f(1). \end{aligned}$$

Cette relation étant valable quel que soit  $n$ , reste valable si l'on remplace au premier membre  $n$  par  $n+1$ ; on trouve ainsi

$$(13.16) \quad f_n(x) \geq f(x) \geq f_n(x) \frac{(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)},$$

où

$$f_n(x) = \frac{n!}{(x)_{n+1}} \prod_{i=1}^{p-1} \frac{(a_i)_{n+1}}{a_i(x+a_i)_{n+1}} \prod_{i=1}^p \frac{b_i(x+b_i)_{n+1}}{(b_i)_{n+1}} f(1).$$

Mais, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$\frac{(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n)}{(x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)} \rightarrow 1$$

et l'on a, comme on le vérifie aisément,

$$(13.17) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+a_1)\dots\Gamma(x+a_{p-1})}{\Gamma(x+b_1)\dots\Gamma(x+b_p)} k,$$

où

$$k = \frac{\Gamma(b_1)\dots\Gamma(b_p)}{\Gamma(a_1)\dots\Gamma(a_{p-1})} \frac{b_1\dots b_p}{a_1\dots a_{p-1}} f(1).$$

13.8. Comme nous avons vu au paragraphe 13.6, la solution cherchée de l'équation fonctionnelle (13.10) est croissante ou décroissante suivant que le polynôme

$$(x+n)(x+a_1+n)\dots(x+a_{p-1}+n) - (x+b_1+n)\dots(x+b_p+n)$$

est positif ou négatif pour  $n$  suffisamment grand; mais en posant

$$x+n = x'$$

cela revient à dire que le polynôme

$$(13.18) \quad x'(x'+a_1)\dots(x'+a_{p-1}) - (x'+b_1)\dots(x'+b_p)$$

est positif ou négatif pour  $x'$  suffisamment grand. Or, ce polynôme peut s'écrire

$$(c_1 - \gamma_1)x'^{p-1} + (c_2 - \gamma_2)x'^{p-2} + \dots + (c_{p-1} - \gamma_{p-1})x' - \gamma_p,$$

où  $c_i, \gamma_i$  sont les fonctions symétriques fondamentales des polynômes

$$x'(x' + a_1) \dots (x' + a_{p-1}) \quad \text{et} \quad (x' + b_1) \dots (x' + b_p).$$

13.9. On peut examiner le cas où  $a_i, b_i$  sont des signes quelconques; le domaine de définition de  $f(x)$  est  $x > N$ , où

$$N = \max (|a_1|, \dots, |a_{p-1}|, |b_1|, \dots, |b_p|) + 1;$$

on peut répéter ici ce que nous avons dit au paragraphe 12.4.

13.10. Nous pouvons appliquer ces résultats à l'équation fonctionnelle

$$(13.19) \quad f(x+1) = \frac{x(x-a-b)}{(x-a)(x-b)} f(x),$$

qui a été examiné au paragraphe 12.6. Le polynôme (13.18) se réduit à  $-ab$ . Si  $a, b$  sont de même signe, ce polynôme est négatif; donc la solution *décroissante* de l'équation (13.19) est la fonction hypergéométrique

$$(13.20) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(x-a-b)}{\Gamma(x-a)\Gamma(a-b)} k \\ (x > 0 \text{ si } a < 0, b < 0; x > a+b+1 \text{ si } a > 0, b > 0) \end{cases}$$

ou

$$k = \begin{cases} \frac{\Gamma(-a)\Gamma(-b)}{\Gamma(-a-b)} \frac{ab}{-a-b} f(1) & \text{quand } a < 0, b < 0; \\ \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \frac{a(a+1)b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} f(a+b+2) & \text{quand } a > 0, b > 0. \end{cases}$$

Si  $ab < 0$  (par exemple  $a > 0, a \geq |b|$ ), on voit que la solution *croissante* de l'équation (13.19) est la même fonction (13.20) ( $x > a+1$ ), où

$$k = \frac{\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(1-b)} \frac{(a-b)(a-b+1)}{a(a+1)(1-b)} f(a+2) \quad (15).$$

13.11. Nous dirons qu'une fonction de deux variables  $\varphi(x, y)$ , définie dans le domaine  $C$ , est *croissante* (resp. *décroissante*) dans  $C$ , si,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  étant deux points de  $C$ , il résulte de  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ , la relation

$$(13.21) \quad \varphi(x_1, y_1) \leq \varphi(x_2, y_2) \quad [\text{resp. } \varphi(x_1, y_1) \geq \varphi(x_2, y_2)].$$

---

(15) Voir, paragraphe 12.6.

13.12. Nous allons démontrer le théorème suivant [5] :

Une fonction de deux variables  $f(x, y)$  définie et positive pour  $x > 0$ ,  $y > 0$  est identique à  $B(x, y)$  si :

I.  $f(x + 1, y + 1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} f(x, y)$ ;

II. la fonction  $\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y} f(x, y)$  est décroissante pour  $x > \mathfrak{N}$ ,  $y > \mathfrak{N}$  <sup>(16)</sup>;

III.  $f(1, 1) = 1$ .

Vérifions d'abord que, si  $0 < x \leq 1$ ,  $0 < y \leq 1$ ,

$$(13.22) \quad \sigma_n(x, y) \equiv \frac{(x+n)^{x+n+1} (y+n)^{y+n+1} (x+y+2n)^{x+y+2n+2}}{\left\{ \begin{array}{l} (x+n+1)^{x+n+1} (y+n+1)^{y+n+1} \\ \times (x+y+2n)^{x+y+2n+1} (x+y+2n+1) \end{array} \right\}} < 1;$$

on a, en effet, en posant

$$x+n = \omega, \quad y+n = \varphi,$$

$$\sigma_n = \frac{\omega + \varphi}{\omega + \varphi + 1} \left[ \frac{\omega(\omega + \varphi + 2)}{(\omega + 1)(\omega + \varphi)} \right]^{\omega+1} \left[ \frac{\varphi(\omega + \varphi + 2)}{(\varphi + 1)(\omega + \varphi)} \right]^{\varphi+1}$$

Si  $x = y$ , on a évidemment  $\sigma_n < 1$ ; si  $x < y$ , par exemple, puisque  $0 < x \leq 1$ ,  $0 < y \leq 1$ , on a

$$\frac{\omega(\omega + \varphi + 2)}{(\omega + 1)(\omega + \varphi)} < 1, \quad \frac{\varphi(\omega + \varphi + 2)}{(\varphi + 1)(\omega + \varphi)} > 1,$$

donc

$$\begin{aligned} \sigma_n &< \frac{\omega + \varphi}{\omega + \varphi + 1} \left[ \frac{\omega(\omega + \varphi + 2)}{(\omega + 1)(\omega + \varphi)} \right]^{n+1} \left[ \frac{\varphi(\omega + \varphi + 2)}{(\varphi + 1)(\omega + \varphi)} \right]^{n+2} \\ &= \frac{\varphi(\omega + \varphi + 2)}{(\varphi + 1)(\omega + \varphi + 1)} \left[ \frac{\omega \varphi (\omega + \varphi + 2)^2}{(\omega + \varphi)^2 (\omega + 1)(\varphi + 1)} \right]^{n+1}; \end{aligned}$$

on a toujours

$$\begin{aligned} \varphi(\omega + \varphi + 2) &< (\varphi + 1)(\omega + \varphi + 1), \\ \omega \varphi (\omega + \varphi + 2)^2 &< (\omega + \varphi)^2 (\omega + 1)(\varphi + 1), \end{aligned}$$

parce qu'on a respectivement

$$\omega + 1 > 0, \quad (\omega - \varphi)^2 (1 + \varphi + \omega) > 0.$$

Venons maintenant à la démonstration du théorème. On tire de la condition I,

$$(13.23) \quad f(x+n, y+n) = \frac{(x)_n (y)_n}{(x+y)_n} f(x, y) \quad (n > \mathfrak{N}; x, y \in (0, 1])$$

<sup>(16)</sup> On ne suppose rien sur la nature de la fonction  $f(x, y)$ .

et, pour  $x = y = 1$ , grâce à la condition III,

$$(13.24) \quad f(n+1, n+1) = \frac{n! n!}{(2n+1)!} \quad (n > \mathfrak{N}).$$

Mais, la fonction

$$\frac{(x+y)^{x+y}}{x^x y^y} f(x, y)$$

étant supposée décroissante pour  $x > \mathfrak{N}$ ,  $y > \mathfrak{N}$  on tire de

$$n < n+x \leq n+1, \quad n < n+y \leq n+1 \quad (n > \mathfrak{N}),$$

grâce aux (13.23) et (13.24), la relation

$$\begin{aligned} 2^{2n} \frac{(n-1)! (n-1)!}{(2n-1)!} &\geq \frac{(x+y+2n)^{x+y+2n}}{(x+n)^{x+n} (y+n)^{y+n}} \frac{(x)_n (y)_n}{(x+y)_{2n}} f(x, y) \\ &\geq 2^{n+2} \frac{n! n!}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} 2^{2n} \frac{(n-1)! (n-1)! (x+y)_{2n} (x+n)^{x+n} (y+n)^{y+n}}{(2n-1)! (x)_n (y)_n (x+y+2n)^{x+y+2n}} \\ \geq f(x, y) \geq 2^{n+2} \frac{n! n! (x+y)_{2n} (x+n)^{x+n} (y+n)^{y+n}}{(2n+1)! (x)_n (y)_n (x+y+2n)^{x+y+2n}}. \end{aligned}$$

Cette inégalité étant valable quel que soit  $n > \mathfrak{N}$ , reste valable si l'on remplace au premier membre  $n$  par  $n+1$ ; on trouve alors

$$(13.25) \quad f_n(x, y) \geq f(x, y) \geq f_n(x, y) \sigma_n(x, y),$$

où nous avons posé

$$f_n(x, y) = 2^{2n+2} \frac{n! n!}{(2n+1)!} \frac{(x+y)_{2n+2} (x+n+1)^{x+n+1} (y+n+1)^{y+n+1}}{(x)_{n+1} (y)_{n+1} (x+y+2n+2)^{x+y+2n+2}}$$

et où  $\sigma_n(x, y)$  est la fonction définie par (13.22) qui, comme nous venons de le voir, est  $< 1$ .

Mais, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+n}{x+n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y+n}{y+n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+y+2n+2)^2}{(x+y+2n)(x+y+2n+1)} \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x+n}{x+n+1} \right)^{x+n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y+n}{y+n+1} \right)^{y+n} \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x+y+2n+2}{x+y+2n} \right)^{x+y+2n} = 1.1.1. \frac{1}{e} \frac{1}{e} e^2 = 1. \end{aligned}$$



On tire, donc, de (13.25)

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y).$$

Mais,

$$f_n(x, y) = \frac{\frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \frac{n! n^y}{(y)_{n+1}}}{\frac{(2n+1)! (2n+1)^{x+y}}{(x+y)_{2n+2}}} t_n(x, y)$$

où

$$t_n(x, y) = \frac{(2n+1)^{x+y}}{n^x n^y} 2^{2n+2} \frac{(x+n+1)^{x+n+1} (y+n+1)^{y+n+1}}{(x+y+2n+2)^{x+y+2n+2}}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{x+y} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x+n+1}{x+y+2n+2} \right)^x \\ &\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y+n+1}{x+y+2n+2} \right)^y \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+2n+2}{x+y+2n+2} \right)^{n+1} \\ &\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2y+2n+2}{x+y+2n+2} \right)^{n+1} = 2^{x+y} \frac{1}{2^x} \frac{1}{2^y} e^{\frac{x-y}{2}} e^{\frac{y-x}{2}} = 1. \end{aligned}$$

On a, donc, finalement

$$f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! n^x}{(x)_{n+1}} \frac{n! n^y}{(y)_{n+1}}}{\frac{(2n+1)! (2n+1)^{x+y}}{(x+y)_{2n+2}}} = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y).$$

#### 14. La fonction G(x).

14.1. Considérons la fonction

$$(14.1) \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)};$$

cette fonction est un cas particulier de la fonction B(x, y), mais, puisqu'elle présente un intérêt particulier <sup>(17)</sup> nous l'examinerons séparément.

On voit aussitôt que G(x) vérifie l'équation fonctionnelle

$$(14.2) \quad G(x+1) = \frac{1}{x G(x)}.$$

---

<sup>(17)</sup> Voir par exemple : N. NÖRLUND [32], p. 115-118.

Nous pouvons donner une autre forme à  $G(x)$ ; on a

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! n^{\frac{x}{2}}}{\left(\frac{x}{2}\right)_{n+1}}}{\sqrt{2} \frac{n! n^{\frac{x+1}{2}}}{\left(\frac{x+1}{2}\right)_{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{x(x+2)\dots(x+2n)}}{\frac{\sqrt{2n} \cdot 2^{n+1}}{(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)}{x(x+2)\dots(x+2n)\sqrt{2n}}; \end{aligned}$$

on a, donc,

$$(14.3) \quad G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n+1)}{x(x+2)\dots(x+2n)\sqrt{2n}};$$

mais, puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+2n}{2n} = 1,$$

nous pouvons écrire

$$(14.4) \quad G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n-2)\sqrt{x+2n}}.$$

D'autre part, comme nous avons vu au paragraphe 13.2,  $G(x)$  est décroissante pour  $x > 0$ ; elle est aussi convexe pour  $x > 0$ . En effet, on vérifie aussitôt que

$$\frac{x+1}{x}$$

est positive, décroissante et convexe pour  $x > 0$ ; donc, en remplaçant  $x$  par  $x+2\nu$ , on voit que

$$\frac{x+2\nu+1}{x+2\nu}$$

a les mêmes propriétés. D'après le théorème c du paragraphe 1.12, la fonction

$$\frac{x+1}{x} \frac{x+3}{x+2} \dots \frac{x+2n-1}{x+2n-2} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

est convexe (et décroissante) pour  $x > 0$ ; donc, d'après le théorème du paragraphe 1.13,

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n-2)} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

est convexe (et décroissante) pour  $x > 0$ .

14.2. On voit aussitôt que  $G(x)$  est *semi-décroissante et semi-convexe* <sup>(18)</sup> pour  $x > 0$  car, comme nous avons vu aux paragraphes 3.2 et 4.1, une fonction décroissante (resp. convexe) pour  $x > 0$  est aussi semi-décroissante (resp. semi-convexe) pour  $x > 0$ .

14.3. A. MAYER [29] a démontré qu'une fonction convexe et positive pour  $x > 0$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle (14.2) est identique à  $G(x)$ . La démonstration de Mayer suppose connue la fonction  $G(x)$ .

Nous allons démontrer le théorème suivant [2] :

Une fonction  $f(x)$  définie et positive pour  $x > 0$ , semi-décroissante pour  $x > \mathfrak{N}$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle (14.2), est identique à  $G(x)$ .

On tire, en effet, de (14.2),

$$(14.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x+2n+1) = \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n)} \frac{1}{f(x)} \\ f(x+2n) = \frac{x(x+2)\dots(x+2n-2)}{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)} f(x) \end{array} \right. \quad (n \text{ naturel}; 0 < x \leq 1).$$

Or,  $f(x)$  étant semi-décroissante pour les valeurs de la variable plus grandes que  $\mathfrak{N}$ , de trois nombres

$$x+2n-1 < x+2n < x+2n+1 \quad \left( n > \frac{\mathfrak{N}+1}{2}, x \in (0, 1] \right),$$

on tire

$$f(x+2n-1) \geq f(x+2n) \geq f(x+2n+1)$$

<sup>(18)</sup> Dans la suite nous écrirons, pour abrégier, semi convexe, semi-décroissante, etc., au lieu de semi-convexe 1, semi décroissante 1, etc.

et compte tenu de (14.5),

$$(14.6) \quad \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1} (x+2\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-2)} f(x) \geq \frac{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-2)}{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-1)} f(x) \geq \frac{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^{n+1} (x+2\nu-2)} f(x),$$

Mais, pour  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$  et l'on déduit de (14.6),

$$(14.7) \quad f_n(x) \leq f^2(x) \leq f_n(x) \frac{x+2n}{x+2n-1},$$

où

$$(14.8) \quad f_n(x) = \frac{(x+1)^{\circ} (x+3)^{\circ} \dots (x+2n-1)^2}{x^2 (x+2)^{\circ} \dots (x+2n-2)^{\circ} (x+2n)}$$

Il résulte de (14.7),

$$(14.9) \quad f^2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

et,  $f(x)$  étant positive pour  $x > 0$ ,

$$(14.10) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1)}{x(x+2)\dots(x+2n-2)\sqrt{x+2n}} = G(x).$$

14.4. Nous pouvons encore démontrer le théorème suivant :

*Une fonction  $f(x)$  définie et positive pour  $x > 0$ , semi-convexe pour  $x > \mathfrak{N}$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle (14.2), est identique à  $G(x)$ .*

De semi-convexité de  $f(x)$ , pour les valeurs de la variable plus grandes que  $\mathfrak{N}$ , on tire

$$\begin{aligned} f(x+2n) &\leq \frac{1}{2} [f(x+2n-1) + f(x+2n+1)] \\ f(x+2n+1) &\leq \frac{1}{2} [f(x+2n) + f(x+2n+2)] \\ &\left( n > \frac{\mathfrak{N}+1}{2}, 0 < x \leq 1 \right) \end{aligned}$$

ou, compte tenu de (14.5),

$$(14.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{\nu=1}^n \frac{x+2\nu-2}{x+2\nu-1} f(x) \\ \leq \frac{\frac{1}{2} \prod_{\nu=1}^{n-1} (x+2\nu-1)}{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-2)} \left( 1 + \frac{x+2n-1}{x+2n} \right) \frac{1}{f(x)}, \\ \prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-1) \\ \frac{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-1)}{\frac{1}{n+1} f(x)} \\ \prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-2) \\ \leq \frac{\frac{1}{2} \prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-2)}{\prod_{\nu=1}^n (x+2\nu-1)} \left( 1 + \frac{x+2n}{x+2n+1} \right) f(x). \end{array} \right.$$

Il en résulte, puisque  $f(x) > 0$ , pour  $x > 0$ ,

$$(14.12) \quad \varphi_n(x) \leq f'(x) \leq \varphi_n(x) \frac{(2x+4n)^2-1}{(2x+4n)^2-4},$$

où nous avons posé

$$(14.13) \quad \varphi_n(x) = f_n(x) \frac{2x+4n+2}{2x+4n+1},$$

$f_n(x)$  étant la fonction définie par (14.8).

De (14.13), (14.12) et (14.9), on a

$$f^2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = G^2(x),$$

ou bien,  $f(x)$  étant positive pour  $x > 0$ ,

$$f(x) = G(x).$$

14.5. H. P. Thielman [35], généralisant le résultat cité de Mayer, a démontré que si  $f(x)$  est une fonction définie et positive pour  $x > 0$ ,

convexe ou décroissante pour  $x > 0$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$(14.14) \quad f(x + \omega) = \frac{1}{x^k f(x)} \quad (x > 0, \omega > 0, k > 0),$$

alors  $f(x)$  est identique à la fonction

$$(14.15) \quad F(x) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+\omega}{2\omega}\right)} \right]^k.$$

Cette fonction peut s'exprimer, par la fonction  $B(x, y)$ , comme il suit :

$$(14.16) \quad F(x) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} B\left(\frac{x}{2\omega}, \frac{1}{2}\right) \right]^k.$$

14.6. Nous pouvons démontrer le théorème suivant [6] :

La fonction  $F(x)$ , définie par (14.15), est la seule fonction définie et positive pour  $x > 0$ , semi-décroissante  $\omega$  ou semi-convexe  $\omega$  dans le domaine  $x > \mathfrak{N}$ , qui vérifie l'équation fonctionnelle (14.14).

Soit  $f(x)$  une fonction semi-décroissante  $\omega$ , qui remplit les suppositions du théorème; nous allons démontrer que  $f(x) = F(x)$ ; si  $f(x)$  est semi-convexe  $\omega$ , la démonstration résulte d'une façon pareille.

On tire de (14.14),

$$(14.17) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x + (2n-1)\omega) &= \left[ \frac{\left(\frac{x+\omega}{2\omega}\right)_{n-1}}{2\omega \left(\frac{x}{2\omega}\right)_n} \right]^k \frac{1}{f(x)} \\ f(x + 2n\omega) &= \left[ \frac{\left(\frac{x}{2\omega}\right)_n}{\left(\frac{x+\omega}{2\omega}\right)_n} \right]^k f(x) \end{aligned} \right. \quad (0 < x \leq \omega).$$

A cause de semi-décroissance  $\omega$  de  $f(x)$  pour les valeurs de la variables plus grandes que  $\mathfrak{N}$ , de trois nombres

$$\begin{aligned} x + (2n-1)\omega &\leq x + 2n\omega \leq x + (2n+1)\omega \\ \left( n > \frac{\mathfrak{N} + \omega}{2}, x \in (0, \omega] \right) \end{aligned}$$

on tire la relation

$$f(x + (2n-1)\omega) \geq f(x + 2n\omega) \geq f(x + (2n+1)\omega),$$

et, grâce aux (14.17), on a

$$(14.18) \quad f_n^2(x) \leq f^2(x) \leq f_n^2(x) \left[ \frac{x + 2n\omega}{x + (2n-2)\omega} \right]^k,$$

où nous avons posé

$$(14.19) \quad f_n(x) = \left[ \frac{\left(\frac{x+\omega}{2\omega}\right)_n}{\left(\frac{x}{2\omega}\right)_n} \right]^k \frac{1}{(2\omega)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{x}{2\omega} + n\right)^{\frac{k}{2}}} \\ = \left[ \frac{(n-1)! (n-1)^{\frac{x}{2\omega}}}{\left(\frac{x}{2\omega}\right)_n} ; \frac{(n-1)! (n-1)^{\frac{x+\omega}{2\omega}}}{\left(\frac{x+\omega}{2\omega}\right)_n} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \right]^k \\ \times \left[ \frac{n-1}{\frac{x}{2\omega} + n} \right]^{\frac{k}{2}}.$$

On tire de (14.19) que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F(x)$$

et, de (14.18), puisque  $f(x)$  est positive, pour  $x > 0$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F(x).$$

14.7. Considérons maintenant l'équation fonctionnelle

$$(14.20) \quad \begin{cases} f(x+\omega) = \frac{1}{[(x+\rho_1) \dots (x+\rho_p)]^k} \frac{1}{f(x)} \\ (x > 0, k > 0; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p > 0). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(14.21) \quad P(x) = [(x+\rho_1) \dots (x+\rho_p)]^k,$$

(14.20) devient

$$(14.22) \quad f(x+\omega) = \frac{1}{P(x)f(x)}.$$

Si  $f_v(x)$  satisfait l'équation fonctionnelle

$$(14.23) \quad f_v(x+\omega) = \frac{1}{(x+\rho_v)^k f_v(x)},$$

la fonction

$$(14.24) \quad \Phi(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_p(x)$$

est une solution de (14. 20). D'autre part, toute solution  $\sigma(x)$  de (14. 20), est liée avec  $\Phi(x)$  par la relation

$$(14. 25) \quad Q(x + \omega) Q(x) = 1,$$

où

$$Q(x) = \frac{\sigma(x)}{\Phi(x)}.$$

Il en résulte que, la solution générale de (14. 20) est

$$(14. 26) \quad f(x) = \Phi(x) Q(x),$$

où  $\Phi(x)$  est la fonction (14. 24) et  $Q(x)$  une solution quelconque de (14. 25).

14. 8. Nous allons chercher les solutions semi-décroissantes  $\omega$  de (14. 20), positives, pour  $x > 0$ .

Si  $F(x)$  est la fonction définie par (14. 15), on reconnaît aussitôt que  $F(x + \rho_v)$  est une solution de (14. 23) positive et semi-décroissante  $\omega$ , pour  $x > 0$ ; mais, d'après le théorème *b* du paragraphe 3. 4, le produit des fonctions semi-décroissantes  $\omega$  et positives, pour  $x > 0$ , est une fonction qui a les mêmes propriétés; la fonction, donc,

$$(14. 27) \quad \Phi(x) = F(x + \rho_1) \dots F(x + \rho_p)$$

est une solution de (14. 20) semi-décroissante  $\omega$  et positive, pour  $x > 0$ .

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

$\Phi(x)$ , définie par (14. 27) est la seule solution semi-décroissante  $\omega$  et positive pour  $x > 0$  de (14. 20).

Soit  $f(x)$  une autre solution de (14. 20), qui a les propriétés de  $\Phi(x)$ . Il résulte de (14. 26) que,  $Q(x)$  est positive, pour  $x > 0$ ; on tire de (14. 18), pour  $n = 1$ ,

$$\left[ \frac{(x + \omega)}{x \sqrt{x + 2\omega}} \right]^k \leq F(x) \leq \left[ \frac{\sqrt{x + \omega}}{x} \right]^k,$$

qui devient, en remplaçant  $x$  par  $x + \rho_v$ ,

$$\left[ \frac{x + \rho_v + \omega}{(x + \rho_v) \sqrt{x + \rho_v + 2\omega}} \right]^k \leq F(x + \rho_v) \leq \left[ \frac{\sqrt{x + \rho_v + \omega}}{(x + \rho_v)} \right]^k$$

( $v = 1, 2, \dots, p$ )

et, en multipliant ( $v = 1, 2, \dots, p$ ),

$$(14. 28) \quad \frac{P_1}{P_0 \sqrt{P_2}} \leq \Phi(x) \leq \frac{\sqrt{P_1}}{P_0},$$



où nous avons posé, pour abrégé,

$$P_0 \equiv [P(x)]^k, \quad P_\lambda = [P(x + \lambda\omega)]^k.$$

$f(x)$ , étant supposée une solution de (14.20) ayant les propriétés de  $\Phi(x)$ , sera de la forme (14.26); mais,  $Q(x)$  étant positive, pour  $x > 0$ , il résulte de (14.28)

$$(14.29) \quad Q(x) \frac{P_1}{P_0 \sqrt{P_2}} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{P_1}}{P_0} Q(x).$$

En remplaçant  $x$  par  $x + \omega$ ,  $x + 2\omega$ ,  $x + 3\omega$ , (14.29) devient, grâce à (14.25),

$$(14.30) \quad \frac{1}{Q(x)} \frac{P_2}{P_1 \sqrt{P_3}} \leq f(x + \omega) \leq \frac{\sqrt{P_2}}{P_1} \frac{1}{Q(x)},$$

$$(14.31) \quad Q(x) \frac{P_3}{P_2 \sqrt{P_4}} \leq f(x + 2\omega) \leq \frac{\sqrt{P_3}}{P_2} Q(x),$$

$$(14.32) \quad \frac{1}{Q(x)} \frac{P_4}{P_3 \sqrt{P_5}} \leq f(x + 3\omega) \leq \frac{\sqrt{P_4}}{P_3} \frac{1}{Q(x)}.$$

$f(x)$ , étant semi-décroissante  $\omega$  pour  $x > 0$ , on tire de (14.29), (14.30) et (14.31),

$$\frac{P_0 P_2}{P_1 \sqrt{P_1 P_3}} \leq Q^2(x) \leq \frac{P_1 \sqrt{P_2 P_4}}{P_1 P_3}.$$

On en tire, en remplaçant  $x$  par  $x + 2n\omega$  et en tenant compte que  $Q(x)$  admet la période  $2\omega$ ,

$$\frac{P_{2n} P_{2n+2}}{P_{2n+1} \sqrt{P_{2n+1} P_{2n+3}}} \leq Q^2(x) \leq \frac{P_{2n+2} \sqrt{P_{2n+2} P_{2n+4}}}{P_{2n+1} P_{2n+3}}$$

et, en faisant  $n \rightarrow \infty$ ,

$$Q^2(x) = 1$$

ou,  $Q(x)$  étant positive pour  $x > 0$ ,

$$Q(x) = 1.$$

On tire, donc, de (14.26) que,

$$f(x) = \Phi(x).$$

On parvient au même résultat, si l'on cherche les solutions semi-convexes  $\omega$  et positives, pour  $x > 0$ . On a, donc, le théorème

$\Phi(x)$ , définie par (14.27) est la seule solution semi-convexe  $\omega$  et positive pour  $x > 0$  de (14.20).

14.9. Considérons le cas particulier suivant : Soit l'équation fonctionnelle

$$(14.33) \quad f\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)} f(x).$$

Si l'on demande la solution semi-décroissante  $\frac{1}{2}$  ou semi-convexe  $\frac{1}{2}$ , pour  $x > 0$ , de l'équation (14.33), on trouve

$$\Delta(x) = \frac{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(x+1)} = \frac{1}{x\text{B}\left(x, \frac{1}{2}\right)}.$$

Cette fonction a été examinée par Hisasue [21]

### NOTE.

W. Krull ([24], [25]) dans deux Mémoires très intéressants, généralisant les résultats d'Artin [9], a examiné l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad g(x+1) - g(x) = \varphi(x),$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction définie et continue pour  $x > \mathfrak{N}$ , qui vérifie l'une des conditions suivantes :

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x+h) - \varphi(x)] = 0 \quad (h > 0),$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta\varphi(x; h_1, h_2) = 0 \quad (0 < h_i \leq \delta; i = 1, 2),$$

où nous avons posé

$$(4) \quad \Delta\varphi(x; h_1, h_2) = \frac{\varphi(x+h_2) - \varphi(x)}{h_2} - \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h_1)}{h_1} \quad (19).$$

Nous donnerons dans ce qui suit les résultats principaux de W. Krull sans démonstration; le lecteur intéressé peut consulter les Mémoires originaux <sup>(10)</sup>.

<sup>(19)</sup> Voir paragraphe 1.9.

<sup>(10)</sup> On peut consulter aussi le Mémoire intéressant de A. Dinghas [16].

Son théorème fondamental I est le suivant :

Supposons que  $\varphi(x)$  puisse s'écrire

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

où  $\varphi_1(x)$  est convexe,  $\varphi_2(x)$  est concave pour  $x > \mathfrak{N}$  et qu'elles vérifient la condition (2); alors il existe une et, d'une constante additive près, une seule « solution normale »  $g(x)$  de l'équation (1), qui pour chaque  $h_i > 0$  vérifie la condition (3); pour  $x \geq B > \mathfrak{N}$  une solution normale est définie par

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \int_B^x \varphi(u) du - \frac{1}{2} \varphi(x) + Z[\varphi(x)], \\ Z[\varphi(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} X[\varphi(x+k)], \\ X[\varphi(x)] = \int_x^{x+1} \varphi(u) du - \frac{1}{2} [\varphi(x+1) + \varphi(x)]. \end{array} \right.$$

La fonction  $Z[\varphi(x)]$  tend vers zéro quand  $x \rightarrow \infty$ .

Les formules (5) sont une généralisation évidente de la formule de Stirling pour la fonction  $\Gamma(x)$ .

En supposant que  $\varphi(x)$  soit définie dans  $x > 0$  on peut démontrer les théorèmes suivants :

1. Si les suppositions du théorème fondamental sont remplies, la solution normale de l'équation (1), pour qui  $g(1) = 0$ , peut s'écrire comme il suit :

$$(6) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x \varphi(n) - \varphi(x) - \sum_{k=1}^n (\varphi(x+k) - \varphi(k)) \right] \\ = -\varphi(x) - x \varphi(0) - x \sum_{k=1}^{\infty} \Delta \varphi(k; 1, x).$$

Cette formule est une généralisation de la formule de Gauss pour la fonction  $\Gamma(x)$ .

2. Si  $\varphi(x)$  est convexe (resp. concave) pour  $x > \mathfrak{N}$ , les solutions normales de l'équation (1) sont concaves (resp. convexes) pour  $x > \mathfrak{N}$ .

3. Si les suppositions du théorème fondamental sont remplies, une solution convexe ou concave pour  $x > \mathfrak{N}$  de (1) est toujours une solution normale.

W. Krull considère ensuite l'équation

$$(7) \quad G(x+1) = \Phi(x) G(x),$$

où  $\Phi(x)$  est une fonction définie, positive et continue pour  $x > 0$ ; il démontre le théorème suivant :

Si  $\Phi(x)$  pour  $x > \mathfrak{N}$  est logarithmiquement convexe (resp. concave) et si  $\Phi(x)$  vérifie la condition

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} = 1,$$

l'équation (7) admet une et, d'un facteur constant près, une seule solution normale  $G(x)$  qui remplit la condition

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x+h)\Phi(x-h)}{\Phi(x)^2} = 1$$

et qui pour  $x > \mathfrak{N}$  est logarithmiquement concave (resp. convexe).

On peut démontrer [8] le théorème suivant qui généralise le résultat du paragraphe 8.

Supposons que  $\Phi(x)$  soit logarithmiquement concave (resp. convexe) pour  $x > \mathfrak{N}$  et remplisse les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{\Phi(x+h)}{\Phi(x)} \right]^x &= k^h \quad (k = \text{Cte}, h > 0), \\ \left[ \frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} \right]^{x+1} &\geq k \quad (\text{resp.} \leq k) \quad \text{pour } x > 0; \end{aligned}$$

une fonction  $G(x)$ , définie pour  $x > 0$ , se confond avec

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\Phi(1))_n \Phi(n)^x}{(\Phi(x))_{n+1}},$$

si  $G(x)$  vérifie les conditions suivantes :

- I. elle est une solution de l'équation (7);
- II.  $\left[ \frac{k}{\Phi(x)} \right]^x G(x)$  est décroissante (resp. croissante) pour  $x > 0$ ;
- III.  $G(1) = 1$ .

Dans son deuxième Mémoire W. Krull démontre le théorème fondamental II suivant :

Si  $\varphi(x)$  admet une dérivée d'ordre  $r$ , si cette dérivée est monotone et si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(r)}(x) = K$  ( $K$  fini), alors l'équation fonctionnelle (1) admet

une et, d'une constante additive près, une seule solution normale  $g(x)$  qui admet une dérivée d'ordre  $r$  et qui vérifie, pour  $h_1, h_2 > 0$ , la condition

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta g^{(r)}(x; h_1, h_2) = 0.$$

Si, en particulier,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(r)}(x) = 0$ , la solution normale vérifie de plus, pour chaque  $h > 0$ , la condition

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (g^{(r)}(x+h) - g^{(r)}(x)) = 0.$$

Il démontre ensuite les théorèmes suivants :

1. Si  $g(x)$  est une solution normale et intégrable de l'équation (1), la fonction

$$F(x) = \int_1^x g(u) du - (x-1) \int_1^x g(u) du$$

est une solution normale de l'équation

$$F(x+1) - F(x) = \int_1^x \varphi(u) du,$$

pour qui  $F(1) = 0$ .

2. Si  $\varphi^{(r)}(x)$  est monotone et si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(r)}(x) = \varphi(1) = \varphi'(1) = \dots = \varphi^{(r-1)}(1) = 0,$$

la solution normale de (1), pour qui  $g(1) = 0$ , prend la forme

$$(8) \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ [P_r(x) \varphi^{(r-1)}(n+2) + P_{r-1}(x) \varphi^{(r-2)}(n+2) + \dots + P_1(x) \varphi(n+2)] - \sum_{k=0}^n [\varphi(x+k) - \varphi(1+k)] \right\},$$

où  $P_k(x)$  sont définis par

$$P_1(x) = (x-1), \quad P_s(x) = \int_1^x P_{s-1}(u) du - (x-1) \int_1^2 P_{s-1}(u) du.$$

Si dans cette formule on pose  $r = 1$ , on trouve la formule (6).

3. Si  $\varphi^{(r)}(x)$  est monotone, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^{(r)}(x) = 0$  et si  $g(x)$  est une solution normale de (1),  $g^{(r)}(x)$  est aussi monotone.

On dit qu'une fonction  $f(x)$ , définie dans  $a \leq x < \infty$ , est à *variation bornée* dans cet intervalle s'il y a un nombre fini  $K$  tel que pour chaque suite finie  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , on a

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq K.$$

On a alors le théorème :

*Le théorème fondamental II est valable en supposant — au lieu de la monotonie de  $\varphi^{(r)}(x)$  — que  $\varphi^{(r)}(x)$  soit à variation bornée dans  $a \leq x < \infty$ , pour  $a$  assez grand.*

---

## BIBLIOGRAPHIE.

- 
- [1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser, Basél, 1961).
- [2] J. ANASTASSIADIS, *Fonctions semi-monotones et semi-convexes et solutions d'une équation fonctionnelle* (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 76, 1952, p. 148-160).
- [3] J. ANASTASSIADIS, *Sur les solutions logarithmiquement convexes ou concaves d'une équation fonctionnelle* (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 81, 1957, p. 78-87).
- [4] J. ANASTASSIADIS, *Une propriété de la fonction Gamma* (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 81, 1957, p. 116-118).
- [5] J. ANASTASSIADIS, *Définitions fonctionnelles de la fonction B(x, y)* (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 83, 1959, p. 24-32).
- [6] J. ANASTASSIADIS, *Remarques sur quelques équations fonctionnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2663-2665).
- [7] J. ANASTASSIADIS, *Sur les fonctions périodiquement à variation bornée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, p. 55-56).
- [8] J. ANASTASSIADIS, *Sur les solutions de l'équation fonctionnelle  $f(x+1) = \varphi(x)f(x)$*  (*C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, p. 2446-2447).
- [9] E. ARTIN, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion* (Teubner, Leipzig, 1931).
- [10] W. N. BAILEY, *Generalized Hypergeometric series* (Cambridge University Press, London, 1935).
- [11] J. BINET, *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes et sur leurs applications à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions des grands nombres* (*J. Éc. Polyt.*, cahier 27, 1839, p. 123-343).
- [12] H. BOHR et I. MOLLERUP, *Lærebog i matematisk Analyse*, t. III (Kopenhagen, 1922).
- [13] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques*, Livre IV, *Fonctions d'une variable réelle* (Hermann, Paris, 1949).
- [14] C. CARATHÉODORY, *Funktionentheorie*, t. I (Birkhäuser, Basél, 1950).
- [15] A. DENJOY, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*J. Math. pures et appl.*, 7<sup>e</sup> série, t. 1, 1915, p. 105-240).
- [16] A. DINGHAS, *Zur Theorie der Gammafunktion* (*Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, t. 6, 1959, p. 245-252).
- [17] L. EULER, *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* (Petersburg, 1755).

[18] L. EULER, *Institutiones calculi integralis*, t. I et II (Petersburg, 1768-1769).

[19] C. F. GAUSS, *Disquisitiones generales circa serien infinitam*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta \cdot (\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)} x^2 + \dots$$

[Comm. Soc. Sc. Gottingensis rec. (math.), t. 2, 1813, n° 1, p. 1-46].

[20] O. HAUPT et G. AUMANN, *Differential und Integralrechnung*, t. I et II (Walter de Gruyter, Berlin, 1938).

[21] H. K. HISASUE, *The Delta Funktion* (Proc. Phys. math. Soc. Japan, 3<sup>e</sup> série, t. 9, 1927, p. 145-151).

[22] O. HÖLDER, *Ueber die Eigenschaft der Gammafunktion, keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen* (Math. Ann., t. 28, 1887, p. 1-13).

[23] F. KLEIN, *Vorlesungen über hypergeometrische Funktion* (Springer, Berlin, 1933).

[24] W. KRULL, *Bemerkungen zur Differenzgleichung*

$$g(x+1) - g(x) = \varphi(x).$$

I. (*Math. Nachr.*, t. 1, 1948, p. 365-376).

[25] W. KRULL, *Bemerkungen zur Differenzgleichung*

$$g(x+1) - g(x) = \varphi(x).$$

II. (*Math. Nachr.*, t. 2, 1949, p. 251-262).

[26] M. KUCZMA, *Remarques sur quelques théorèmes de J. Anastassiadis* (*Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 84, 1960, p. 98-102).

[27] M. KUCZMA, *Remarks on some functional equations* (*Ann. Polonici Math.*, t. 8, 1960, p. 277-284).

[28] A. M. LEGENDRE, *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, t. II (Paris, 1814).

[29] A. MAYER, *Konvexe Lösungen der Funktionalgleichung*

$$\frac{1}{f(x+1)} = x f(x)$$

(*Acta Math.*, t. 70, 1939, p. 57-62).

[30] P. MONTEL, *Sur les fonctions convexes et les fonctions sous harmoniques* (*J. Math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. 7, 1928, p. 29-60).

[31] P. MONTEL, *Sur les propriétés périodiques des fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 2111-2112).

[32] N. NÖRLUNG, *Differenzenrechnung* (Springer, Berlin, 1924).

[33] A. OSTROWSKI, *Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, dass die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt* (*Math. Ann.*, t. 79, 1919, p. 286-288).



- [34] G. PLANA, *Note sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule générale pour la sommation des suites* [*Mém. Acad. Sc. Torino*, (1), 25, 1820, p. 403-418].
- [35] H. P. THIELMAN, *On the convex solution of a certain functional equation* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 47, 1941, p. 118-120).
- [36] K. WEIERSTRASS, *Ueber die Theorie der analytischen Fakultäten* (*J. reine angew. Math.*, t. 51, 1856, p. 1-60).
- [37] E. T. WHITTAKER et G. N. WATSON, *A course of modern Analysis* (Cambridge University Press, London, 1950).



---

## TABLE DES MATIÈRES.

---

### CHAPITRE I.

#### *Fonctions convexes, semi-monotones et semi-convexes.*

	Pages
1. Fonctions convexes et concaves d'une variable.....	1
2. Fonctions logarithmiquement convexes.....	6
3. Fonctions semi-monotones.....	10
4. Fonctions semi-convexes.....	12

### CHAPITRE II.

#### *La fonction $\Gamma(x)$ .*

5. Définitions formelles de la fonction $\Gamma(x)$ .....	17
6. La fonction $\mu(x)$ .....	24
7. Définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$ . La proposition de Bohr-Møllerup.....	27
8. Autre définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$ .....	29
9. Les valeurs de $\Gamma(x)$ pour les grandes valeurs de $x$ .....	31
10. Propriétés de la fonction $\Gamma(x)$ .....	32
11. Autre définition fonctionnelle de $\Gamma(x)$ .....	40
12. Quelques généralisations.....	41

### CHAPITRE III.

#### *La fonction $B(x, y)$ .*

13. Définition fonctionnelle de la fonction $B(x, y)$ .....	51
14. La fonction $G(x)$ .....	60
NOTE.....	69
BIBLIOGRAPHIE.....	74

---