

MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

N. W. Mc LACHLAN

PIERRE HUMBERT

Formulaire pour le calcul symbolique

Mémoires des sciences mathématiques, fascicule 100 (1950)

http://www.numdam.org/item?id=MSM_1950__100__1_0

© Gauthier-Villars, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémoires des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,

MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,

Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE C

Formulaire pour le Calcul symbolique

Par MM. N. W. Mc LACHLAN et Pierre HUMBERT

Deuxième édition revue et corrigée



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1950

Copyright by Gauthier Villars, 1950.

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.**

FORMULAIRE

POUR

LE CALCUL SYMBOLIQUE

Par MM. N. W. McLACHLAN
et Pierre HUMBERT.



NOTE LIMINAIRE.

Le calcul symbolique d'Heaviside, souvent appelé calcul opératoire, *operational calculus*, est un instrument de plus en plus utilisé par les physiciens et même par les mathématiciens, qui au début semblaient s'en méfier quelque peu. Mais c'est un outil qu'il faut savoir manier : si les règles opératoires sont simples et faciles à appliquer, il n'en est pas de même pour les correspondances entre originaux et images, et le chercheur, que ses calculs ont conduit à une forme opératoire compliquée, est trop souvent arrêté, faute de savoir à quel original correspond cette image inconnue, de même qu'il lui est parfois très malaisé d'écrire, *a priori*, l'image de telle fonction rencontrée. Les correspondances extrêmement nombreuses, établies par les divers auteurs, sont, en effet, presque toujours disséminées dans des mémoires dont la multiplicité rend toute recherche fort pénible. Le besoin semble urgent de présenter aux amateurs de ce calcul un formulaire contenant le plus grand nombre possible de correspondances, et constituant ainsi un instrument de travail infiniment précieux. Précisément, un ingénieur et mathématicien britannique, M. N. W. McLachlan, a recueilli une collection extraordinairement

riche de telles correspondances, liste qu'il avait l'intention de publier en Angleterre, mais pour laquelle il n'a point trouvé d'éditeur. J'ai pensé que ce travail considérable ne devait pas rester ignoré, et grâce à l'accueil que M. Henri Villat a bien voulu lui faire, nous donnons aujourd'hui ce formulaire, que j'ai adapté à l'écriture mathématique usitée en France, et que nous avons, M. McLachlan et moi-même, enrichi d'un certain nombre de résultats inédits. On trouvera donc ici, pour la première fois réunies, près de sept cents formules de calcul symbolique, soit règles opératoires ou correspondances, ces dernières classées d'après la nature de la fonction originale : on pourra ainsi se servir de ce fascicule comme d'un véritable dictionnaire. La tâche ingrate de la vérification de toutes ces formules a été assumée par M. W. T. Howell, que nous sommes heureux de remercier de son aide.

P. H.

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS.

Nous désignerons par t la variable indépendante (réelle) et par p la variable paramétrique. Les lettres m et n représenteront des nombres entiers, les lettres μ et ν des nombres quelconques.

Afin de simplifier l'écriture, dans l'expression des images des fonctions de Bessel et analogues, nous utiliserons les symboles abrégatifs suivants :

$$\begin{aligned} P &= p + \sqrt{p^2 + a^2}, & q &= \sqrt{p' + 1}; \\ Q &= p + \sqrt{p' + 1}, & r &= \sqrt{p^2 + a^2}; \\ R &= p + \sqrt{p^2 - a^2}, & s &= \sqrt{p^2 - a^2}; \\ S &= p + \sqrt{p^2 - 1}, & u &= \sqrt{p^2 - 1}; \\ T &= p + \sqrt{p^2 - i}, & v &= \sqrt{p^2 - ia^2}; \\ U &= \frac{1 + \sqrt{p^2 + 1}}{p}, & w &= \sqrt{p^2 - i}; \\ & & y &= \sqrt{t^2 - b^2}. \end{aligned}$$

Suivant l'usage, nous désignerons par $R(\nu)$ la partie réelle de ν .

DÉFINITIONS ET NOTATIONS UTILISÉES POUR LES FONCTIONS.

B_n = nombre de Bernoulli d'ordre n

$$B(\mu, \nu) = \int_0^1 x^{\mu-1} (1-x)^{\nu-1} dx = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} \quad \text{fonction Bêta eulérienne}$$

$$C(t) = \int_0^t \cos \frac{\pi x^2}{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{intégrale de Fresnel}$$

$$C_{m-n}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1} \frac{d^n}{dt^n} P_m(t) \quad \text{polynôme de Gegenbauer}$$

$$ci(t) = - \int_t^\infty \frac{\cos x}{x} dx \quad \text{cosinus intégral}$$

$$D_\nu(t) = 2^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{4} \right) \quad \text{fonction de Weber (ou du cylindre parabolique)}$$

$$D_n(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} H_n(t)$$

$$D_{-1}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{t^2}{4}} \operatorname{erfc} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$D_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} K_{\frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{4} \right)$$

$$E \left(k, \frac{\pi}{2} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (k^2 < 1) \quad \text{intégrale elliptique complète}$$

$$Ei(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^x}{x} dx \quad \text{logarithme intégral}$$

$$Ei(it) = ci(t) + i si(t)$$

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \quad \text{fonction d'erreur intégrale}$$

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{\pi t}} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(t^2) \quad \text{fonction complémentaire}$$

$${}_rF_s(a_1, \dots, a_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, m) \dots (\alpha_r, m)}{(\gamma_1, m) \dots (\gamma_s, m)} \frac{t^m}{m!} \quad \text{fonction hypergéométrique générale}$$

$${}_2F_1(a, \beta; \gamma; t) = 1 + \frac{\alpha\beta t}{1! \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)t^2}{2! \gamma(\gamma+1)} + \dots \quad \text{fonction de Gauss}$$

$${}_1F_1(a; \gamma; t) = 1 + \frac{\alpha t}{1! \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)t^2}{2! \gamma(\gamma+1)} + \dots \quad \text{fonction de Kummer}$$

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \quad [R(t) > 0] \quad \text{fonction Gamma eulérienne}$$

$$He_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2}} = t^n - \frac{n(n-1)}{2} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4} t^{n-4} - \dots \quad \text{polynôme d'Hermite}$$

$$\left. \begin{aligned} H_v^{(1)}(t) &= J_v(t) + iY_v(t) = \frac{2}{\pi} i^{-v-1} K_v(-it) = -i^{-2v} H_v^{(2)}(-t) \\ H_v^{(2)}(t) &= J_v(t) - iY_v(t) = \frac{2}{\pi} i^{v+1} K_v(-it) = -i^{2v} H_v^{(1)}(-t) \end{aligned} \right\} \quad \text{fonctions de Hankel}$$

$$H_v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{t}{2}\right)^{v+2r+1}}{\Gamma\left(r + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(v + r + \frac{3}{2}\right)} \quad \text{fonction de Struve}$$

$$H_v(ti\sqrt{i}) = ster_v t + i stei_v t$$

$$I_v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{v+2r}}{r! \Gamma(v+r+1)} = i^{-v} J_v(it) = i^v J_v(-it) \quad \text{fonction de Bessel d'argument imaginaire}$$

$$I_0(t\sqrt{i}) = bert + i beit \quad \text{fonctions de Kelvin}$$

$$J_v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{t}{2}\right)^{v+2r}}{r! \Gamma(v+r+1)} = \frac{1}{2} [H_v^{(1)}(t) + H_v^{(2)}(t)] \quad \text{fonction de Bessel}$$

$$Ji_v(t) = \int_t^{\infty} \frac{J_v(t)}{t} dt \quad \text{fonction de Bessel intégrale}$$

$$J_v(ti\sqrt{i}) = ber_v t + i bei_v t \quad \text{fonctions de Kelvin}$$

$$J_n^k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2 \cos \theta)^k \cos(n\theta - t \sin \theta) d\theta \quad \text{fonction de Bourget}$$

$$J_{\mu, \nu}(t) = \frac{t^{\mu+\nu}}{3^{\mu+\nu} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)} {}_0F_2\left(\mu+1, \nu+1; -\frac{t^2}{27}\right)$$

fonction de Bessel du troisième ordre

$$K_\nu(t) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)]$$

$$= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(it) = \frac{\pi}{2} i^{-\nu-1} H_\nu^{(2)}(-it)$$

fonction K de Bessel

$$i^{-\nu} K_\nu(t\sqrt{i}) = \ker_\nu t + i \operatorname{kei}_\nu t$$

$$Ki_\nu(t) = \int_t^\infty \frac{K_\nu(t)}{t} dt$$

fonction K intégrale

$$L_\nu(t) = i^{-\nu-1} H_\nu(it) = \sum_{r=0}^\infty \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2r+1}}{\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\nu+r+\frac{3}{2}\right)}$$

fonction de Struve d'argument imaginaire

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = 1 - nt + \frac{n(n-1)t^2}{2! 2!} + \dots$$

polynome de Laguerre

$$L_n^\alpha(t) = t^\alpha \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{n+\alpha} e^{-t}) = \sum_{r=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha-\beta+r)}{r! \Gamma(\alpha-\beta)} L_{n-r}^\beta(t)$$

polynome de Laguerre étendu

$$M_{\mu, \nu}(t) = t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \nu - \mu; 2\nu + 1; t\right)$$

fonction hypergéométrique confluente

$$M_{0, \nu}(t) = 2^{2\nu} \Gamma(\nu+1) \sqrt{t} I_\nu\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$O_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-xt} \left[(x + \sqrt{x^2+1})^n + (x - \sqrt{x^2+1})^n \right] dx$$

$$\left. \begin{array}{l} [R(t) > 0] \\ = \frac{2^{n-1} n!}{t^{n+1}} \left[1 + \frac{t^2}{2(2n-2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2)(2n-4)} + \dots \right] \end{array} \right\}$$

polynome de Neumann

$$P(t, \nu) = \int_0^t e^{-x} x^{\nu-1} dx$$

fonction P de Prym

$$P_n(t) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-t}{2}\right) \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

polynome de Legendre

$$P_\nu(t) = {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-t}{2}\right) \quad (|1-t| < 2)$$

fonction de Legendre

$$P_\nu^m(t) = (t^2-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_\nu(t)$$

fonction de Legendre associée

$$Q(t, \nu) = \int_t^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx$$

fonction Q de Prym

$$Q_\nu(t) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} (2t)^{-\nu-1} {}_2F_1\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu+1}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{t^2}\right) \quad \text{fonction de Legendre de seconde espèce}$$

$|t| > 1$

$$Q_\nu^m(t) = (t-1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} Q_\nu(t) \quad \text{fonction de Legendre associée de seconde espèce}$$

$$S(t) = \int_0^t \sin \frac{\pi x^2}{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{intégrale de Fresnel}$$

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= \frac{1}{3} (e^{-t} + e^{-jt} + e^{-j^2t}) \\ s_2(t) &= \frac{1}{3} (e^{-t} + j e^{-jt} + j^2 e^{-j^2t}) \quad (j^3 = 1) \\ s_3(t) &= \frac{1}{3} (e^{-t} + j^2 e^{-jt} + j e^{-j^2t}) \end{aligned} \right\} \quad \text{sinus du troisième ordre}$$

$$(s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 - 3s_1s_2s_3 = 1; s''' + s = 0)$$

$$S_n(t) = \int_0^\infty e^{-xt} [(x + \sqrt{x^2+1})^n - (x - \sqrt{x^2+1})^n] \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{polynome de Schläfli}$$

$$S(\nu; t) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{dx}{(1+x)^\nu} = t^{\nu-1} e^t \int_t^\infty e^{-x} x^{-\nu} dx = t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{\frac{t}{2}} W_{-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}}(t) \quad \text{fonction de Schlömilch}$$

$$S(1, -t) = -e^{-t} E i(t)$$

$$si(t) = - \int_t^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{sinus intégral}$$

$$T_n(t) = \frac{1}{2} [(t + i\sqrt{1-t^2})^n + (t - i\sqrt{1-t^2})^n] = \cos(n \arccos t) \quad \text{polynome de Tchebychev de première espèce}$$

$$T_m^n(t) = (-1)^n \frac{L_m^n(t)}{\Gamma(m+n+1)} = \frac{t^n}{n!(m+n)!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!(m+n-1)!1!} + \dots \quad \text{polynome de Sonine}$$

$$U_n(t) = \frac{1}{2i} [(t + i\sqrt{1-t^2})^n - (t - i\sqrt{1-t^2})^n] = \sin(n \arccos t) \quad \text{polynome de Tchebychev de seconde espèce}$$

$$W_{\mu, \nu}(t) = \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \nu\right)} M_{\mu, \nu}(t) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu + \nu\right)} M_{\mu, -\nu}(t) \quad \text{fonction hypergéométrique confluente de Whittaker}$$

$$W_{0,\nu}(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} K_{\nu}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$W_{\mu, \pm \frac{1}{4}}(t) = 2^{\frac{1}{4}-\mu} t^{\frac{1}{4}} D_{2\mu-\frac{1}{2}}(\sqrt{2t})$$

$$W_{\nu+\frac{1}{2}, \nu}(t) = t^{\nu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$$

$$Y_{\nu}(t) = \frac{\cos \nu \pi J_{\nu}(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu \pi} = \frac{i}{2} [H_{\nu}^{(2)}(t) - H_{\nu}^{(1)}(t)]$$

fonction de Bessel de
seconde espèce

$$Yi_{\nu}(t) = \int_t^{\infty} \frac{Y_{\nu}(t)}{t} dt$$

fonction Y intégrale

$$\zeta(\nu, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(t+r)^{\nu}} \quad [R(\nu) > 1]$$

fonction Zêta de Riemann
généralisée

$$\begin{aligned} \varpi(t) &= \log \Gamma(t) - \left(t - \frac{1}{2}\right) \log t + t - \log \sqrt{2\pi} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{x} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x - 1} \right] dx \end{aligned}$$

fonction de Binet

$$\Phi_m(t) = {}_1F_1(-m; 1; t)$$

polynome d'Abel

$$\Psi(t) = \frac{d}{dt} \log \Gamma(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

dérivée logarithmique de
la fonction Gamma

$$\gamma = -\Psi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right] = 0,5772156649\dots$$

constante d'Euler

A. — DÉFINITION ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

Le calcul symbolique substitue à une fonction $f(t)$ de la variable réelle t une fonction $\varphi(p)$ de la variable paramétrique p définie par l'intégrale de Laplace

$$(1) (a) \varphi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt; \quad (b) \varphi_b(p) = p \int_b^\infty e^{-pt} f(a\sqrt{t^2 - b^2}) dt;$$

$\varphi(p)$ est dite *image* de $f(t)$; $f(t)$ est l'*original* de $\varphi(p)$.

Nous écrirons, symboliquement ⁽¹⁾,

$$f(t) \supset \varphi(p),$$

$$\varphi(p) \subset f(t).$$

THÉORÈME D'INVERSION (Mellin). — On peut obtenir $f(t)$ à partir de son image par l'intégrale

$$(2) (a) f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt} \varphi(z)}{z} dz; \quad (b) f(a\sqrt{t^2 - b^2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt} \varphi_b(z)}{z} dz,$$

si les conditions suivantes sont vérifiées (voir référence 27).

a. Toutes les singularités de $\varphi(z)$ sont à la gauche de $c \pm i\infty$, $c > 0$.

b. L'intégrale

$$(a) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left| \frac{\varphi(z)}{z} \right| dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\varphi(c+iy)}{c+iy} \right| dy; \quad (b) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left| \frac{\varphi_b(z)}{z} \right| dz$$

est convergente.

c. $R(p) > 0$; (a) t réel et > 0 ; (b) t réel et $> b$.

d. L'intégrale (1) est absolument convergente.

e. (a) $\left| \frac{\varphi(p)}{p} \right|$; (b) $\left| \frac{e^{bp} \varphi_b(p)}{p} \right|$ tendent vers zéro uniformément

(1) On emploie très souvent la notation $f(t) \doteq \varphi(p)$. Un grand nombre de raisons (voir référence 24 à la bibliographie) rendent préférable celle que nous adoptons ici, et qui commence à se répandre dans les publications britanniques.

quand $|p|$ tend vers l'infini, c'est-à-dire que l'intégrale

$$(a) \int \frac{\varphi(z) dz}{z(z-p)}; \quad (b) \int e^{(z-p)b} \frac{\varphi_b(z) dz}{z(z-p)}$$

doit être nulle le long d'un demi-cercle de rayon infini, à droite de $c \pm i\infty$. L'intégrale (2) est alors nulle pour (a) $t < 0$, (b) $t < b$.

f. L'intégrale (2) représente une fonction continue de t , pour $t > 0$. La condition (b) est inutile lorsque la plus grande puissance de z dans le développement de $\varphi(z)$ est z^ν , avec $0 < R(\nu) < 1$.

THÉORÈME D'IMPULSION. — Soit $y = f(t)$ une impulsion de courte durée, $0 < t < h$; supposons la fonction $f(t)$ uniforme, finie en ses discontinuités, lesquelles sont en nombre limité; supposons, en outre, que l'intégrale $\int_0^h f(t) dt$ soit égale à une constante A . Alors, si h tend vers zéro, on aura (voir références 26, 27)

$$f(t) \supset Ap.$$

Ainsi l'on a, pour $0 < t < \frac{\pi}{2\omega}$,

$$\omega \cos \omega t \supset \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \left[p + \omega e^{-\frac{\pi p}{2\omega}} \right]$$

et, pour ω tendant vers l'infini, le second membre tend vers p .

THÉORÈME DU PRODUIT. — Si $f_1(t) \supset \varphi_1(p)$ et $f_2(t) \supset \varphi_2(p)$, on a

$$\int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t f_2(\lambda) f_1(t-\lambda) d\lambda \supset \frac{1}{p} \varphi_1(p) \varphi_2(p)$$

ou encore

$$\begin{aligned} & f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\lambda) f_2'(t-\lambda) d\lambda \\ &= f_2(t) f_1(0) + \int_0^t f_2(\lambda) f_1'(t-\lambda) d\lambda \supset \varphi_1(p) \varphi_2(p) \end{aligned}$$

et, s'il s'agit de n fonctions, avec $f_i(t) \supset \varphi_i(t)$,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \dots \int_0^t f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) \dots f_{n-1}(\lambda_{n-1}) f_n(t - \lambda_1 - \dots - \lambda_{n-1}) d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-1} \\ & \supset \frac{1}{p^{n-1}} \varphi_1(p) \dots \varphi_n(p) \quad (\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{n-1} \geq 0; \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \leq t). \end{aligned}$$

B. — FORMULES OPÉRATOIRES.

$$f(t) \supset \varphi(p)$$

$$f(at) \supset \varphi\left(\frac{p}{a}\right) \quad (a \text{ réel, } > 0; \text{ dans certains cas, } a \text{ complexe})$$

$$f(t-h) \supset e^{-hp} \varphi(p) \quad (t > h) \quad (h \text{ réel } > 0)$$

$$e^{at} f(bt) \supset \frac{p}{p-a} \varphi\left(\frac{p-a}{b}\right)$$

$$a^t f(bt) \supset \frac{p}{p-\log a} \varphi\left(\frac{p-\log a}{b}\right)$$

$$f(t - \log a) \supset \alpha^{-p} \varphi(p) \quad (a > 1)$$

$$f^{(n)}(t) \supset p^n \varphi(p) - \sum_{s=0}^{n-1} p^{n-s} f^{(s)}(0)$$

$$\supset p^n \varphi(p), \quad \text{si } f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

$$f'(t) \supset p \varphi(p), \quad \text{si } f(0) = 0$$

$$t^n f(t) \supset (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{\varphi(p)}{p} \right]$$

$$\left(t \frac{d}{dt}\right)^n f(t) \supset (-1)^n \left(p \frac{d}{dp}\right)^n \varphi(p)$$

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) (dt)^n \supset \frac{\varphi(p)}{p^n}$$

$$\int_0^t t \int_0^t \dots t \int_0^t f(t) (dt)^n \supset (-1)^n p \left(\frac{1}{p} \frac{d}{dp}\right)^n \left[\frac{\varphi(p)}{p} \right]$$

$$\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^n f(t) \supset p \int_p^\infty p \int_p^\infty \dots p \int_p^\infty \varphi(p) (dp)^n, \quad \text{si } \left[\left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt}\right)^s f(t)\right]_{t=0} = 0$$

[s = 0, 1, ..., (n-1)]

$$\frac{f(t)}{t^n} \supset p \int_p^\infty \dots \int_p^\infty \frac{\varphi(p)}{p} (dp)^n$$

$$\int_0^t \frac{f(t)}{t} dt \supset \int_p^\infty \frac{\varphi(p)}{p} dp$$

$$\int_t^\infty \frac{f(t)}{t} dt \supset \int_0^p \frac{\varphi(p)}{p} dp$$

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{\varphi(p)}{p} dp$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t f(\lambda) f(t-\lambda) d\lambda &\supset \frac{\varphi^2(p)}{p} \\
f(t^2) &\supset \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} \varphi\left(\frac{1}{x^2}\right) dx \\
\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f(x) dx &\supset \varphi(\sqrt{p}) \\
t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^\infty x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{xt}) f(x) dx &\supset p^{1-\nu} \varphi\left(\frac{1}{p}\right) \quad R(\nu) > -1. \\
\frac{t}{2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty J_{1, \frac{1}{2}} \left[3 \sqrt{\frac{t^2 x}{4}} \right] f(x) \frac{dx}{\sqrt{x}} &\supset \varphi\left(\frac{1}{p^2}\right) \\
\int_0^\infty \frac{t^x f(x) dx}{\Gamma(x+1)} &\supset \frac{\varphi(\log p)}{\log p} \\
\int_0^\infty \frac{t^x f'(x) dx}{\Gamma(x+1)} &\supset -\varphi'(\log p) \\
\int_0^t J_0[2\sqrt{x(t-x)}] f(x) dx &\supset \frac{\varphi\left(p + \frac{1}{p}\right)}{p + \frac{1}{p}} \\
\frac{1}{2^n t^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \text{He}_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) f(x) dx &\supset p^{\frac{n}{2}} \varphi(\sqrt{p}) \\
\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f^{(2n+1)}(x) dx + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{(2n-2s)! f^{(2s)}(0)}{(n-s)! t^{n-s}} &\supset p^{n+\frac{1}{2}} \varphi(\sqrt{p}) \\
\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} f^{(2n)}(x) dx + \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{(2n-2s)! f^{(2s-1)}(0)}{(n-s)! t^{n-s}} &\supset p^n \varphi(\sqrt{p}) \\
f(t) - \int_0^t f(\sqrt{t^2-x^2}) J_1(x) dx &\supset \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \varphi(\sqrt{p^2+1}) \\
\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[f(x) - \int_0^x y f(y) \frac{J_1(\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{x^2-y^2}} dy \right] dx &\supset \sqrt{\frac{p}{p+1}} \varphi(\sqrt{p+1}) \\
\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} x^{\frac{\nu}{2}} dx \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xy}) f(y) y^{-\frac{\nu}{2}} dy &\supset p^{\frac{1-\nu}{2}} \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \\
\frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \text{He}_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) dx \int_0^\infty f(y) J_\nu(2\sqrt{xy}) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{\nu}{2}} dy &\supset p^{\frac{n-\nu-1}{2}} \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \\
t^n f(t^2) &\supset \frac{\nu p}{2^{n+1} \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{4}} \text{He}_n\left(\frac{p x^{\frac{\nu}{2}}}{2}\right) \varphi(x^{-\frac{\nu}{2}}) x^{\frac{n\nu+\nu}{2}-1} dx \quad \text{quel que soit } \nu \quad (\neq 0).
\end{aligned}$$

Si $f(t) \supset \varphi(p)$ et $g(t) \supset f(p)$, on a

$$p \int_0^\infty \frac{g(t) dt}{(p+t)^2} = \varphi(p).$$

Si $f(t) \supset \varphi(p)$ et $g(t) \supset \sqrt{p} f\left(\frac{1}{p}\right)$, on a

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} t g\left(\frac{t^2}{4}\right) \supset \varphi(p^2).$$

Si $f(t) \supset \varphi(p)$ et $g(x, t) \supset p^\nu e^{-\alpha p t}$, on a

$$\int_0^\infty g(x, t) f(x) dx \supset p^{\nu-\mu} \varphi(p^\mu).$$

Si $f_1(t) \supset \varphi_1(p)$ et $f_2(t) \supset \varphi_2(p)$, on a

$$f_1(t) f_2(t) \supset p f_1\left(-\frac{d}{dp}\right) \left[\frac{\varphi_2(p)}{p}\right] = p f_2\left(-\frac{d}{dp}\right) \left[\frac{\varphi_1(p)}{p}\right],$$

si f_1 ou f_2 sont développables en série ordonnée suivant les puissances positives de t .

Si $f_m(t) \supset \varphi_m(p)$, on a

$$\sum_{m=1}^n f_m(t) \supset \sum_{m=1}^n \varphi_m(p).$$

Si $n = \infty$, la formule subsiste pourvu que les deux membres soient convergents.

$$\int_t^\infty f(t) dt \supset \left[\frac{\varphi(p)}{p}\right]_{p=0} - \frac{\varphi(p)}{p},$$

si l'intégrale est convergente, $t \geq 0$.

$$\int_t^\infty f(a\sqrt{t^2-b^2}) dt \supset e^{-bp} \left[\frac{\varphi(p)}{p}\right]_{p=0} - \frac{\varphi(p)}{p},$$

si l'intégrale est convergente, $t \geq b$.

Si $f(a\sqrt{t^2-b^2}) + c \supset \varphi(p)$, on a

$$f(a\sqrt{t^2-b^2}) \supset \varphi(p) - c e^{-bp}, \quad t > b.$$

C. — LISTE D'IMAGES.

D'une façon générale, le théorème d'inversion de Mellin s'applique à toutes les correspondances réunies ci-après. Nous signalons par un * les correspondances qui ne s'appliquent qu'à la partie réelle de l'intégrale de Mellin.

1. — Fonctions algébriques.

$$t^{\nu} \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu}} \quad \text{R}(\nu) > -1$$

$$(t^2 - b^2)^{\nu} \supset \frac{(2b)^{\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+1) b^{2\nu+1}}{\sqrt{\pi} p^{\nu-\frac{1}{2}}} K_{\nu+\frac{1}{2}}(bp) \quad (t > b), \quad \text{R}(\nu) \geq -\frac{1}{2}$$

$$(2bt - t^2)^{n-\frac{1}{2}} \supset \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) 2^n b^n p^{1-n} e^{-pb} I_n(bp) \quad (0 < t < 2b; n > 0)$$

$$(t^2 + 2bt)^{\nu} \supset \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} 2^{\nu+\frac{1}{2}} b^{\nu+\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}-\nu} e^{pb} K_{\nu+\frac{1}{2}}(bp) \quad (t > 0) \quad \text{R}(\nu) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+t} \supset -p e^p \text{Ei}(-p)$$

$$\frac{1}{1-t} \supset p e^{-p} \text{Ei}(p)$$

$$\frac{1}{(1+t)^{\nu}} \supset p S(\nu, p) = p^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{p}{2}} W_{-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}}(p)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} \supset \sqrt{\pi p} e^p \text{erfc} \sqrt{p}$$

$$\frac{t}{(1+t)^{\nu}} \supset 1 - (p + \nu - 1) S(\nu, p)$$

$$\frac{1}{1+t^2} \supset p [\sin p \text{ci}(p) - \cos p \text{si}(p)]$$

$$\frac{t}{1+t^2} \supset -p [\cos p \text{ci}(p) + \sin p \text{si}(p)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \supset \frac{\pi p}{2} [\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{Y}_0(p)]$$

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \supset \frac{\pi p}{2} [\mathbf{H}_1(p) - \mathbf{Y}_1(p)] - 1$$

*

$$(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \supset \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{p^{\nu-1}} 2^{\nu-1} [I_{\nu}(p) - L_{\nu}(p)] \quad * \quad (0 < t < 1), \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{t} \supset -p \operatorname{Ei}(-p) \quad (t > 1)$$

$$(t + \sqrt{t^2 + 1})^n + (t - \sqrt{t^2 + 1})^n \supset 2p O_n(p)$$

$$\frac{(t + \sqrt{t^2 + 1})^n - (t - \sqrt{t^2 + 1})^n}{\sqrt{t^2 + 1}} \supset \overline{p} S_n(p)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n t^{2n}}{2n(2n)!} \supset \varpi'(p)$$

2. — Exponentielles et logarithmes.

$$e^{at} \supset \frac{p}{p-a}$$

$$a^t \supset \frac{p}{p-\log a} \quad (a > 1)$$

$$e^{at} - 1 \supset \frac{a}{p-a}$$

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} \supset \frac{p}{(p-a)(p-b)}$$

$$\frac{b e^{bt} - a e^{at}}{b-a} \supset \frac{p^2}{(p-a)(p-b)}$$

$$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t} \supset p \log \frac{p-a}{p-b} \quad \star$$

$$\frac{1 - e^{at}}{t} \supset p \log \frac{p-a}{p} \quad \star$$

$$e^{at} t^{\nu-1} \supset \Gamma(\nu) \frac{p}{(p-a)^\nu} \quad \mathbf{R}(\nu) > 0$$

$$\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)(1-e^{-t})} \supset p \zeta(\nu, p)$$

$$\frac{e^t}{\sqrt{t}} \supset \frac{p \sqrt{\pi}}{\sqrt{p-1}}$$

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \supset \frac{p \sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$$

$$\frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p} e^{-a\sqrt{p}}$$

$$\frac{a^{2\nu+2}}{(2t)^{\nu+1}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \supset a^{\nu+2} p^{\frac{\nu}{2}+1} K_\nu(a\sqrt{p})$$

$$\frac{e^{-2\sqrt{t}}}{\sqrt{\pi t}} \supset \sqrt{p} e^{\frac{1}{p}} \operatorname{erfc} \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{1}{1+e^{-t}} \supset \frac{p}{2} \left[\Psi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{p}{2}\right) \right]$$

$$\frac{1-e^{-at}}{1-e^{-t}} \supset p[\Psi(p+a) - \Psi(p)] \quad R(p+a) > 0, R(a) > 0$$

$$\frac{(1-e^{-at})(1-e^{-bt})}{t(1-e^{-t})} \supset p \log \frac{\Gamma(p) \Gamma(p+a+b)}{\Gamma(p+a) \Gamma(p+b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} R(p) > 0 \\ R(p+a) > 0 \\ R(p+b) > 0 \\ R(p+a+b) > 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{(1-e^{-at})(1-e^{-bt})}{1-e^{-t}} \supset p[\Psi(p+b) + \Psi(p+a) - \Psi(p+a+b) - \Psi(p)]$$

$$\frac{t e^{-t}}{1-e^{-t}} \supset p \zeta(2, p+1)$$

$$(1-e^{-t})^v \supset p B(p, v+1) \quad R(v) > -1$$

$$\frac{1}{t(e^t-1)} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} \supset p \varpi(p)$$

$$\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \supset -p \varpi'(p)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{4t}} \supset (-1)^n p^{\frac{n+1}{2}} e^{-x\sqrt{p}}$$

$$e^{-t} \supset \frac{\sqrt{\pi}}{2} p e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{erfc} \frac{p}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} p e^{\frac{p^2}{4}} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{p}{2}\right)$$

$$e^{-t} t^{v-1} \supset \frac{\Gamma(v)}{2^{\frac{v}{2}}} p e^{\frac{p^2}{4}} D_{-v} \left(\frac{p}{\sqrt{2}} \right) \quad R(v) > 0$$

$$e^{-t} \supset \frac{1}{e} - Q(1, 1-p)$$

$$e^{-t} \supset \frac{1}{e} + P(1, p+1)$$

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \cos \left(n \pi \frac{b}{a} \right) \supset a \sqrt{p} \frac{\operatorname{ch} b \sqrt{p}}{\operatorname{sh} a \sqrt{p}} \quad (0 < b < a)$$

$$\frac{b}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \frac{\sin \left(n \pi \frac{b}{a} \right)}{n \pi} \supset \frac{\operatorname{sh} b \sqrt{p}}{\operatorname{sh} a \sqrt{p}} \quad (0 < b < a)$$

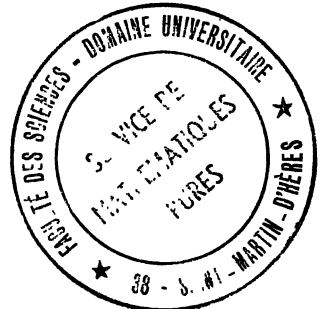
$$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2 k t}{a^2}} \frac{J_0 \left(\alpha_n \frac{r}{a} \right)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} \supset \frac{J_0 \left[i r \sqrt{\frac{p}{k}} \right]}{J_0 \left[i a \sqrt{\frac{p}{k}} \right]} \quad [r < a; \alpha_n = n^{\text{ième}} \text{ racine de } J_0(\gamma) = 0]$$

$$\log t \supset -\log p - \gamma$$

$$t^v \log t \supset \frac{\Gamma(1+v)}{p^v} [\Psi(v+1) - \log p] \quad R(v) > -1$$

$$\log \sqrt{t'+1} \supset -\cos p \operatorname{ci}(p) - \sin p \operatorname{si}(p)$$

$$\frac{\log(1+t')}{t} \supset p[\operatorname{ci}^2(p) + \operatorname{si}^2(p)] = -p S(1, ip) S(1, -ip)$$



$$\frac{\log(1-t^n)}{t} \supset -p S(1, p) S(1, -p) = p \operatorname{Ei}(p) \operatorname{Ei}(-p)$$

$$\log(e^t - 1) \supset -\gamma - \Psi(p)$$

$$\log^2 t \supset (\log p + \gamma)' + \frac{\pi^2}{6}$$

$$Q(t, n) \supset (n-1)! \left[1 - \frac{1}{(p+1)^n} \right]$$

3. — Fonctions circulaires.

$$\sin at \supset \frac{pa}{p^2 + a^2}$$

$$\cos at \supset \frac{p^2}{p^2 + a^2}$$

$$e^{-at} \sin bt \supset \frac{pb}{(p+a)^2 + b^2}$$

$$e^{-at} \cos bt \supset \frac{p(p+a)}{(p+a)^2 + b^2}$$

$$\sin(at + \theta) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}} \sin\left(\theta + \arctg \frac{a}{p}\right)$$

$$\cos(at + \theta) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}} \cos\left(\theta + \arctg \frac{a}{p}\right)$$

$$e^{-bt} \sin(at \pm \theta) \supset \frac{pa \cos \theta \pm p(p+b) \sin \theta}{(p+b)^2 + a^2}$$

$$e^{-bt} \cos(at \pm \theta) \supset \frac{p(p+b) \cos \theta \mp pa \sin \theta}{(p+b)^2 + a^2}$$

$$1 - 2 \sin at \supset \frac{(p-a)^2}{p^2 + a^2}$$

$$1 - \cos at \supset \frac{a^2}{p^2 + a^2}$$

$$\sin^2 t \supset \frac{2}{p^2 + 4}$$

$$\cos^2 t \supset \frac{p^2 + 2}{p^2 + 4}$$

$$\sin^{2n} t \supset \frac{(2n)!}{(p^2 + 2^2) \dots [p^2 + (2n)^2]}$$

$$\sin^{2n+1} t \supset \frac{(2n+1)! p}{(p^2 + 1^2) \dots [p^2 + (2n+1)^2]}$$

$$\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p} e^{-\frac{1}{4p}}$$

$$e^{-at} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi} \frac{p e^{-\frac{1}{4(p+a)}}}{\sqrt{p+a}}$$

$$\frac{\sin at}{t} \supset p \arctg \frac{a}{p}$$

$$t^n \sin at \supset n! \frac{P}{(p^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin \left[(n+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{p} \right] \quad (n > -1)$$

$$t^n \cos at \supset n! \frac{P}{(p^2 + a^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cos \left[(n+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{p} \right] \quad "$$

$$t^\nu \sin t \supset \frac{\Gamma(\nu+1)p}{2i(p^2+1)^{\nu+1}} [(p+i)^{\nu+1} - (p-i)^{\nu+1}] \quad \operatorname{R}(\nu) > -1$$

$$t^\nu \cos t \supset \frac{\Gamma(\nu+1)p}{2(p^2+1)^{\nu+1}} [(p+i)^{\nu+1} + (p-i)^{\nu+1}] \quad "$$

$$t \sin^2 \omega t \supset \frac{2\omega^2(3p^2 + 4\omega^2)}{p(p^2 + 4\omega^2)^2}$$

$$t^2 \sin \omega t \supset \frac{2\omega p(3p^2 - \omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^3}$$

$$\frac{\sin^2 t}{t} \supset \frac{p}{2} \log \sqrt{1 + \frac{4}{p^2}}$$

$$\sin b \sqrt{t} \supset \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{b^2}{4p}}$$

$$\sqrt{t} \cos b \sqrt{t} \supset \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{b^2}{4p}} \left(1 - \frac{b^2}{2p} \right)$$

$$\frac{\sin \sqrt{t}}{t} \supset \pi \operatorname{erf} \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$$\frac{e^{at} \sin bt}{t} \supset p \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{p-a}$$

$$t^{-\frac{3}{4}} \sin \sqrt{8t} \supset 2^{\frac{1}{4}} \pi \sqrt{p} e^{-\frac{1}{p}} I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p} \right)$$

$$t^{-\frac{5}{4}} \cos \sqrt{8t} \supset 2^{\frac{1}{4}} \pi \sqrt{p} e^{-\frac{1}{p}} I_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{\sqrt{p^2+1} \sqrt{p+\sqrt{p^2+1}}}$$

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{\sqrt{p^2+1} \sqrt{-p+\sqrt{p^2+1}}}$$

$$\sin at \sin bt \supset \frac{2abp^2}{[p' + (a-b)^2][p^2 + (a+b)^2]}$$

$$\cos at \cos bt \supset \frac{p^2(p^2 + a^2 + b^2)}{[p^2 + (a - b)^2][p^2 + (a + b)^2]}$$

$$\sin at \cos bt \supset \frac{ap(p^2 + a^2 - b^2)}{[p^2 + (a - b)^2][p^2 + (a + b)^2]}$$

$$\cos at \sin bt \supset \frac{bp(p^2 - a^2 + b^2)}{[p^2 + (a - b)^2][p^2 + (a + b)^2]}$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{\sin t^2}{t} \supset p \left[\operatorname{Ci} \left(\frac{p^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \right]^2 + p \left[\operatorname{Si} \left(\frac{p^2}{4} \right) - \frac{1}{2} \right]^2$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} t \supset \sin p \operatorname{ci}(p) - \cos p \operatorname{si}(p) \quad \star$$

$$\operatorname{arc} \sin t \supset \frac{\pi}{2} [\operatorname{I}_0(p) - \operatorname{L}_0(p)] \quad \star$$

$$t \operatorname{arc} \sin t \supset \frac{\pi}{2} \left[\frac{\operatorname{L}_0(p) - \operatorname{I}_0(p)}{p} + \operatorname{I}_{11}(p) - \operatorname{I}_1(p) \right] + 1 \quad \star$$

$$s_1(t) \supset \frac{p^3}{p^3 + 1}$$

$$s_2(t) \supset \frac{p}{p^3 + 1}$$

$$s_3(t) \supset \frac{-p^2}{p^3 + 1}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \sin \frac{a}{t} &\supset \frac{\pi}{2} \left[e^{-ap} - 1 + pa \left\{ \operatorname{K}_0(pa) \operatorname{L}_1(pa) - \operatorname{L}_0(pa) \operatorname{K}_1(pa) + \frac{2}{\pi} \operatorname{K}_0(pa) \right\} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-ap} - a \int_p^\infty \operatorname{K}_0(ap) dp \end{aligned}$$

$$\operatorname{arc} \sin \frac{a}{\sqrt{t^2 - b^2}} \supset \frac{\pi}{2} e^{-p\sqrt{a^2 + b^2}} - a \int_p^\infty \operatorname{ch} b(p - x) \operatorname{K}_0(x\sqrt{a^2 + b^2}) dx$$

($t > \sqrt{a^2 + b^2}$)

4. — Fonctions hyperboliques.

$$\operatorname{sh} at \supset \frac{pa}{p^2 - a^2}$$

$$\operatorname{ch} at \supset \frac{p^2}{p^2 - a^2}$$

$$\operatorname{sh}(\nu \arg \operatorname{ch} t) \supset \nu K_\nu(p) \quad (t > 1)$$

$$\frac{\operatorname{ch}(\nu \arg \operatorname{ch} t)}{\sqrt{t^2 - 1}} \supset p K_\nu(p) \quad »$$

$$e^{-bt} \operatorname{sh} at \supset \frac{pa}{(p+b)^2 - a^2}$$

$$e^{-bt} \operatorname{ch} at \supset \frac{p(p+b)}{(p+b)^2 - a^2}$$

$$\operatorname{sh}^2 t \supset \frac{2}{p^2 - 4}$$

$$\operatorname{ch}^2 t \supset \frac{p^2 - 2}{p^2 - 4}$$

$$\operatorname{sh}^{2n} t \supset \frac{(2n)!}{(p^2 - 2^2)(p^2 - 4^2) \dots (p^2 - 4n^2)}$$

$$\operatorname{ch}^{2n} t \supset \frac{(2n+1)! p}{(p^2 - 1^2)(p^2 - 3^2) \dots [p^2 - (2n+1)^2]}$$

$$\operatorname{sh}^{2n+1} t \supset \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}} e^{\frac{1}{4}p}$$

$$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p} e^{\frac{1}{4}p}$$

$$e^{-at} \operatorname{sh} 2b\sqrt{t} \supset \frac{\sqrt{\pi} bp e^{\frac{b^2}{4}p}}{(p+a)^{\frac{1}{2}}}$$

$$e^{-at} \frac{\operatorname{ch} 2b\sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi} p e^{\frac{b^2}{4}p}}{\sqrt{p+a}}$$

$$\frac{\operatorname{sh} at}{t} \supset \frac{p}{2} \log \frac{p+a}{p-a} = p \arg \coth \frac{p}{a} \quad R(p) > R(a)$$

$$\frac{(2t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu) \operatorname{sh} t} \supset p \zeta\left(\nu, \frac{p+1}{2}\right) \quad R(\nu) > 1$$

$$\frac{(2t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \coth t \supset p \left[\zeta\left(\nu, \frac{p}{2}\right) - \frac{2^{\nu-1}}{p^{\nu-1}} \right] \quad »$$

$$\frac{\operatorname{sh}^2 t}{t} \supset \frac{p}{2} \log \sqrt{1 - \frac{4}{p^2}}$$

$$\frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p(\sqrt{p^2 - 1} + p)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{p^2 - 1}}$$

$$\frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{p(p - \sqrt{p^2 - 1})^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{p^2 - 1}}$$

$$t^\nu \operatorname{sh} t \supset \frac{\Gamma(\nu + 1)p}{2(p^2 - 1)^{\nu+1}} [(p + 1)^{\nu+1} - (p - 1)^{\nu+1}] \quad \mathbf{R}(\nu) > -1$$

$$t^\nu \operatorname{ch} t \supset \frac{\Gamma(\nu + 1)p}{2(p^2 - 1)^{\nu+1}} [(p + 1)^{\nu+1} + (p - 1)^{\nu+1}] \quad \text{»}$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} \supset \frac{1}{2} p \left[\Psi\left(\frac{p+3}{4}\right) - \Psi\left(\frac{p+1}{4}\right) \right]$$

$$\operatorname{th} t \supset \frac{1}{2} p \left[\Psi\left(\frac{p+2}{4}\right) - \Psi\left(\frac{p}{4}\right) \right] - 1 = p \left[\Psi\left(\frac{p}{2}\right) - \Psi\left(\frac{p}{4}\right) - \log 2 \right] - 1$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \supset \frac{p^2}{2} \left[\Psi\left(\frac{p+2}{4}\right) - \Psi\left(\frac{p}{4}\right) \right] - p \quad \star$$

$$\frac{\operatorname{th} t}{t} \supset p \log \frac{p}{4} + 2p \log \Gamma\left(\frac{p}{4}\right) - 2p \log \Gamma\left(\frac{p+2}{4}\right) \quad \star$$

$$\frac{\operatorname{ch} t - 1}{t \operatorname{ch} t} \supset -p \log \frac{p}{4} + 2p \log \Gamma\left(\frac{p+3}{4}\right) - 2p \log \Gamma\left(\frac{p+1}{4}\right) \quad \star$$

$$\frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} \supset p \log \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}$$

$$\frac{1 - \operatorname{ch} t}{t^2} \supset p \log \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} + p \arg \coth p \quad \star$$

$$\sqrt{t} \operatorname{ch} b \sqrt{t} \supset \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{b^2}{2p}}}{2\sqrt{p}} \left(1 + \frac{b^2}{2p} \right)$$

$$t^{-\frac{1}{4}} \operatorname{sh} \sqrt{8t} \supset 2^{\frac{1}{4}} \pi \sqrt{p} e^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$t^{-\frac{3}{4}} \operatorname{ch} \sqrt{8t} \supset 2^{\frac{1}{4}} \pi \sqrt{p} e^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\operatorname{sh} at \operatorname{sh} bt \supset \frac{2abp^2}{[p^2 - (a-b)^2][p^2 - (a+b)^2]}$$

$$\operatorname{ch} at \operatorname{ch} bt \supset \frac{p^2(p^2 - a^2 - b^2)}{[p^2 - (a-b)^2][p^2 - (a+b)^2]}$$

$$\operatorname{sh} at \operatorname{ch} bt \supset \frac{ap(p^2 - a^2 + b^2)}{[p^2 - (a - b)^2][p^2 - (a + b)^2]}$$

$$\operatorname{ch} at \operatorname{sh} bt \supset \frac{bp(p^2 + a^2 - b^2)}{[p^2 - (a - b)^2][p^2 - (a + b)^2]}$$

$$\cos t \operatorname{ch} t \supset \frac{p^4}{p^4 + 4}$$

$$\operatorname{sh} at - \sin at \supset \frac{2pa^3}{p^4 - a^4}$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{t} + \sin \sqrt{t} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} \operatorname{ch} \frac{1}{4p}$$

$$\operatorname{sh} \sqrt{t} - \sin \sqrt{t} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} \operatorname{sh} \frac{1}{4p}$$

$$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{t} + \cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset 2\sqrt{\pi p} \operatorname{ch} \frac{1}{4p}$$

$$\frac{\operatorname{ch} \sqrt{t} - \cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \supset 2\sqrt{\pi p} \operatorname{sh} \frac{1}{4p}$$

$$\sqrt{t}(\operatorname{ch} \sqrt{t} + \cos \sqrt{t}) \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{4p} + \frac{1}{2p} \operatorname{sh} \frac{1}{4p} \right)$$

$$\sqrt{t}(\operatorname{ch} \sqrt{t} - \cos \sqrt{t}) \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{4p} + \frac{1}{2p} \operatorname{ch} \frac{1}{4p} \right)$$

$$2^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{3}{4}} (\operatorname{sh} \sqrt{8t} + \sin \sqrt{8t}) \supset \pi \sqrt{p} I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p} \right) \operatorname{ch} \frac{1}{p}$$

$$2^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{3}{4}} (\operatorname{sh} \sqrt{8t} - \sin \sqrt{8t}) \supset \pi \sqrt{p} I_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p} \right) \operatorname{sh} \frac{1}{p}$$

$$2^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{3}{4}} (\operatorname{ch} \sqrt{8t} + \cos \sqrt{8t}) \supset \pi \sqrt{p} I_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p} \right) \operatorname{ch} \frac{1}{p}$$

$$2^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{3}{4}} (\operatorname{ch} \sqrt{8t} - \cos \sqrt{8t}) \supset \pi \sqrt{p} I_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p} \right) \operatorname{sh} \frac{1}{p}$$

$$\log \operatorname{sh} t \supset -\Psi \left(\frac{p}{2} \right) - \frac{1}{p} - \gamma - \log 2$$

$$\log \operatorname{ch} t \supset \Psi \left(\frac{p}{2} \right) - \Psi \left(\frac{p}{4} \right) - \frac{1}{p} - \log 2$$

$$\log \operatorname{th} t \supset -2 \Psi \left(\frac{p}{2} \right) + \Psi \left(\frac{p}{4} \right) - \gamma$$

$$\log \frac{\operatorname{sh} t}{t} \supset -\Psi' \left(\frac{p}{2} \right)$$

$$\arg \operatorname{ch} \frac{t}{a} \supset K_0(pa) \quad (t > a)$$

$$e^{-bt} \arg \operatorname{ch} \frac{t}{a} \supset \frac{p}{p+b} K_0[a(p+b)] \quad (t > a)$$

$$e^{-b(t+a)} \arg \operatorname{ch} \frac{t+a}{a} \supset p e^{ap} \frac{K_0[a(p+b)]}{p+b} \quad *$$

$$\arg \operatorname{sh} t \supset \frac{\pi}{2} [\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{Y}_0(p)]$$

$$t \arg \operatorname{sh} t \supset \frac{\pi}{2} \left[\frac{\mathbf{H}_0(p) - \mathbf{Y}_0(p)}{p} + \mathbf{H}_1(p) - \mathbf{Y}_1(p) \right] - 1$$

$$\int_1^t \frac{\operatorname{ch}(v \arg \operatorname{ch} t)}{\sqrt{t^2-1}} dt \supset K_v(p) \quad (t > 1)$$

5. — Logarithme intégral et fonctions analogues.

$$\text{Ei}(t) \supset -\log(p-1)$$

$$si(t) \supset -\text{arc } \text{tg } p$$

$$ci(t) \supset -\log \sqrt{p'+1}$$

$$2[\sin t - t \text{ei}(t)] \supset \frac{\log(p'+1)}{p}$$

$$\sin t \, ci(t) - \cos t \, si(t) \supset -\frac{p}{p^2+1} \left(\log p + \frac{\pi}{2} p \right)$$

$$\cos t \, ci(t) + \sin t \, si(t) \supset -\frac{p}{p'+1} \left(p \log p - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$S(t) \supset \frac{(\sqrt{p'+1} - p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p'+1}}$$

$$C(t) \supset \frac{(\sqrt{p'+1} - p)^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p'+1}} = \frac{(\sqrt{p^2+1} + p)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{p^2+1}}$$

$$t S(t) \supset \frac{(\sqrt{p'+1} - p)^{\frac{1}{2}}}{2p\sqrt{p'+1}} \left(\frac{p}{2\sqrt{p'+1}} + \frac{p^2}{p^2+1} + 1 \right)$$

$$si(t') + \frac{\pi}{2} \supset \pi \left[C\left(\frac{p'}{4}\right) - \frac{1}{2} \right]^2 + \pi \left[S\left(\frac{p'}{4}\right) - \frac{1}{2} \right]^2$$

6. — Fonctions d'erreur intégrale.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{erf} t &\supset e^{\frac{p^2}{4}} \operatorname{erfc} \frac{p}{2} \\
 \operatorname{erf} \frac{a}{2\sqrt{t}} &\supset 1 - e^{-a\sqrt{p}} \\
 \operatorname{erf} \sqrt{t} &\supset \frac{1}{\sqrt{p+1}} \\
 e^t \operatorname{erf} \sqrt{t} &\supset \frac{\sqrt{p}}{p-1} \\
 e^{-t} \operatorname{erf} \sqrt{t} &\supset \frac{p}{(p+1)\sqrt{p+2}} \\
 e^{t+\frac{1}{4}} \left[\operatorname{erf} \left(t + \frac{1}{2} \right) - \operatorname{erf} \frac{1}{2} \right] &\supset \frac{e^{\frac{p^2}{4}}}{p+1} \operatorname{erfc} \frac{p}{2} \\
 a\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}} + \left(t + \frac{a^2}{2} \right) \operatorname{erf} \frac{a}{2\sqrt{t}} - \frac{a^2}{2} &\supset \frac{1 - e^{-a\sqrt{p}}}{p} \\
 e^{\frac{t}{a^2}} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{\sqrt{t}}{a} \right] &\supset \frac{a\sqrt{p}}{1 + a\sqrt{p}} \\
 e^{a^2 t} \operatorname{erfc} a\sqrt{t} &\supset \frac{\sqrt{p}}{a + \sqrt{p}} \\
 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}} - a \operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}} &\supset \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \\
 \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} + \operatorname{erf} \sqrt{t} &\supset \sqrt{p+1} \\
 \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^t \operatorname{erfc} \sqrt{t} &\supset \frac{p}{\sqrt{p+1}} \\
 e^{-at} \operatorname{erf} \sqrt{(b-a)t} &\supset \sqrt{b-a} \frac{p}{(p+a)\sqrt{p+b}} \\
 \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}} + \sqrt{a-b} e^{-bt} \operatorname{erf} \sqrt{(a-b)t} &\supset \frac{p\sqrt{p+a}}{p+b} \\
 1 - e^{\frac{a^2}{b^2}t} \operatorname{erfc} \frac{a}{b}\sqrt{t} &\supset \frac{1}{a+b\sqrt{p}} \\
 e^{-t} \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{t}} &\supset \frac{p}{p+1} e^{-\sqrt{p+1}}
 \end{aligned}$$

7. — Fonctions de Bessel ⁽¹⁾.

$$J_0(at) > \frac{p}{r}$$

$$J_\nu(at) > \frac{pa^\nu}{rP^\nu}$$

$$R(\nu) > -1$$

$$e^{-bt} J_\nu(at) > \frac{pa^\nu}{\sqrt{(p+b)^2 + a^2} [p+b + \sqrt{(p+b)^2 + a^2}]^\nu}$$

$$R(\nu) > -1$$

$$t^\nu J_\nu(t) > \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{p}{q^{2\nu+1}}$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$t^{\nu+1} J_\nu(t) > \frac{2^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \frac{p^2}{q^{2\nu+3}}$$

$$R(\nu) > -1$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{at}) > a^{\frac{\nu}{2}} p^{-\nu} e^{-\frac{a}{p}}$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$J_0(2\sqrt{at}) > e^{-\frac{a}{p}}$$

$$\sqrt{t} J_{\frac{1}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{q^2}$$

$$\sqrt{t} J_{-\frac{1}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p^2}{q^2}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(t) > \frac{p}{q\sqrt{Q}}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(t) > \frac{p\sqrt{Q}}{q}$$

$$t^{-1} J_\nu(at) > \frac{a^\nu p}{\nu P^\nu}$$

$$R(\nu) > 0$$

$$t J_\nu(t) > \frac{p(p+\nu q)}{q^2 Q^\nu}$$

$$R(\nu) > -2$$

$$t^\nu J_m(t) > (-1)^m \Gamma(\nu - m + 1) \frac{p}{q^{\nu+1}} P_\nu^m\left(\frac{p}{q}\right) \quad (m > 0)$$

$$R(\nu + m) > -1$$

$$t^\nu J_\mu(t) > \frac{\Gamma(\mu + \nu + 1)}{2^\nu \Gamma(\mu + 1)} p^{-\mu-\nu} {}_2F_1\left(\frac{\mu + \nu + 1}{2}, \frac{\mu + \nu + 2}{2}, \mu + 1, -\frac{1}{p^2}\right) \quad R(\mu + \nu) > 0$$

$$t^2 J_0(t) > \frac{p(2p^2 - 1)}{q^3}$$

$$\frac{J_\nu(t)}{t^2} > \frac{p(2\nu q - p)}{2\nu(4\nu^2 - 1)Q^{2\nu}}$$

$$R(\nu) > 1$$

(¹) Pour tout ce qui concerne les fonctions du genre Bessel, le lecteur voudra bien ne pas oublier les abréviations indiquées à la page 3.

$$J_0^2(t) > \frac{pk}{\pi} E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(k = \frac{2}{\sqrt{p^2+4}}\right)$$

$$J_v^2(t) > \frac{pk^{v+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2v}\theta \, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} \left(\frac{pk}{2} + \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)^{2v}} \left\{ \begin{array}{l} \left(k = \frac{2}{\sqrt{p^2+4}}, k^2 < 1\right) \\ R(v) > -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$J_\mu(t) J_\nu(t) > \frac{pk^{\mu+\nu+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\mu-\nu)\theta \cos^{\mu+\nu}\theta \, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} \left(\frac{pk}{2} + \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)^{\mu+\nu}} \left\{ \begin{array}{l} \left(k = \frac{2}{\sqrt{p^2+4}}\right) \\ R(\mu+\nu) > -1 \end{array} \right.$$

$$J_{v+\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right) > \frac{\Gamma(v+1)}{\sqrt{\pi}} p D_{-\nu-1}\left(p e^{-\frac{\pi t}{2}}\right) D_{-\nu-1}\left(p e^{-\frac{\pi t}{2}}\right) \quad R(v) > -1$$

$$J_v(2\sqrt{t}) > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{1}{2p}} \left[I_{\frac{v-1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right) - I_{\frac{v+1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right) \right]$$

$$t^\nu J_\mu(2\sqrt{t}) > \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \nu + 1\right)}{\Gamma(\mu+1) p^{\frac{\mu}{2} + \nu}} {}_1F_1\left(\frac{\mu}{2} + \nu + 1; \mu + 1; -\frac{1}{p}\right)$$

$$t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{t}) > \frac{n! e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+\alpha}} I_n^\alpha\left(\frac{1}{p}\right) \quad (\alpha > -1, n > 0)$$

$$\frac{J_0(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}} > \sqrt{\pi p} e^{-\frac{a^2}{8p}} I_0\left(\frac{a^2}{8p}\right)$$

$$t^n J_0(2\sqrt{t}) > \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^n} I_n\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{J_{2\nu}(\sqrt{8t})}{\sqrt{t}} > \sqrt{\pi p} e^{-\frac{1}{p}} I_\nu\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$R(v) > -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_{2\nu+n+1}(4\sqrt{t}) > \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{1}{p}} I_\nu\left(\frac{2}{p}\right)$$

$$R(v) > -\frac{3}{2}$$

$$J_v^2(2a\sqrt{t}) > e^{-\frac{a^2}{p}} I_v\left(\frac{2a^2}{p}\right)$$

$$R(v) > -1$$

$$J_v(2a\sqrt{t}) J_v(2b\sqrt{t}) > e^{-\frac{a^2+b^2}{p}} I_v\left(\frac{2ab}{p}\right)$$

$$R(v) > -1$$

$$J_v(2a\sqrt{t}) I_v(2b\sqrt{t}) > e^{-\frac{a^2+b^2}{p}} J_v\left(\frac{2ab}{p}\right)$$

$$R(v) > -1$$

$$\frac{J_v^2(2\sqrt{t})}{t} > \frac{p}{v} e^{-\frac{1}{p}} \left[I_v\left(\frac{2}{p}\right) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} I_{v+s}\left(\frac{2}{p}\right) \right]$$

$$R(v) > 0$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} [J_{\nu}(2\sqrt{t}) - I_{\nu}(2\sqrt{t})] \supset 2p^{-\nu} \operatorname{sh} \frac{1}{p} \quad R(\nu) > -1$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} [J_{\nu}(2\sqrt{t}) + I_{\nu}(2\sqrt{t})] \supset 2p^{-\nu} \operatorname{ch} \frac{1}{p} \quad R(\nu) > -1$$

$$\frac{J_{2n}(2a\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p} e^{-\frac{a^2}{2p}} I_n\left(\frac{a^2}{2p}\right)$$

$$J_0(a \operatorname{sh} t) \supset p K_{\frac{p}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) I_{\frac{p}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\frac{J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}t}\right)}{\sqrt{3t}} \supset p^{\frac{1}{3}} s_1(-p^{\frac{1}{3}})$$

$$\frac{J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}t}\right)}{\sqrt{3t}} \supset p^{\frac{1}{3}} s_3(-p^{\frac{1}{3}})$$

$$J_0(\alpha y) \supset \frac{p e^{-br}}{r} = \sqrt{\frac{2b}{\pi}} \frac{p K_{\frac{1}{2}}(br)}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{J_1(\alpha y)}{y} \supset \frac{p}{ab} [e^{-bp} - e^{-br}] \quad \star$$

$$\frac{t}{y} J_1(\alpha y) \supset \frac{p}{a} \left[e^{-pb} - \frac{p}{r} e^{-br} \right]$$

$$y J_1(\alpha y) \supset \frac{ap}{r^2} e^{-br} \left(b + \frac{1}{r} \right)$$

$$t J_0(\alpha y) \supset \frac{p^2}{r^2} e^{-br} \left(b + \frac{1}{r} \right)$$

$$\left(\frac{t-b}{t+b} \right)^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(\alpha y) \supset \frac{p}{r} e^{-br} \frac{\alpha^{\nu}}{p^{\nu}} \quad R(\nu) > -1$$

$$J_{\nu}(\alpha y) \supset \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ab)^{\nu+m} b \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + m + 1\right)}{m! \Gamma(\nu + m + 1) (2p)^{\frac{\nu}{2} + m - \frac{1}{2}}} K_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} + m}(pb)$$

$$J_0(a\sqrt{t^2 + 2bt}) \supset \frac{p}{r} e^{b(p-r)}$$

$$\frac{t^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(a\sqrt{t^2 + 2bt})}{(t + 2b)^{\frac{\nu}{2}}} \supset \frac{p}{r} e^{b(p-r)} \frac{\alpha^{\nu}}{p^{\nu}} \quad R(\nu) > -1$$

$$\int_0^t J_0(t) dt \supset \frac{1}{q}$$

$$\int_0^t J_\nu(at) dt \supset \frac{a^\nu}{r P^\nu} \quad R(\nu) > -1$$

$$\int_0^t t^\nu J_\nu(t) dt \supset \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} q^{2\nu+1}} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^t \frac{J_\nu^2(2\sqrt{\lambda}) d\lambda}{\lambda \sqrt{t-\lambda}} \supset \frac{\sqrt{\pi p}}{\nu} e^{-\frac{p}{r}} \left[I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} I_{\nu+s}\left(\frac{2}{p}\right) \right]$$

$$\int_0^t \frac{J_\nu(2\sqrt{\lambda}) d\lambda}{\sqrt{t-\lambda}} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-\frac{p}{r}} I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > -\frac{3}{2}$$

$$\int_b^t \frac{J_1(ay)}{y} dt \supset \frac{e^{-br} - e^{-bp}}{ab}$$

$$\int_b^t \frac{J_1(ay)}{y} t dt \supset \frac{1}{a} \left(e^{-br} - \frac{p}{r} e^{-bp} \right)$$

$$\int_t^\infty \frac{J_1(ay)}{y} t dt \supset \frac{p}{ar} e^{-br}$$

$$\int_t^\infty \frac{J_1(ay)}{y} dt \supset \frac{e^{-br} - e^{-b(p+a)}}{ab}$$

$$\int_t^\infty e^{-ct} \frac{J_1(ay)}{y} dt \supset \frac{e^{-b\sqrt{(p+c)^2+a^2}} - e^{-b(p+\sqrt{a^2+c^2})}}{ab}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{4bt}} J_\nu(2\sqrt{x}) x^{\frac{\nu}{2}} dx \supset b^{\nu+1} \sqrt{\pi} p^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{b}{\sqrt{p}}}$$

$$\frac{e^{-\frac{b^2}{4t}}}{\sqrt{t}} - \frac{b}{\sqrt{t}} \int_b^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{J_1(\sqrt{x^2-b^2})}{\sqrt{x^2-b^2}} dx \supset \sqrt{\pi p} e^{-b\sqrt{p+1}}$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{bt}) - b t^{\frac{\nu}{2}} \int_b^\infty \frac{J_\nu(2\sqrt{tx}) J_1(\sqrt{x^2-b^2})}{\sqrt{x^2-b^2}} dx \supset b^{\frac{\nu}{2}} p^{-\nu} e^{-\frac{\sqrt{p^2+1}}{bp}}$$

$$J_n^{(k)}(t) \supset 2^k \frac{p(p^2+1)^{\frac{k-1}{2}}}{(p+\sqrt{p^2+1})^n}$$

8. — Fonctions de Bessel de seconde espèce.

$$Y_0(at) > \frac{-2p}{\pi r} \log \frac{P}{a}$$

$$Y_\nu(at) > \frac{p \left[\left(\frac{a}{P} \right)^\nu \cos \nu \pi - \left(\frac{P}{a} \right)^\nu \right]}{r \sin \nu \pi}$$

$$-1 < R(\nu) < 1$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(t) > -\frac{p}{q} \sqrt{Q}$$

$$Y_{-\frac{1}{2}}(t) > \frac{p}{q \sqrt{Q}}$$

$$\sqrt{t} Y_{\frac{1}{2}}(t) > -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p^2}{q^2}$$

$$\sqrt{t} Y_{-\frac{1}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{q^2}$$

$$\frac{Y_0(a\sqrt{t})}{\sqrt{t}} > -\sqrt{\frac{p}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{8p}} K_0\left(\frac{a^2}{8p}\right)$$

$$\begin{aligned} t^{\mu-1} Y_\nu(at) > \frac{a^\nu \Gamma(\mu+\nu) p \cot \nu \pi}{2^\nu \Gamma(\nu+1) r^{\mu+\nu}} {}_2F_1\left[\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2}; \nu+1; \frac{a^2}{r^2}\right] \\ - \frac{2^\nu \Gamma(\mu-\nu) p \operatorname{cosec} \nu \pi}{a^\nu \Gamma(1-\nu) r^{\mu-\nu}} {}_2F_1\left[\frac{\mu-\nu}{2}, \frac{1-\mu-\nu}{2}; 1-\nu; \frac{a^2}{r^2}\right] \end{aligned}$$

$$R(\mu) > |R(\nu)|, \quad R(p+ia) > 0, \quad R(p-ia) > 0$$

$$Y_{-n-\frac{1}{2}}(t) > \frac{(-1)^n p}{q Q^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n \text{ entier } \geq 0)$$

$$Y_0(a\gamma) > -\frac{2p e^{-br}}{\pi r} \log \frac{P}{a}$$

$$t Y_0(at) > \frac{2p}{\pi r^2} \left[1 - \frac{p}{r} \log \frac{P}{a} \right]$$

$$t Y_1(at) > -\frac{2p}{\pi r^2} \left[\frac{p}{a} + \frac{a}{r} \log \frac{P}{a} \right]$$

9. — Fonctions de Bessel de troisième espèce (F. DE HANKEL).

$$H_0^{(1)}(at) \supset \frac{p}{r} \left[1 - \frac{2i}{\pi} \log \frac{P}{a} \right]$$

$$H_0^{(2)}(at) \supset \frac{p}{r} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{P}{a} \right]$$

$$H_\nu^{(1)}(at) \supset \frac{pa^\nu}{rP^\nu} \left[1 + \frac{i}{\sin \nu\pi} \right\} \cos \nu\pi - \frac{P^{2\nu}}{a^{2\nu}} \left\{ \right] \quad -1 < R(\nu) < 1$$

$$H_\nu^{(2)}(at) \supset \frac{pa^\nu}{rP^\nu} \left[1 - \frac{i}{\sin \nu\pi} \right\} \cos \nu\pi - \frac{P^{2\nu}}{a^{2\nu}} \left\{ \right] \quad \text{»}$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(at) \supset \frac{p}{r} \sqrt{\frac{a}{P}} \left[1 - i \frac{P}{a} \right]$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(at) \supset \frac{p}{r} \sqrt{\frac{a}{P}} \left[1 + i \frac{P}{a} \right]$$

$$H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(at) \supset \frac{p}{r} \sqrt{\frac{P}{a}} \left[1 + i \frac{a}{P} \right]$$

$$H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(at) \supset \frac{p}{r} \sqrt{\frac{P}{a}} \left[1 - i \frac{a}{P} \right]$$

$$\sqrt{i} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(at) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{r' \sqrt{a}} (a - ip)$$

$$\sqrt{i} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(at) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{r' \sqrt{a}} (a + ip)$$

$$\sqrt{i} H_{-\frac{1}{2}}^{(1)}(at) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{r^2 \sqrt{a}} (p + ia)$$

$$\sqrt{i} H_{-\frac{1}{2}}^{(2)}(at) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{r^2 \sqrt{a}} (p - ia)$$

$$t H_0^{(1)}(at) \supset \frac{p}{r^2} \left[\frac{p}{r} \left\{ 1 - \frac{2i}{\pi} \log \frac{P}{a} \right\} + \frac{2i}{\pi} \right]$$

$$t H_0^{(2)}(at) \supset \frac{p}{r^2} \left[\frac{p}{r} \left\{ 1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{P}{a} \right\} - \frac{2i}{\pi} \right]$$

$$t H_1^{(1)}(at) \supset \frac{p}{r^2} \left[\frac{a}{r} \left\{ 1 - \frac{2i}{\pi} \log \frac{P}{a} \right\} - \frac{2ip}{\pi a} \right]$$

$$t H_1^{(2)}(at) \supset \frac{p}{r^2} \left[\frac{a}{r} \left\{ 1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{P}{a} \right\} + \frac{2ip}{\pi a} \right]$$

$$\frac{H_0^{(1)}(a\sqrt{i})}{\sqrt{i}} \supset \sqrt{\pi p} e^{-\frac{a^2}{8p}} \left[I_0\left(\frac{a^2}{8p}\right) - \frac{i}{\pi} K_0\left(\frac{a^2}{8p}\right) \right]$$

$$\frac{H_0^{(2)}(a\sqrt{i})}{\sqrt{i}} \supset \sqrt{\pi p} e^{-\frac{a^2}{8p}} \left[I_0\left(\frac{a^2}{8p}\right) + \frac{i}{\pi} K_0\left(\frac{a^2}{8p}\right) \right]$$

$$H_0^{(1)}(ay) \supset \frac{p e^{-br}}{r} \left[1 - \frac{2i}{\pi} \log \frac{p}{a} \right]$$

$$H_0^{(2)}(ay) \supset \frac{p e^{-br}}{r} \left[1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{p}{a} \right]$$

$$t H_0^{(1)}(ay) \supset \frac{p e^{-br}}{r^2} \left[p \left(b + \frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{2i}{\pi} \log \frac{p}{a} \right) + \frac{2i}{\pi} \right]$$

$$t H_0^{(2)}(ay) \supset \frac{p e^{-br}}{r^2} \left[p \left(b + \frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{p}{a} \right) - \frac{2i}{\pi} \right]$$

$$y H_0^{(1)}(ay) \supset \frac{p e^{-br}}{r^2} \left[a \left(b + \frac{1}{r} \right) \left(1 - \frac{2i}{\pi} \log \frac{p}{a} \right) - \frac{2ip}{\pi a} \right]$$

$$y H_0^{(2)}(ay) \supset \frac{p e^{-br}}{r^2} \left[a \left(b + \frac{1}{r} \right) \left(1 + \frac{2i}{\pi} \log \frac{p}{a} \right) + \frac{2ip}{\pi a} \right]$$

10. — Fonctions de Bessel d'argument imaginaire.

$$\begin{aligned}
 I_0(at) &> \frac{p}{s} \\
 I_\nu(at) &> \frac{pa^\nu}{sR^\nu} & R(\nu) > -1 \\
 e^{-bt} I_\nu(at) &> \frac{pa^\nu}{\sqrt{(p+b)^2 - a^2} [p+b + \sqrt{(p+b)^2 - a^2}]^\nu} & R(\nu) > -1 \\
 t^\nu I_\nu(t) &> \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{p}{u^{2\nu+1}} & R(\nu) > -\frac{1}{2} \\
 t^{\nu+1} I_\nu(t) &> \frac{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{p^2}{u^{2\nu+3}} & R(\nu) > -1 \\
 t^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(2\sqrt{t}) &> p^{-\nu} e^{\frac{1}{p}} & R(\nu) > -1 \\
 I_0(2\sqrt{t}) &> e^{\frac{1}{p}} \\
 \sqrt{t} I_{\frac{1}{2}}(t) &> \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{u^2} \\
 \sqrt{t} I_{-\frac{1}{2}}(t) &> \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p^2}{u^2} \\
 I_{\frac{1}{2}}(t) &> \frac{p}{u\sqrt{S}} \\
 I_{-\frac{1}{2}}(t) &> \frac{p\sqrt{S}}{u} \\
 \frac{I_\nu(at)}{t} &> \frac{pa^\nu}{\nu R^\nu} & R(\nu) > 0 \\
 t I_\nu(t) &> \frac{p(p+\nu u)}{u^3 S^\nu} & R(\nu) > -2 \\
 t^\nu I_\mu(t) &> \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} p^{-\mu-\nu} {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}; \mu+1; \frac{1}{p^2}\right) & R(\mu+\nu) > 1 \\
 t^2 I_0(t) &> \frac{p(2p^2+1)}{u^3} \\
 \frac{I_\nu(t)}{t^2} &> \frac{p(2\nu u - p)}{2\nu(4\nu^2 - 1)S^{2\nu}} & R(\nu) > 1
 \end{aligned}$$

$$I_0^2(t) \supset \frac{2}{\pi} E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left(k = \frac{2}{p}\right)$$

$$I_\nu^2(t) \supset \frac{pk^{\nu+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\nu} \theta \, d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}\right)^{2\nu}} \quad \left(k = \frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right) \supset \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\nu+1) p D_{-\nu-1}(p) D_{-\nu-1}(-p) \quad R(\nu) > -1$$

$$I_\nu(2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{1}{2}p} \left[I_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right) - I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2p}\right) \right]$$

$$\frac{I_{2\nu}(\sqrt{8t})}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\pi p} e^{\frac{1}{2}p} I_\nu\left(\frac{1}{p}\right) \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{2\nu+2n+1}(4\sqrt{t}) \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{1}{2}p} I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > -\frac{3}{2}$$

$$I_\nu^2(2\sqrt{t}) \supset e^{\frac{2}{p}} I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > -1$$

$$I_\nu(2a\sqrt{t}) I_\nu(2b\sqrt{t}) \supset e^{\frac{a^2+b^2}{p}} I_\nu\left(\frac{2ab}{p}\right) \quad R(\nu) > -1$$

$$I_\nu(2a\sqrt{t}) J_\nu(2b\sqrt{t}) \supset e^{\frac{a^2-b^2}{p}} J_\nu\left(\frac{2ab}{p}\right) \quad R(\nu) > -1$$

$$\frac{I_\nu^2(2\sqrt{t})}{t} \supset \frac{p}{\nu} e^{\frac{2}{p}} \left[I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) + 2 \sum_{r=1}^{\infty} I_{\nu+r}\left(\frac{2}{p}\right) \right] \quad R(\nu) > 0$$

$$\frac{I_{\nu+\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} p Q_\nu(p)$$

$$\frac{I_{2\nu}(\sqrt{8t}) + J_{2\nu}(\sqrt{8t})}{\sqrt{t}} \supset 2\sqrt{\pi p} I_\nu\left(\frac{1}{p}\right) \operatorname{ch} \frac{1}{p} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{I_{2\nu}(\sqrt{8t}) - J_{2\nu}(\sqrt{8t})}{\sqrt{t}} \supset 2\sqrt{\pi p} I_\nu\left(\frac{1}{p}\right) \operatorname{sh} \frac{1}{p} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$I_\nu^2(2\sqrt{t}) + J_\nu^2(2\sqrt{t}) \supset 2 I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) \operatorname{ch} \frac{2}{p} \quad R(\nu) > -1$$

$$I_\nu^2(2\sqrt{t}) - J_\nu^2(2\sqrt{t}) \supset 2 I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) \operatorname{sh} \frac{2}{p} \quad R(\nu) > -1$$

$$\frac{I_\nu^2(2\sqrt{t}) + J_\nu^2(2\sqrt{t})}{t} \supset \frac{2p}{\nu} \operatorname{ch} \frac{1}{p} \left[I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) + 2 \sum_{r=1}^{\infty} I_{\nu+r}\left(\frac{2}{p}\right) \right] \quad R(\nu) > 0$$

$$\frac{I_\nu^2(2\sqrt{t}) - J_\nu^2(2\sqrt{t})}{t} \supset \frac{2p}{\nu} \operatorname{sh} \frac{1}{p} \left[I_\nu\left(\frac{2}{p}\right) + 2 \sum_{r=1}^{\infty} I_{\nu+r}\left(\frac{2}{p}\right) \right] \quad R(\nu) > 0$$

$$I_\nu(2\sqrt{t}) I_\nu(2\sqrt{at}) + J_\nu(2\sqrt{t}) J_\nu(2\sqrt{at}) > 2 I_\nu\left(\frac{2a}{p}\right) \operatorname{ch} \frac{a^2+1}{p} \quad R(\nu) > -1$$

$$I_\nu(2\sqrt{t}) I_\nu(2\sqrt{at}) - J_\nu(2\sqrt{t}) J_\nu(2\sqrt{at}) > 2 I_\nu\left(\frac{2a}{p}\right) \operatorname{sh} \frac{a^2+1}{p} \quad R(\nu) > -1$$

$$e^{-t} I_0(t^2) > \frac{p}{\sqrt{8\pi}} e^{\frac{p^2}{16}} K_0\left(\frac{p^2}{16}\right)$$

$$e^{-at} I_\nu(at) > \frac{2^\nu a^\nu p}{\sqrt{p(p+2a)} (\sqrt{p} + \sqrt{p+2a})^{2\nu}} \quad R(\nu) > -1$$

$$e^{-(a+b)t} I_0[(a-b)t] > \frac{p}{\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}$$

$$e^{-at} [(1+2at) I_0(at) + 2at I_1(at)] > \sqrt{1 + \frac{2a}{p}}$$

$$\left(\frac{t}{a-b}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a+b}{2}t} I_{\nu-\frac{1}{2}}\left[\frac{a-b}{2}t\right] > \frac{\Gamma(\nu)p}{\sqrt{\pi}(p+a)^\nu(p+b)^\nu} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$e^{-\frac{at}{2}} \left[I_{\nu-1}\left(\frac{at}{2}\right) - 2 I_\nu\left(\frac{at}{2}\right) + I_{\nu+1}\left(\frac{at}{2}\right) \right] > \frac{4 a^{\nu-1} p \sqrt{p}}{\sqrt{p+a} [\sqrt{p} + \sqrt{p+a}]^{2\nu}} \quad R(\nu) > -1$$

$$\frac{e^{-\frac{at}{2}} I_\nu\left(\frac{at}{2}\right)}{t} > \frac{\nu p [\sqrt{p+a} - \sqrt{p}]^\nu}{\sqrt{p+a} + \sqrt{p}}$$

$$e^{-at} I_0(\beta t) + (\alpha - \beta) \int_0^t e^{-at} I_0(\beta t) dt > \sqrt{\frac{p+2b}{p+2a}} \quad (\alpha = a+b, \beta = a-b)$$

$$t I_0(\alpha y) > \frac{p^2}{s^2} e^{-bs} \left(b + \frac{1}{s}\right)$$

$$y I_1(\alpha y) > \frac{ap}{s} e^{-bs} \left(b + \frac{1}{s}\right)$$

$$\frac{t I_1(\alpha y)}{y} > \frac{p}{a} \left[\frac{p}{s} e^{-bs} - e^{-bp} \right]$$

★

$$\left(\frac{t-b}{t+b}\right)^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(\alpha y) > \frac{p}{s} e^{-bs} \frac{a^\nu}{R^\nu} \quad (t > b) \quad R(\nu) > -1$$

$$\int_0^t I_0(at) dt > \frac{1}{s}$$

$$\int_0^t t^\nu I_\nu(t) dt > \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} u^{2\nu+1}} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\int_b^t \frac{I_1(ay)}{y} dt \supset \frac{e^{-bs} - e^{-bp}}{ab}$$

$$\int_b^t \frac{I_1(ay)}{y} t dt \supset \frac{1}{a} \left(\frac{p}{s} e^{-bs} - e^{-bp} \right)$$

$$\int_t^\infty e^{-at} \frac{I_1(ay)}{y} dt \supset \frac{e^{-bp} - e^{-b\sqrt{p^2+a^2}}}{ab}$$

$$\int_t^\infty e^{-at} \frac{I_1(\beta \sqrt{t'^2 - \gamma'^2})}{\sqrt{t'^2 - \gamma'^2}} dt \supset \frac{e^{-\gamma(\rho + \sqrt{ab})} - e^{-\gamma\sqrt{(p+a)(p+2b)}}}{\beta\gamma} \begin{pmatrix} \alpha = a + b \\ \beta = a - b \end{pmatrix}$$

$$e^{-at} I_0(\beta \sqrt{t'^2 - \gamma'^2}) \supset \frac{p e^{-\gamma\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}}{\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}$$

$$e^{-a(t+\gamma)} I_0(\beta \sqrt{t'^2 + 2\gamma t}) \supset \frac{p e^{\gamma[p - \sqrt{(p+a)(p+b)}]}}{\sqrt{(p+2a)(p+2b)}}$$

$$e^{-at} I_0(\beta \sqrt{t'^2 - \gamma'^2}) + 2b \int_\gamma^t e^{-at} I_0(\beta \sqrt{t'^2 - \gamma'^2}) dt \supset \sqrt{\frac{p+2b}{p+2a}} e^{-\gamma\sqrt{(p+a)(p+b)}}$$

$$\int_\gamma^t e^{-at} \frac{I_1(\beta \sqrt{t'^2 - \gamma'^2})}{\sqrt{t'^2 - \gamma'^2}} dt \supset \frac{e^{-\gamma\sqrt{(p+a)(p+b)}} - e^{-\gamma(\rho+a)}}{\beta\gamma}$$

$$\int_b^t e^{-at} \frac{I_1(ay)}{y} dt \supset \frac{e^{-b\sqrt{p^2+a^2}} - e^{-b(\rho+a)}}{ab}$$

$$\bigcirc \quad I_0(ay) \supset \frac{p e^{-bs}}{s}$$

$$\frac{I_1(ay)}{y} \supset \frac{p}{ab} (e^{-bs} - e^{-bp})$$

★

11. — Fonctions K de Bessel.

$$\begin{aligned}
 \bigcirc \quad K_0(at) &\supset \frac{p}{s} \log \frac{R}{a} \\
 K_\nu(at) &\supset \frac{\pi p}{2s \sin \nu \pi} \left[\left(\frac{R}{a} \right)^\nu - \left(\frac{a}{R} \right)^\nu \right] \quad -1 < R(\nu) < 1 \\
 K_{\pm \frac{1}{2}}(t) &\supset \frac{\pi p}{\sqrt{2(p+1)}} \\
 t^{\frac{1}{2}} K_{\pm \frac{1}{2}}(t) &\supset \frac{p \sqrt{\pi}}{(p+1) \sqrt{2}} \\
 \int_t^\infty K_0(at) dt &\supset \frac{\pi}{2a} - \frac{1}{s} \log \frac{R}{a} \\
 K_1(a \sqrt{t}) &\supset \frac{a}{8} \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{a^2}{8p}} \left[K_1 \left(\frac{a^2}{8p} \right) - K_0 \left(\frac{a^2}{8p} \right) \right] \\
 t K_0(at) &\supset \frac{p}{s^2} \left[\frac{p}{s} \log \frac{R}{a} - 1 \right] \\
 t K_1(at) &\supset \frac{p}{s^2} \left[\frac{p}{a} - \frac{a}{s} \log \frac{R}{a} \right] \\
 t^{-\frac{1}{2}} K_\nu(a \sqrt{t}) &\supset \frac{\sqrt{\pi p}}{2 \cos \frac{\nu \pi}{2}} e^{\frac{a^2}{8p}} K_{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{a^2}{8p} \right) \quad R(\nu) > -\frac{1}{4} \\
 \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} K_\nu \left(\frac{a^2}{4t} \right) &\supset \sqrt{p} K_{2\nu}(a \sqrt{p}) \\
 K_0(a\gamma) &\supset \frac{p}{s} \log \frac{R}{a} e^{-bs} \\
 t K_0(a\gamma) &\supset -\frac{p}{s^2} e^{-bs} \left[1 + p \log \frac{R}{a} \left\{ b - \frac{1}{s} \right\} \right] \\
 \gamma K_1(a\gamma) &\supset -\frac{p}{s^2} e^{-bs} \left[\frac{p}{a} + a \log \frac{R}{a} \left\{ b + \frac{1}{s} \right\} \right] \\
 \left(\frac{t-b}{t+b} \right)^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(a\gamma) &\supset \frac{\pi p e^{-bs}}{2s \sin \nu \pi} \left[\left(\frac{R}{a} \right)^\nu - \left(\frac{a}{R} \right)^\nu \right] \quad -1 < R(\nu) < 1 \\
 \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{1}{t}} K_\nu \left(\frac{1}{t} \right) &\supset \sqrt{8p} K_{\nu}(\sqrt{8p}) \\
 \frac{K_0(a \sqrt{t}) + \frac{\pi}{2} Y_0(a \sqrt{t})}{\sqrt{t}} &\supset \sqrt{\pi p} \operatorname{sh} \frac{a^2}{8p} K_0 \left(\frac{a^2}{8p} \right) \\
 \frac{K_0(a \sqrt{t}) - \frac{\pi}{2} Y_0(a \sqrt{t})}{\sqrt{t}} &\supset \sqrt{\pi p} \operatorname{ch} \frac{a^2}{8p} K_0 \left(\frac{a^2}{8p} \right)
 \end{aligned}$$

12. — Fonctions de Kelvin (*ber* et *bei*).

$$ber\,t \supset \frac{p(\sqrt{p^4+1}+p^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2(p^4+1)}}$$

$$beit \supset \frac{p(\sqrt{p^4+1}-p^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2(p^4+1)}}$$

$$ber_{\nu}t + i\,bei_{\nu}t \supset i^{\frac{3\nu}{2}} \frac{p}{T^{\nu}w} \quad R(\nu) > -1$$

$$ber(2\sqrt{t}) \supset \cos \frac{1}{p}$$

$$bei(2\sqrt{t}) \supset \sin \frac{1}{p}$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} ber_{\nu}\sqrt{t} \supset (2p)^{-\nu} \cos\left(\frac{1}{4p} + \frac{3\nu\pi}{4}\right) \quad R(\nu) > -1$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} bei_{\nu}\sqrt{t} \supset (2p)^{-\nu} \sin\left(\frac{1}{4p} + \frac{3\nu\pi}{4}\right) \quad R(\nu) > -1$$

$$\frac{ber_{\nu}t + i\,bei_{\nu}t}{t} \supset i^{\frac{3\nu}{2}} \frac{p}{\sqrt{T}^{\nu}} \quad R(\nu) > 0$$

$$\sqrt{t}(ber_{\nu}2\sqrt{t}\,bei'_{\nu}2\sqrt{t} - bei_{\nu}2\sqrt{t}\,ber'_{\nu}2\sqrt{t}) \supset \frac{1}{p} I_{\nu}\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > -2$$

$$ber'_{\nu}2\sqrt{t} + bei'_{\nu}2\sqrt{t} \supset I_{\nu}\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > -1$$

$$2t^{-\frac{1}{2}}(ber_{\nu}2\sqrt{t}\,ber'_{\nu}2\sqrt{t} + bei_{\nu}2\sqrt{t}\,bei'_{\nu}2\sqrt{t}) \supset p\,I_{\nu}\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > 0$$

$$ber'_{\nu}2\sqrt{t} + bei'_{\nu}2\sqrt{t} \supset p^2 I_{\nu}\left(\frac{2}{p}\right) \quad R(\nu) > 0$$

$$ber_n^2(-2\sqrt{t}) + bei_n^2(-2\sqrt{t}) \supset (-1)^{\frac{n}{2}} J_n\left(\frac{2}{p}\right)$$

$$ber_{\nu}ay + i\,bei_{\nu}ay \supset p \frac{e^{-bv}}{\nu}$$

$$\left(\frac{t-b}{t+b}\right)^{\frac{\nu}{2}} [ber_{\nu}ay + i\,bei_{\nu}ay] \supset \frac{a^{\nu} p e^{-bv + \frac{3}{4}\nu\pi i}}{\nu T^{\nu}} \quad R(\nu) > -1$$

$$t(ber_{\nu}ay + i\,bei_{\nu}ay) \supset \frac{p^{\nu}}{\nu^2} e^{-bv} \left(b + \frac{1}{\nu}\right)$$

$$\frac{ber_1 ay + i bei_1 ay}{y} \supset \frac{p e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{ab} (e^{-bp} - e^{-bv}) \quad \star$$

$$y (ber_1 ay + i bei_1 ay) \supset \frac{pa e^{-bv + \frac{3}{4}\pi i}}{v^2} \left(b + \frac{1}{v} \right)$$

$$t \frac{ber_1 ay + i bei_1 ay}{y} \supset \frac{p e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{a} \left(e^{-bp} - p \frac{e^{-bv}}{v} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{16t}} ber(2\sqrt{x}) dx \supset 2\sqrt{\pi} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$$

13. — Fonctions *ker* et *kei*.

$$kert + i keit \supset \frac{p}{w} \log \frac{T}{\sqrt{i}}$$

$$ker_{\nu} t + i kei_{\nu} t \supset \frac{\pi p [T^{\nu} - i^{\nu} T^{-\nu}]}{2 i^{\frac{1+\nu}{2}} w \sin \nu \pi} \quad -1 < R(\nu) < 1$$

$$ker a y + i kei a y \supset \frac{p}{\nu} e^{-b\nu} \log \frac{T}{a \sqrt{i}}$$

$$\left(\frac{t-b}{t+b}\right)^{\frac{\nu}{2}} [ker_{\nu} a y + i kei_{\nu} a y] \supset \frac{\pi p e^{-b\nu - \frac{\nu \pi i}{2}}}{2 \nu \sin \nu \pi} \left[\left(\frac{T}{a \sqrt{i}}\right)^{\nu} - \left(\frac{a \sqrt{i}}{T}\right)^{\nu} \right] \quad -1 < R(\nu) < 1$$

$$t(ker a y + i kei a y) \supset -\frac{p e^{-b\nu}}{\nu} \left[1 + p \log \frac{T}{a \sqrt{i}} \left\{ b - \frac{1}{\nu} \right\} \right]$$

$$y(ker_1 y + i kei_1 y) \supset -\frac{p e^{-b\nu - \frac{\pi i}{2}}}{\nu} \left[\frac{p}{a \sqrt{i}} + a \sqrt{i} \log \frac{T}{a \sqrt{i}} \left\{ b + \frac{1}{\nu} \right\} \right]$$

$$t(ker a t + i kei a t) \supset \frac{p}{\nu} \left[\frac{p}{\nu} \log \frac{T}{a \sqrt{i}} - 1 \right]$$

$$t(ker_1 a t + i kei_1 a t) \supset -\frac{p e^{-\frac{\pi i}{2}}}{\nu} \left[\frac{p}{a \sqrt{i}} + \frac{a \sqrt{i}}{\nu} \log \frac{T}{a \sqrt{i}} \right]$$

14. — Fonctions de Bessel intégrales.

$$J i_0(t) \supset \arg \operatorname{sh} p = \log Q$$

$$J i_\nu(t) \supset \frac{1}{\nu} [1 - (q - p)^\nu] \quad R(\nu) > 0$$

$$J i_0(\nu \sqrt{t}) \supset \frac{1}{2} E i \left(-\frac{1}{p} \right)$$

$$Y i_0(t) \supset -\frac{1}{\pi} (\log Q)^2$$

$$Y i_\nu(t) \supset \frac{1 + \cos \nu \pi - Q^\nu - Q^{-\nu} \cos \nu \pi}{\nu \sin \nu \pi} \quad -1 < R(\nu) < 1$$

$$K i_0(t) \supset \frac{(\arg \operatorname{ch} p)^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$K i_\nu(t) \supset \frac{\pi \left[S^\nu + S^{-\nu} - 2 \cos \frac{\nu \pi}{2} \right]}{2 \nu \sin \nu \pi} \quad -1 < R(\nu) < 1$$

15. — Fonctions de Struve.

$$\mathbf{H}_0(at) \supset \frac{2p}{\pi r} \arg \operatorname{sh} \frac{a}{p} = \frac{2p}{\pi r} \log \frac{a+r}{p}$$

$$\mathbf{H}_1(t) \supset \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{p^2}{q} \log U \right)$$

$$\mathbf{H}_2(t) \supset \frac{2}{\pi} \left(-2p + \frac{1}{3p} + \frac{2p^3+p}{q} \log U \right)$$

$$\mathbf{H}_3(t) \supset \frac{2}{\pi} \left[4p^2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{15p^3} - \frac{4p^4+3p^2}{q} \log U \right]$$

$$\frac{\mathbf{H}_1(t)}{t} \supset \frac{2}{\pi} (-p + pq \log U)$$

$$\frac{\mathbf{H}_2(t)}{t} \supset \frac{2}{\pi} \left(p^2 + \frac{1}{3} - pq \log U \right)$$

$$\frac{\mathbf{H}_3(t)}{t} \supset \frac{2}{\pi} \left[-\frac{4p^3}{3} - \frac{7p}{9} + \frac{1}{15p} + \frac{pq(4p^2+1)}{3} \log U \right]$$

$$\mathbf{H}_0(ti\sqrt{i}) = \operatorname{ster} t + i \operatorname{stei} t \supset \frac{2}{\pi} \frac{p}{w} \log \frac{i\sqrt{i} + w}{p}$$

$$\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(t) \supset \sqrt{2p} - \frac{p}{q} \sqrt{Q}$$

$$\mathbf{H}_{-\frac{1}{2}}(t) \supset \frac{p}{q\sqrt{Q}}$$

$$\sqrt{t} \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(t) \supset \frac{\sqrt{2}}{q^2 \sqrt{\pi}}$$

$$\sqrt{t} \mathbf{H}_{-\frac{1}{2}}(t) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{p}{q^2}$$

$$\frac{\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t}} \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \log \frac{q}{p}$$

$$\mathbf{H}_{-n-\frac{1}{2}}(t) \supset (-1)^n \frac{p}{q Q^{n+\frac{1}{2}}} \quad (n \text{ entier } \geq 0)$$

$$\sqrt{t} \mathbf{H}_{\frac{3}{2}}(t) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{2p} - \frac{p}{q} + p \log \frac{q}{p} \right]$$

$$t \sqrt{t} \mathbf{H}_{\frac{5}{2}}(t) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3p^2+1}{p^2 q^2}$$

$$\frac{\mathbf{H}_{-\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t}} > \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} p \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p}$$

$$\sqrt{t} \mathbf{H}_{-\frac{3}{2}}(t) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{p^2}{q^2} - p \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p} \right)$$

$$\frac{\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t}} > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{2} - p^2 \log \frac{q}{p} \right)$$

$$\frac{\mathbf{H}_\nu(t)}{\sqrt{t}} > \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \int_p^q \frac{dx}{(p+x)^{\nu+\frac{1}{2}} \sqrt{q^2-x^2}}$$

$$\mathbf{R}(\nu) > -\frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\sqrt{p^2 + \sin^2 \theta} (p + \sqrt{p^2 + \sin^2 \theta})^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\pi t}{2} [\mathbf{J}_1(t) \mathbf{H}_0(t) - \mathbf{J}_0(t) \mathbf{H}_1(t)] > \frac{1}{q^2}$$

$$\frac{\pi}{2} t [\mathbf{J}_\nu(t) \mathbf{H}'_\nu(t) - \mathbf{J}'_\nu(t) \mathbf{H}_\nu(t)] > \frac{1}{q^{2\nu+1}}$$

$$\mathbf{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{H}_\nu(t \sin \theta) \sin^{1-\nu} \theta \, d\theta > (2p)^{\frac{1}{2}-\nu} - \frac{p[p + \sqrt{p^2+1}]^{\frac{1}{2}-\nu}}{\sqrt{p^2+1}}$$

16. — Fonctions de Struve d'argument imaginaire.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_0(t) & \supset \frac{2P}{\pi u} \arcsin \frac{1}{p} \\
\mathbf{L}_1(t) & \supset \frac{2}{\pi} \left[-1 + \frac{p^2}{u} \arcsin \frac{1}{p} \right] \\
\mathbf{L}_2(t) & \supset \frac{2}{\pi} \left[-2p - \frac{1}{3p} + \frac{2p^3 - p}{u} \arcsin \frac{1}{p} \right] \\
\mathbf{L}_3(t) & \supset \frac{2}{\pi} \left[-4p^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{15p^2} + \frac{4p^4 - 3p^2}{u} \arcsin \frac{1}{p} \right] \\
\frac{\mathbf{L}_1(t)}{t} & \supset \frac{2}{\pi} \left[p - pu \arcsin \frac{1}{p} \right] \\
\frac{\mathbf{L}_2(t)}{t} & \supset \frac{2}{\pi} \left[p^2 - \frac{1}{3} - p^2 u \arcsin \frac{1}{p} \right] \\
\frac{\mathbf{L}_3(t)}{t} & \supset \frac{2}{\pi} \left[\frac{4p^4}{3} - \frac{7p}{9} - \frac{1}{15p} - \frac{pu(4p^2 - 1)}{3} \arcsin \frac{1}{p} \right] \\
\mathbf{L}_{\frac{1}{2}}(t) & \supset \frac{p\sqrt{S}}{u} - \sqrt{2p} \\
\mathbf{L}_{-\frac{1}{2}}(t) & \supset \frac{p}{u\sqrt{S}} \\
\sqrt{t}\mathbf{L}_{\frac{1}{2}}(t) & \supset \frac{\sqrt{2}}{u^2\sqrt{\pi}} \\
\sqrt{t}\mathbf{L}_{-\frac{1}{2}}(t) & \supset \frac{p\sqrt{2}}{u^2\sqrt{\pi}} \\
\mathbf{L}_{-n-\frac{1}{2}}(t) & \supset \frac{p}{uS^{n+\frac{1}{2}}} \\
\frac{\mathbf{L}_{\frac{1}{2}}(t)}{\sqrt{t}} & \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \log \frac{u}{p} \\
\sqrt{t}\mathbf{L}_{\frac{3}{2}}(t) & \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{p}{u^2} - p \log \frac{u}{p} - \frac{1}{2p} \right] \\
\frac{\mathbf{L}_{\frac{3}{2}}(t)}{\sqrt{t}} & \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[p^2 \log \frac{u}{p} - \frac{1}{2} \right] \\
t\sqrt{t}\mathbf{L}_{\frac{5}{2}}(t) & \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3p^2 - 1}{p^2 u^4}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{t} \mathbf{L}_{-\frac{1}{2}}(t) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \arg \coth p$$

$$\sqrt{t} \mathbf{L}_{-\frac{3}{2}}(t) \supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{p^2}{u} - p \arg \coth p \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{L}_\nu(t)}{\sqrt{t}} &\supset \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \int_p^q \frac{dx}{(p+x)^{\nu+\frac{1}{2}} (x'-u^2)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{p'-\sin^2 \theta} (p + \sqrt{p^2 - \sin^2 \theta})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad \mathbf{R}(\nu) > -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} t [\mathbf{I}_0(at) \mathbf{L}_1(at) - \mathbf{I}_1(at) \mathbf{L}_0(at)] \supset -\frac{a^3}{s^3}$$

$$\frac{\pi}{2} t [\mathbf{I}_\nu(t) \mathbf{L}'_\nu(t) - \mathbf{I}'_\nu(t) \mathbf{L}_\nu(t)] \supset \frac{1}{u^{\nu+1}} \quad \mathbf{R}(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt[2]{t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{L}_\nu(t \sin \theta) \sin^{1-\nu} \theta d\theta \supset \frac{p [p + \sqrt{p'-1}]^{\frac{1}{2}-\nu}}{\sqrt{p'-1}} - (2p)^{\frac{1}{2}-\nu}$$

17. — Fonctions de Bessel du troisième ordre.

$$\begin{aligned}
t^{-\frac{m+n}{3}} J_{m,n}(3t^{\frac{1}{3}}) &\supset (-1)^n p^{\frac{m+n}{2}} J_{n-m}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \\
t^{\frac{2m-n}{3}} J_{m,n}(3t^{\frac{1}{3}}) &\supset p^{\frac{n}{2}-m} J_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \\
t^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,n}(3t^{\frac{1}{3}}) &\supset p^{\frac{m}{2}-n} J_m\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \\
-\frac{m+n}{3} t^{-1-\frac{m+n}{3}} J_{m,n}(3t^{\frac{1}{3}}) \\
&+ t^{-\frac{m+n+2}{3}} J'_{m,n}(3t^{\frac{1}{3}}) \supset (-1)^n p^{\frac{m+n+2}{2}} J_{n-m}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \\
(t-a)^{\frac{2m-n}{3}} J_{m,n}[3(t-a)^{\frac{1}{3}}] &\supset e^{-ap} p^{\frac{n}{2}-m} J_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \quad (t > a) \\
t^{\frac{1}{6}} J_{0,-\frac{1}{2}}(3t^{\frac{1}{3}}) &\supset p^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \\
\frac{3\mu+\nu}{\Gamma(\mu+\nu+\alpha+1)} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1) t^\alpha J_{\mu,\nu}(t) &\supset p^{-(\mu+\nu+\alpha)} {}_3F_2\left[\frac{\mu+\nu+\alpha+1}{3}, \frac{\mu+\nu+\alpha+2}{3}, \frac{\mu+\nu+\alpha+3}{3}; \mu+1, \nu+1; -\frac{1}{p^3}\right] \\
&\hspace{15em} \mathbf{R}(\mu+\nu+\alpha) > -1 \\
\frac{2\sqrt{\pi t}}{3} J_{\frac{1}{6},-\frac{1}{6}}(t) &\supset \frac{p}{\sqrt{p^3+1}} \\
\frac{2\sqrt{\pi t}}{3} J_{-\frac{1}{6},-\frac{5}{6}}(t) &\supset \frac{p^0}{\sqrt{p^3+1}} \\
\frac{2\sqrt{\pi t}}{3} J_{-\frac{5}{6},-\frac{7}{6}}(t) &\supset \frac{p^1}{\sqrt{p^3+1}} \quad \star \\
\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{t}{3}\right)^{\frac{1}{3}} J_{0,-\frac{1}{3}}(t) &\supset \left(\frac{p}{p^3+1}\right)^{\frac{1}{3}} \\
\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{t}} J_{\frac{1}{6},-\frac{1}{6}}\left(\frac{-t}{\sqrt{4}}\right) &\supset p \int_p^\infty \frac{dp}{\sqrt{4p^3-1}} \\
\frac{1}{3\sqrt{4}} \sqrt{\frac{\pi}{t}} J_{-\frac{1}{6},-\frac{5}{6}}\left(\frac{-t}{\sqrt{4}}\right) &\supset -p \int_p^\infty \frac{p dp}{\sqrt{4p^3-1}} \quad \star \\
J_{2n,n}(3t^{\frac{2}{3}}) &\supset \frac{1}{\Gamma(n+1)p^{2n+1}} {}_1F_1\left(n+\frac{1}{2}; 2n+1; -\frac{4}{p^2}\right) \\
&= e^{-\frac{2}{p^2}} I_n\left(\frac{2}{p^2}\right)
\end{aligned}$$

18. — Fonctions hypergéométriques confluentes M.

$$\begin{aligned}
 M_{\mu, \nu}(t) & \supset \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\nu + \frac{1}{2}}} p \quad {}_2F_1\left(\nu + \frac{3}{2}, -\mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad R(\nu) > -\frac{3}{2} \\
 & = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\mu + \nu + \frac{1}{2}}} p \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\mu-1} {}_2F_1\left(\nu - \frac{1}{2}, \mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\right) \\
 & = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\nu + \frac{1}{2}}} p \quad {}_2F_1\left(\nu + \frac{3}{2}, \mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{\frac{1}{2} - p}\right) \\
 & = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\mu+1}} p \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\mu-\nu-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\nu - \frac{1}{2}, -\mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{\frac{1}{2} - p}\right) \\
 t^\alpha M_{\mu, \nu}(t) & \supset \frac{\Gamma\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\alpha + \nu + \frac{1}{2}}} p \quad {}_2F_1\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}, -\mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\right) \\
 & = \frac{\Gamma\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\mu + \nu + \frac{1}{2}}} p \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\mu-\alpha-1} {}_2F_1\left(\nu - \alpha - \frac{1}{2}, \mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{p + \frac{1}{2}}\right) \\
 & = \frac{\Gamma\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p - \frac{1}{2}\right)^{\alpha + \nu + \frac{1}{2}}} p \quad {}_2F_1\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}, \mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{\frac{1}{2} - p}\right) \\
 & = \frac{\Gamma\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}\right)}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^{\mu + \alpha + 1}} p \left(p - \frac{1}{2}\right)^{\mu-\nu+\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\nu - \alpha - \frac{1}{2}, -\mu + \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; \frac{1}{\frac{1}{2} - p}\right) \\
 & \qquad \qquad \qquad R(\alpha + \nu) > -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$t^{\alpha} M_{-\mu, \nu}(-t) \supset (-1)^{\alpha+2\nu+2} \Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right) p\left(\frac{1}{2}-p\right)^{-\alpha-\nu-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}, \mu+\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1; \frac{1}{\frac{1}{2}-p}\right)$$

$$t^{\alpha} M_{-\mu, -\nu}(-t) \supset (-1)^{\alpha-2\nu+2} \Gamma\left(\alpha-\nu+\frac{3}{2}\right) p\left(\frac{1}{2}-p\right)^{-\alpha+\nu-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\alpha-\nu+\frac{3}{2}, \mu-\nu+\frac{1}{2}; 1-2\nu; \frac{1}{\frac{1}{2}-p}\right)$$

$$t^{\alpha} e^{\frac{t}{p}} M_{\mu, \nu}(t) \supset \frac{\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right)}{p^{\alpha+\nu+\frac{1}{2}}} {}_2F_1\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}, -\mu+\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1; \frac{1}{p}\right) \quad R(\alpha+\nu) > -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} t^{\alpha} e^{-\frac{t}{p+1}} M_{\mu, \nu}(t) &\supset \frac{\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right)}{(p+1)^{\alpha+\nu+\frac{1}{2}}} p {}_2F_1\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}, -\mu+\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1; \frac{1}{p+1}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}\right)}{p^{\alpha+\nu+\frac{1}{2}}} {}_2F_1\left(\alpha+\nu+\frac{3}{2}, \mu+\nu+\frac{1}{2}; 2\nu+1; -\frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

$$t^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{p}} M_{n+\nu+\frac{1}{2}, \nu}(t) \supset \frac{\Gamma(2\nu+1)}{p^{2\nu}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^n \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$t^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{t}{p}} M_{\mu, -\frac{1}{4}}(t) \supset \frac{\sqrt{\pi} p^{\mu+\frac{1}{4}}}{(p+1)^{\mu+\frac{1}{4}}}$$

$$t^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{t}{p}} M_{\mu, \frac{1}{4}}(t) \supset \frac{\sqrt{\pi} p^{\mu+\frac{1}{4}}}{2(p+1)^{\mu+\frac{1}{4}}}$$

$$t^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{p}} M_{-\frac{1}{4}, \frac{n}{2}+\frac{1}{4}}(t) \supset \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} p Q_n(\sqrt{p})$$

$$\frac{t^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{p}+1}}{\Gamma(2\nu+1)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{M_{r+\nu+\frac{1}{2}, \nu}(t)}{r!} \supset \frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^{2\nu}} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{t^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\frac{t}{p}+1}}{\Gamma(2\nu+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{M_{r+\nu+\frac{1}{2}, \nu}(t)}{r!} \supset \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{2\nu}} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

19. — Fonction hypergéométrique confluyente de Whittaker.

$$\begin{aligned}
 t^\alpha \frac{W_{\mu, \nu}(t)}{W_{0, \nu + \frac{1}{2}}(2t)} & \supset \frac{\Gamma\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \nu + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - \mu + \nu)} p {}_2F_1\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}, \alpha - \nu + \frac{3}{2}; \alpha - \mu + 2; \frac{1}{2}p\right) \star \\
 & \supset -\frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} p P_\nu(p) \star \\
 \frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{t}}}}{\sqrt{t}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(t) & \supset \log(p+1) \\
 t^{\nu - \frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} W_{m + \nu + \frac{1}{2}, \nu}(t) & \supset \Gamma(2\nu + m + 1) (1-p)^m p^{-2\nu - m} \quad R(\nu) > -\frac{1}{2} \\
 t^{-\nu - \frac{1}{2}} e^{\frac{t}{2}} W_{\mu, \nu}(t) & \supset \Gamma\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right) p^{\nu - \mu + \frac{1}{2}} (1-p)^{\mu + \nu - \frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mu - \nu + \frac{1}{2} \\ \text{n'est pas un entier négatif} \end{array} \right. \\
 \left(\frac{t}{a}\right)^{-\nu - \frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} W_{\mu, \nu}\left(\frac{t}{a}\right) & \supset (-1)^{\mu + \nu - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right) (pa+1)^{\nu - \mu - 1} (pa)^{\mu + \nu + \frac{1}{2}} \\
 & = (-1)^{\mu + \nu + \frac{1}{2}} \Gamma\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right) (pa)^{\mu + \nu - \frac{1}{2}} [a(p+1)]^{\nu - \mu - \frac{1}{2}} \\
 t^\alpha e^{-\frac{t}{2}} W_{\mu, \nu}(t) & \supset (-1)^{\mu - \alpha - 1} \frac{\Gamma\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu - \alpha)} p^{\mu - \alpha} {}_2F_1\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}, \mu - \nu + \frac{1}{2}; \mu - \alpha; -p\right) \star \\
 & = (-1)^{\mu - \alpha - 1} \Gamma\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right) p^{\mu - \alpha} (p+1)^{-\mu - \nu + \frac{1}{2}} \\
 & \quad \times {}_2F_1\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}, \nu - \alpha - \frac{1}{2}; \mu - \alpha; \frac{p}{p+1}\right) \\
 & = \frac{\Gamma\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - \nu + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha - \mu + \nu)} p {}_2F_1\left(\alpha + \nu + \frac{3}{2}, \alpha - \nu + \frac{3}{2}; \alpha - \mu + 2; -p\right) \star \\
 t^{-\frac{m}{2}} e^t W_{n - \frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}}(2t) & \supset 2^{1 - \frac{m}{2}} \Gamma(1 + n - m) (2-p)^{n-1} p^{m-n} \\
 t^\alpha e^{\frac{t}{2}} W_{\mu, \nu}(t) & \supset \frac{\Gamma\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu - \nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu - \alpha)} p^{\frac{1}{2} - \mu - \nu} (1-p)^{\mu - \alpha - 1} {}_2F_1\left(\mu + \nu + \frac{1}{2}, \nu - \alpha - \frac{1}{2}; \mu - \alpha; 1 - \frac{1}{p}\right) \\
 & \quad \text{si } \mu - \alpha > 0 \\
 t^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{\frac{t}{2}} W_{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} + \mu, \frac{\nu}{2}}(t) & \supset \Gamma(\mu + 1) (1-p)^{\nu - \mu} p^{-\nu - \mu} {}_2F_1\left(\mu + \nu + 1, \mu, \mu + \nu + 1; 1 - \frac{1}{p}\right) \\
 & = \Gamma(\mu + 1) (-1)^{\mu + \nu} p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\mu + \nu} \\
 \frac{\alpha^\nu \mu}{t^\mu} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} W_{\mu, \nu}\left(\frac{\alpha^2}{4t}\right) & \supset \frac{\alpha^{\nu \mu + 1}}{p^{\frac{\nu \mu - 1}{2}}} K_{\nu, \nu}(\alpha \sqrt{p})
 \end{aligned}$$



20. — Fonctions de Weber.

★

$$\begin{aligned}
D_{2n+1}(2\sqrt{t}) & \supset (-1)^n \sqrt{\pi} \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \frac{p(p-1)^n}{(p+1)^{n+\frac{3}{2}}} \\
\frac{D_{2n}(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \supset \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{p(1-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}} \\
e^{\frac{t}{2}} D_{2n+1}(\sqrt{2t}) & \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+1)!}{2^n n! \sqrt{p}} \left(\frac{1}{p}-1\right)^n \quad (n \geq 0) \\
(2t)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{a^2}{8t}} D_{\nu-1}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right) & \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} p^{\frac{\nu}{2}} e^{-a\sqrt{p}} \\
(2t)^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} D_{-\nu}(\sqrt{2t}) & \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{p+1}-1)^\nu}{p^{\nu-1} \sqrt{p+1}} \\
(2t)^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} D_{-\nu-2}(\sqrt{2t}) & \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{p+1}-1)^{\nu+1}}{(\nu+1)p^\nu} \quad R(\nu) > -1 \\
(2t)^{\frac{\mu+\nu}{2}} e^{-\frac{t}{2}} D_{-(\mu+\nu+1)}(\sqrt{2t}) & \supset \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{p+1}-1)^{\mu+\nu+1}}{p^{\mu+\nu} \sqrt{p+1}} \\
D_{-(n+1)}^2(i\sqrt{2t}) - D_{-(n+1)}^2(-i\sqrt{2t}) & \supset \frac{2\pi}{i n!} \sqrt{p} \frac{(p-1)^n}{(p+1)^{n+1}} \\
\frac{D_n(2\sqrt{at}) D_n(2\sqrt{bt})}{\sqrt{t}} & \supset \frac{n! \sqrt{\pi p}}{\sqrt{p+a+b}} \left(\frac{a+b-p}{a+b+p}\right)^{\frac{n}{2}} P_n \left[2\sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2 - p^2}} \right] \\
e^{\frac{a+b}{2}t} \frac{D_{2n}(\sqrt{2at}) D_{2m}(\sqrt{2bt})}{\sqrt{t}} & \supset \frac{(-1)^{m+n} \sqrt{\pi} (2n+2m)! (p-a)^n (p-b)^m}{2^{n+m} (n+m)! p^{n+m-\frac{1}{2}}} \\
& \quad \times {}_2F_1 \left[-n, -m; -n-m+\frac{1}{2}; \frac{p(p-a-b)}{(p-a)(p-b)} \right] \\
e^{\frac{a+b}{2}t} \frac{D_{2n+1}(\sqrt{2at}) D_{2m+1}(\sqrt{2bt})}{\sqrt{abt}} & \supset \frac{(-1)^{m+n} \sqrt{\pi} (2n+2m+2)! (p-a)^n (p-b)^m}{2^{n+m+1} (n+m+1)! p^{n+m+\frac{1}{2}}} \\
& \quad \times {}_2F_1 \left[-n, -m; -n-m-\frac{1}{2}; \frac{p(p-a-b)}{(p-a)(p-b)} \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{D_n(2\sqrt{t}\cos\alpha)D_n(2\sqrt{t}\sin\alpha)}{2^n n! \sqrt{\pi t}} \supset \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s (2n-2s)!}{s!(n-s)!(n-2s)!} \frac{p}{\sqrt{p+1}} \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{(\sin 2\alpha)^{n-2s}}{(1-p^2)^{\frac{n}{2}-s}} \\ \left(m = \frac{n}{2} \text{ ou } \frac{n-1}{2}\right)$$

$$e^{\frac{t}{2}} \frac{D_n^2(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \sum_{s=0}^n \frac{n!(2s)!(2n-2s)!}{s!s!(n-s)!} \sum_{r=0}^{n-s} \frac{(-1)^r}{r!(n-s-r)!} p^{-n+s+r+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} D_{2n}(\sqrt{2t}) \supset e^{\frac{1}{p}-1} \sqrt{\pi p}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} D_{2n+1}(2\sqrt{t}) \supset \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} \frac{D_{2n}(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \supset \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{p+1}$$

$$e^{-\frac{p}{4}} \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{n!}{s![(n-s)!]^2} t^{n-s} D_{n-s}(t) \supset p^{n+1} e^{\frac{p^2}{4}} D_{-n-1}(p)$$

$$\int_0^t \frac{D_n(\sqrt{2x}) D_n(i\sqrt{2x}) D_m[\sqrt{2(t-x)}] D_m[i\sqrt{2(t-x)}]}{\sqrt{x(t-x)}} dx \supset (-1)^{\frac{m+n}{2}} \pi m! n! P_m\left(\frac{1}{p}\right) P_n\left(\frac{1}{p}\right)$$

21. — Séries hypergéométriques.

$${}_rF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; t) \supset {}_{r+1}F_s\left(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 1; \gamma_1, \dots, \gamma_s; \frac{1}{p}\right)$$

$${}_rF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}, 1; t) \supset {}_rF_{s-1}\left(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_{s-1}; \frac{1}{p}\right)$$

$$J_0(2i\sqrt{t}) = {}_0F_1(1; t) \supset {}_0F_0\left(\frac{1}{p}\right) = e^{\frac{1}{p}}$$

$${}_0F_1(n+1; t) \supset {}_1F_1\left(1; n+1; \frac{1}{p}\right) \quad (n \geq 1) \quad *$$

$${}_1F_1(\alpha; 1; t) \supset {}_1F_0\left(\alpha; \frac{1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-\alpha}$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; 1; t) \supset {}_2F_0\left(\alpha, \beta; \frac{1}{p}\right)$$

$${}_rF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; t^2) \supset {}_{r+2}F_s\left(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 1, \frac{1}{2}; \gamma_1, \dots, \gamma_s; \frac{4}{n^2}\right)$$

$$J_0(2it) = {}_0F_1(1; t^2) \supset {}_1F_0\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{p^2}\right) = \frac{p}{\sqrt{p^2-4}}$$

$$t^\nu {}_rF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; t^n) \supset p^{-\nu} \Gamma(\nu+1) {}_{r+n}F_s\left(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \frac{\nu+1}{n}, \dots, \frac{\nu+n}{n}; \gamma_1, \dots, \gamma_s; \frac{n^n}{p^n}\right)$$

$${}_0F_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}; 1; \frac{t^n}{n^n}\right) \supset e^{p^{-n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} {}_2F_2\left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1+1}{2}, \dots, \frac{\alpha_r}{2}, \frac{\alpha_r+1}{2}; \frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}, \dots; -\frac{a^2 2^{r-s-1}}{t}\right)$$

$$\supset \sqrt{p} {}_rF_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; -a\sqrt{p})$$

22. — Polynomes de type hypergéométrique

(HERMITE, LEGENDRE, ABEL, LAGUERRE, etc.).

$$H e_n(t) \supset \frac{n!}{p^n} \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!} \left(\frac{p^2}{2}\right)^s$$

$$H e_{2n+1}(\sqrt{t}) \supset \frac{(2n+1)!}{2^{n+1} n!} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{1}{2p} - 1\right)^n$$

$$\frac{1}{2^n \sqrt{\pi} t^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4t}} H e_n\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) \supset p^{\frac{n+1}{2}} e^{-a\sqrt{p}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H e_{2n+1}(\sqrt{t})}{(2n+1)!} \supset \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{1-\frac{1}{p}}$$

$$P_0(\theta) \supset 1$$

$$P_1(\theta) \supset \frac{p^2}{p^2+1}$$

$$P_2(\theta) \supset \frac{p^2+1}{p^2+2^2}$$

$$P_3(\theta) \supset \frac{p^2(p^2+2^2)}{(p^2+1^2)(p^2+3^2)}$$

 $(\theta = \cos t)$

$$P_n(1-t) \supset p^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dp}\right)^n \frac{1}{p^{n+1}}$$

$$\Phi_m(t) \supset \left(\frac{p-1}{p}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^m$$

$$\Phi'_m(t) \supset p \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{m-1}\right]$$

$$t \Phi'_m(t) \supset -\frac{m}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{m-1}$$

$$\frac{d}{dm} \Phi_m(t) \supset \left(1 - \frac{1}{p}\right)^m \log \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{2}} t^m T_m^n(t) \supset \frac{p \left(\frac{1}{2} - p\right)^n}{n! \left(\frac{1}{2} + p\right)^{m+n+1}}$$

$$t^m T_m^n(t) \supset \frac{(1-p)^n}{n! p^{m+n}}$$

$$L_n(t) \supset \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$$

$$t^n L_n(t) \supset \frac{n!}{p^n} P_n\left(1 - \frac{2}{p}\right)$$

$$e^{-t} L_n(t) \supset \frac{p^{n+1}}{(p+1)^{n+1}}$$

$$e^{-\frac{t}{2}} L_n(t) \supset \frac{2p}{2p+1} \left(\frac{2p-1}{2p+1}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = e J_0(2\sqrt{t}) \supset e^{1-\frac{1}{p}}$$

$$e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_{2n}(2t) \supset \frac{p^2+p}{2(p^2+1)}$$

$$t^\alpha L_n^\alpha(t) \supset \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \frac{(p-1)^n}{p^{n+\alpha}} \quad R(\alpha) > -1$$

$$t^\beta L_n^\alpha(t) \supset \sum_{s=0}^n \frac{\Gamma(\alpha-\beta+s) \Gamma(\beta+1+n-s)}{\Gamma(\alpha-\beta) s! (n-s)!} \frac{(p-1)^{n-s}}{p^{n-s+\beta}} \quad R(\beta) > -1$$

$$t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(t)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \supset \frac{e^{1-\frac{1}{p}}}{p^\alpha} \quad R(\alpha) > -1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! t^\alpha L_n^\alpha(t)}{\Gamma(\alpha+n+1)} \supset \frac{1}{2p^{\alpha-1} \left(p - \frac{1}{2}\right)} \quad R(\alpha) > -1$$

$$t^\alpha L_n^\alpha(at) L_m^\alpha(bt) \supset \frac{\Gamma(n+m+\alpha+1)}{n! m!} \frac{(p-a)^n (p-b)^m}{p^{n+m+\alpha}} {}_2F_1\left[-m, -n; -n-m-\alpha; \frac{p(p-a-b)}{(p-a)(p-b)}\right] \quad R(\alpha) > -1$$

$$e^{-t} t^\alpha L_n^\alpha(t) \supset \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} p^{n+1} (p+1)^{-n-\alpha-1} \quad R(\alpha) > -1$$

$$e^{-t} t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)! L_{2n}(2t)}{\Gamma(2n+\alpha+1)} \supset \frac{p}{2(p+1)^{\alpha-1} (p^2+1)} \quad R(\alpha) > -1$$

$$e^{-t} t^\alpha L_n^\alpha(t) L_m^\alpha(t) \supset \frac{\Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(m+\alpha+1) p^{n+m+1}}{n! m! \Gamma(\alpha+1) (p+1)^{n+m+\alpha+1}} {}_2F_1\left(-m, -n; \alpha+1; \frac{1}{p^2}\right) \quad R(\alpha) > -1$$

$$L_n(at) L_n(bt) \supset \frac{(p-a-b)^n}{p^n} P_n\left[\frac{p^2-(a+b)p+2ab}{p(p-a-b)}\right]$$

$$e^{-t} t^{2\alpha} [L_n^\alpha(t)]^2 \supset \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{2^{2n} n!} \sum_{s=0}^n \frac{\Gamma(2s+2\alpha+1) (2n-2s)!}{s! \Gamma(s+\alpha+1) [(n-s)!]^2} \frac{p(p-1)^{2s}}{(p+1)^{2s+2\alpha+1}} \quad R(\alpha) > -\frac{1}{2}$$

$$e^{-\frac{t(a+b)}{2}} t^{\alpha} L_n^{\alpha}(at) L_n^{\alpha}(bt) \supset \frac{2^{2\alpha} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha+1)}{n! \sqrt{\pi}} p \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c_1^{n-s}}{a_1^{\alpha-n+\nu+1} \Gamma(\alpha-s+1) r!} C_{n-s}^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{b_1^2}{a_1 c_1}\right)$$

$$a_1^{\circ} = p^2 + p(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$b_1^{\circ} = p^2 - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$c_1^{\circ} = p^2 - p(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$t^{2\alpha} L_n^{\alpha}(at) L_n^{\alpha}(bt) \supset \frac{2^{2\alpha} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma(\alpha+1)}{n! \sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c_2^{n-s}}{s! \Gamma(\alpha-r+1) p^{2\alpha-n+s+1}} C_{n-s}^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\frac{b_2^2}{p c_2}\right)$$

$$b_2^{\circ} = p^2 - (a+b)p + 2ab$$

$$c_2^{\circ} = [p - a - b]^2$$

$$(-i)^n T_n(it) \supset p O_n(p)$$

$$\frac{2(-i)^{n-1} U_n(it)}{\sqrt{1+t^2}} \supset p S_n(p)$$

$$\frac{1}{t^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}} H_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) J_{\nu}(2\sqrt{bx}) x^{\frac{\nu}{2}} dx \supset 2^n \sqrt{\pi} b^{\frac{\nu}{2}} p^{\frac{n-\nu}{2}} e^{-\frac{b}{4p}}$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{bx}{4t}} H_n\left(\frac{b}{2\sqrt{x}}\right) J_{\nu}(2\sqrt{tx}) x^{-\frac{n+\nu+1}{2}} dx \supset 2^n \sqrt{\pi} p^{-\frac{n}{2}-\nu+1} e^{-\frac{b}{4p}}$$

$$t^{\frac{\nu}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} J_{\nu}(2\sqrt{tx}) L_n^{\alpha}(x) x^{\alpha-\frac{\nu}{2}} dx \supset \frac{\Gamma(n+\alpha+1) p^{1-\nu+\alpha} [1 + (\beta-1)p]^n}{n! [1 + \beta p]^{n+\alpha-1}}$$

$$R(\nu) > -1$$

23. — Fonctions discontinues.

$$|\sin t| \supset \frac{p}{p^2+1} \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}} \quad (0 < t < \infty)$$

$$\sin \omega t \supset \frac{\omega p}{p^2+\omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}}\right) \quad \left(0 < t < \frac{2\pi n}{\omega}\right)$$

$$\cos \omega t \supset \frac{p^2}{p^2+\omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}}\right) \quad \left(0 < t < \frac{2\pi n}{\omega}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\omega t + \alpha) &\supset \frac{p}{p^2+\omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}}\right) (\omega \cos \alpha + p \sin \alpha) \\ \cos(\omega t + \alpha) &\supset \frac{p}{p^2+\omega^2} \left(1 - e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}}\right) (p \cos \alpha - \omega \sin \alpha) \end{aligned} \right\} \quad \left(0 < t < \frac{2\pi n}{\omega}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin t &\quad (0 < t < \tau) \\ 0 &\quad (\tau < t < \infty) \end{aligned} \right\} \supset \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left[\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - e^{-p\tau} \cos(\tau + \arctan p) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} t \sin \omega t &\quad \left(0 < t < \frac{6\pi}{\omega}\right) \\ 0 &\quad \left(\frac{6\pi}{\omega} < t < \infty\right) \end{aligned} \right\} \supset \frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2} \left[2\omega \left(1 - e^{-\frac{6\pi p}{\omega}}\right) - \frac{6\pi(p^2+\omega^2)}{p} e^{-\frac{6\pi p}{\omega}} \right]$$

$$(n \text{ entier} > 0) \quad \left. \begin{aligned} t^n &\quad (0 < t < h) \\ 0 &\quad (h < t < \infty) \end{aligned} \right\} \supset \frac{n!}{p^n} - e^{-ph} \left[h^n + \frac{nh^{n-1}}{p} + \frac{n(n-1)h^{n-2}}{p^2} + \dots + \frac{n!}{p^n} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1 t}{h} &\quad (0 \leq t \leq h) \\ A_1 &\quad (h \leq t < \infty) \end{aligned} \right\} \supset \frac{A_1}{ph} (1 - e^{-ph})$$

$$\left. \begin{aligned} e^{-at} \sin \omega t &\quad \left(0 < t < \frac{2n\pi}{\omega}\right) \\ 0 &\quad \left(\frac{2n\pi}{\omega} < t < \infty\right) \end{aligned} \right\} \supset \frac{\omega p}{(p+a)^2+\omega^2} \left[1 - e^{-\frac{2n\pi}{\omega}(p+a)} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} [a^2 - (t-a)^2]^{\nu-\frac{1}{2}} &\quad (0 < t < 2a) \\ 0 &\quad (2a < t < \infty) \end{aligned} \right\} \supset \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (2a)^\nu p^{1-\nu} e^{-ap} I_\nu(ap) \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1 t}{h} &\quad (0 \leq t \leq h) \\ \frac{A_1(2h-t)}{h} &\quad (h \leq t \leq 2h) \\ 0 &\quad (2h \leq t < \infty) \end{aligned} \right\} \supset A_1 \frac{(1 - e^{-ph})^2}{ph}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} A_1 t^2 \quad (0 < t < h) \\ A_1 h^2 \quad (h < t < bh) \\ 0 \quad (bh < t < \infty) \\ (b > 1) \end{array} \right\} \supset A_1 \left[\frac{2}{p^2} - 2 e^{-ph} \frac{h}{p} \left(1 + \frac{h}{p} \right) - h^2 e^{-pbh} \right] \\
 & \left. \begin{array}{l} A_1 \sin \omega t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{\omega} \right) \\ 0 \quad \left(\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega} \right) \\ A_1 \sin \omega t \quad \left(\frac{2\pi}{\omega} < t < \frac{3\pi}{\omega} \right) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \supset \frac{A_1 \omega p}{(p' + \omega^2) \left(1 - e^{-p \frac{\pi}{\omega}} \right)} \\
 & \left. \begin{array}{l} \sin \omega t \quad \left(0 < t < \frac{2n\pi}{\omega} \right) \\ 0 \quad \left(\frac{2n\pi}{\omega} < t < \frac{4n\pi}{\omega} \right) \\ \sin \omega t \quad \left(\frac{4n\pi}{\omega} < t < \frac{6n\pi}{\omega} \right) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \supset \frac{\omega p}{(p' + \omega^2) \left(1 + e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}} \right)} \\
 & \left. \begin{array}{l} A_1 \quad (0 < t < h) \\ 0 \quad (h < t < 2h) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \supset \frac{A_1}{1 + e^{-ph}} \\
 & \left. \begin{array}{l} A_1 \quad (0 < t < h) \\ -A_1 \quad (h < t < 2h) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \supset \frac{A_1(1 - e^{-ph})}{(1 + e^{-ph})} = 2 A_1 \operatorname{th} \frac{ph}{2} \\
 & \left. \begin{array}{l} A_1 \quad (0 < t < h) \\ 2A_1 \quad (h < t < 2h) \\ \dots \dots \dots \\ nA_1 \quad [(n-1)h < t < nh] \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \supset \frac{A_1}{2} \left(1 + \coth \frac{ph}{2} \right) \\
 & \left. \begin{array}{l} t \sin \omega t \quad \left(0 < t < \frac{2n\pi}{\omega} \right) \\ 0 \quad \left(\frac{2n\pi}{\omega} < t < \frac{4n\pi}{\omega} \right) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \supset \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2} \left\{ \frac{2\omega}{1 + e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}}} - \frac{2n\pi(p' + \omega') e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}}}{p \left[1 - e^{-\frac{2n\pi p}{\omega}} \right]} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{array}{l} \frac{A_1 t}{2h} \quad (0 < t < 2h) \\ \text{valeur répétée} \\ \text{dans chaque intervalle de } 2h \end{array} \right\} \supset A_1 \left[\frac{1}{2ph} - \frac{e^{-2ph}}{1 - e^{-2ph}} \right] \\
& \left. \begin{array}{l} A_1(t-h)^3 \quad (0 < t < 2h) \\ \text{valeur répétée} \\ \text{dans chaque intervalle de } 2h \end{array} \right\} \supset A_1 \left[\frac{6}{p^3} - \frac{\left(\frac{6h}{p^2} - \frac{3h^2}{p} + h^3 \right)}{(1 - e^{-2ph})} \right] \\
& \left. \begin{array}{l} \sqrt{2at - t^2} \quad (0 < t < 2a) \\ \text{valeur répétée} \\ \text{dans chaque intervalle de } 2a \end{array} \right\} \supset \pi a \frac{I_1(ap)}{2 \operatorname{sh} ap} \\
& \left. \begin{array}{l} f(t) \quad (0 < t < h) \\ 0 \quad (h < t < \infty) \end{array} \right\} \supset \sum_{s=0}^{n-1} p^{-s} f^{(s)}(0) - e^{-ph} \sum_{s=0}^{n-1} p^{-s} f^{(s)}(h) + p^{-n+1} \int_0^h e^{-pt} f^{(n)}(t) dt \\
& \qquad \qquad \qquad = \varphi_{0,h}(p) = \varphi_{0,\infty}(p) - \varphi_{h,\infty}(p) = p \int_0^h e^{-pt} f(t) dt \\
& \left. \begin{array}{l} f(t) \quad (h < t < \infty) \\ 0 \quad (0 < t < h) \end{array} \right\} \supset e^{-ph} \sum_{s=0}^{n-1} p^{-s} f^{(s)}(h) + p^{-n+1} \int_h^\infty e^{-pt} f^{(n)}(t) dt \\
& \qquad \qquad \qquad = \varphi_{h,\infty}(p) = \varphi_{0,\infty}(p) - \varphi_{0,h}(p) = p \int_h^\infty e^{-pt} f(t) dt \\
& \left. \begin{array}{l} f(t) \quad (h_1 < t < h_2) \\ 0 \quad (0 < t < h_1) \\ 0 \quad (h_2 < t < \infty) \end{array} \right\} \supset \sum_{s=0}^{n-1} p^{-s} [e^{-ph_1} f^{(s)}(h_1) - e^{-ph_2} f^{(s)}(h_2)] + p^{-n+1} \int_{h_1}^{h_2} e^{-pt} f^{(n)}(t) dt \\
& \qquad \qquad \qquad = \varphi_{h_1,h_2}(p) = p \int_{h_1}^{h_2} e^{-pt} f(t) dt. \\
& \left. \begin{array}{l} A_1 \quad (0 < t < h) \\ \text{avec } \int_0^h f(t) dt = B_1 \end{array} \right\} \supset B_1 \left(p - \frac{p^2 h}{2!} + \frac{p^3 h^2}{3!} - \dots \right) \quad \star \\
& \text{et, si } h \rightarrow 0, \quad f(t) \supset B_1 p \quad \star
\end{aligned}$$

Si $\varphi_{0,h}(p) = p \int_0^h e^{-pt} f(t) dt$, et si la valeur est répétée dans chaque intervalle de h à l'infini, donc $\varphi_{0,\infty}(p) = \frac{\varphi_{0,h}(p)}{(1 - e^{-ph})}$. La série de Fourier, pour la fonction répétée, est fournie par l'intégrale $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} \frac{\varphi_{0,h}(z) dz}{z(1 - e^{-zh})}$, si elle est convergente.

D. — CALCUL SYMBOLIQUE A DEUX VARIABLES.

On définit la correspondance à deux variables

$$f(x, y) \supset \supset \varphi(p, q),$$

où x et y sont les variables indépendantes, p et q les variables paramétriques correspondantes, par l'intégrale ⁽¹⁾

$$\varphi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y) dx dy$$

Règles.

Si $f_1(x) \supset \varphi_1(p)$, $f_2(x) \supset \varphi_2(p)$,

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) \supset \supset \varphi(p, q) = \varphi_1(p)\varphi_2(q)$$

$$f(ax, by) \supset \supset \varphi\left(\frac{p}{a}, \frac{q}{b}\right)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \supset \supset p \varphi(p, q), \quad \text{si } f(0, y) = 0$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \supset \supset q \varphi(p, q), \quad \text{si } f(x, 0) = 0$$

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \supset \supset -p \frac{\partial \varphi(p, q)}{\partial p}$$

$$y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \supset \supset -q \frac{\partial \varphi(p, q)}{\partial q}$$

$$\int_0^\infty f(\lambda, y) d\lambda \supset \supset \frac{1}{p} \varphi(p, q)$$

$$\int_0^y f(x, \rho) d\rho \supset \supset \frac{1}{q} \varphi(p, q)$$

$$\int_0^x \int_0^y f(\lambda, \rho) d\lambda d\rho \supset \supset \frac{1}{pq} \varphi(p, q)$$

$$\int_x^\infty \frac{f(\lambda, y)}{\lambda} d\lambda \supset \supset \int_0^p \frac{\varphi(\theta, q)}{\theta} d\theta$$

$$\int_1^\infty \frac{f(x, \rho)}{\rho} d\rho \supset \supset \int_0^q \frac{\varphi(p, \sigma)}{\sigma} d\sigma$$

(1) Il est évident que q n'a plus ici la même signification que lorsqu'il s'agissait des fonctions de Bessel et de même pour y .

$$\int_x^\infty \int_1^\infty f(\lambda, \rho) \frac{d\lambda d\rho}{\lambda \rho} \supset \int_0^p \int_0^q \varphi(\theta, \sigma) \frac{d\theta d\sigma}{\theta \sigma}$$

$$e^{-a} e^{-b\lambda} f(x, y) \supset \frac{pq}{(p+a)(q+b)} f[p+a, q+b]$$

$$\frac{1}{\pi \sqrt{xy}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{4x} - \frac{\rho^2}{4y}} f(\theta, \rho) d\theta d\rho \supset \varphi(\sqrt{p}, \sqrt{q})$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty J_0(2\sqrt{\theta x}) J_0(2\sqrt{\rho y}) f(\theta, \rho) d\theta d\rho \supset pq \varphi\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$$

Si $f_1(x, y) \supset \varphi_1(p, q)$ et $f_2(x, y) \supset \varphi_2(p, q)$, on a

$$\int_0^r \int_0^1 f_1(x-\lambda, y-\rho) f_2(\lambda, \rho) d\lambda d\rho = \int_0^r \int_0^1 f_1(\lambda, \rho) f_2(x-\lambda, y-\rho) d\lambda d\rho \supset \frac{1}{pq} \varphi_1(p, q) \varphi_2(p, q)$$

Si $f(x) \supset \varphi(p)$, on a

$$f(x+y) \supset \frac{q\varphi(p) - p\varphi(q)}{q-p}$$

$$\frac{1}{\pi \sqrt{xy}} \int_0^\infty e^{-\frac{\theta^2}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} f(\theta) d\theta \supset \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \varphi(\sqrt{p} + \sqrt{q})$$

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{\theta x}) J_0(2\sqrt{\rho y}) f(\theta) d\theta \supset \frac{pq}{p+q} \varphi\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

Si $f(x) = \sum_{m=0}^\infty a_m x^m$, on a

$$f(xy) \supset \sum a_m \frac{m! m!}{(pq)^m}$$

Correspondances.

$$\frac{x^m y^n}{m! n!} \supset p^{-m} q^{-n} \quad (m, n \geq 0)$$

$$(x+y)^m \supset \frac{m!}{(pq)^m} \frac{q^{m+1} - p^{m+1}}{q-p}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}} \supset \frac{\sqrt{\pi pq}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}$$

$$\frac{\sqrt{xy}}{x+y} \supset \frac{\pi \sqrt{pq}}{2(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$$

$$e^{xy} \supset pq e^{-pq} \text{Ei}(pq)$$

$$e^{\frac{xy}{x+y}} \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \supset \frac{\pi}{2} (1+p+q+2\sqrt{pq})^{-\frac{3}{2}}$$

$$\log xy \supset \supset -2\gamma - \log pq$$

$$\log(x+y) \supset \supset \frac{p \log q - q \log p}{q-p} - \gamma$$

$$\sin(x+y) \supset \supset \frac{pq(p+q)}{(p'+1)(q'+1)}$$

$$\cos(x+y) \supset \supset \frac{pq(pq-1)}{(p'+1)(q'+1)}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{x+y} + e^{j^2 x + j^2 y} + e^{j^2 x + j^2 y}}{3} &\supset \supset pq \frac{p^2 q' + pq + 1}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)} \\ \frac{e^{x+y} + j e^{j^2 x + j^2 y} + j^2 e^{j^2 x + j^2 y}}{3} &\supset \supset pq \frac{p^2 q + q^2 + p}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)} \\ \frac{e^{x+y} + j' e^{j^2 x + j^2 y} + j e^{j^2 x + j^2 y}}{3} &\supset \supset pq \frac{q^2 p + p' + q}{(p^2 - 1)(q^2 - 1)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(cosinus d'Appell)} \\ (j^2 = 1) \end{array}$$

$$Ei(xy) \supset \supset -\gamma - \log p - \log q + e^{-pq} Ei(pq)$$

$$J_0(2\sqrt{x+y}) \supset \supset \frac{q e^{-\frac{1}{p}} - p e^{-\frac{1}{q}}}{q-p}$$

$$J_0(2i\sqrt{xy}) \supset \supset \frac{pq}{pq-1}$$

$$e^{x+y} J_0(2i\sqrt{xy}) \supset \supset \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1}$$

$$ber(2\sqrt{xy}) \supset \supset \frac{p^2 q^2}{p^2 q^2 + 1}$$

$$bei(2\sqrt{xy}) \supset \supset \frac{pq}{p^2 q^2 + 1}$$

$$J_{0,0}(-3\sqrt[3]{xy}) \supset \supset e^{\frac{1}{pq}}$$

$$2 J_{1,0}(2\sqrt{xy}) \supset \supset \log(pq+1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi xy}} J_0\left[\frac{i}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\right] \supset \supset \sqrt{pq} J_0\left[2i(pq)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$${}_r F_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; xy) \supset \supset {}_{r+2} F_s\left(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 1, 1; \gamma_1, \dots, \gamma_s; \frac{1}{pq}\right)$$

E. — RÉFÉRENCES.

Cette liste, très limitative, ne contient que les Mémoires d'où ont été tirées les diverses formules classées ci-dessus. On trouvera dans l'ouvrage (27) une bibliographie très étendue sur le calcul symbolique, contenant plus de 200 références.

1. CAMPBELL (G. A.) et FOSTER (R. M.). — Fourier integrals for practical applications (*Bell System Technical Journal, America, Monograph B.* 584, 1930).
2. COPSON (E. T.). — Operational calculus and evaluation of Kapteyn integrals (*Proc. London Math. Soc.*, t. 33, 1930, p. 145).
3. DHAR (S. C.). — Operational representation of confluent hypergeometric function (*Phil. Mag.*, t. 21, 1936, p. 1082).
4. — Operational representation of M- functions of confluent hypergeometric type (*Phil. Mag.*, t. 25, 1938, p. 416).
5. GOLDSTEIN (S.). — Operational representation of confluent hypergeometric and parabolic cylinder functions (*Proc. London Math. Soc.*, t. 34, 1931, p. 103).
6. HOWELL (W. T.). — Products of Laguerre polynomials (*Phil. Mag.*, t. 24, 1937, p. 396).
7. — Operational representation of products of parabolic cylinder functions and Laguerre polynomials (*Phil. Mag.*, t. 24, 1937, p. 1082).
8. — Functions self reciprocal in the Hankel transform (*Phil. Mag.*, t. 25, 1938, p. 622).
9. HUMBERT (P.). — Les fonctions hypergéométriques et le calcul symbolique (*Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, série A, t. 53, 1933, p. 103).
10. — *Le Calcul symbolique* (Hermann, Paris, 1934).
11. — Sur les intégrales de Fresnel (*Mathematica*, t. 10, 1934, p. 32).
12. — Nouvelles remarques sur les fonctions de Bessel du troisième ordre (*Acta Pont. Accad. Sc. Nuovi Lincei*, t. 87, 1934, p. 323).
13. — Sur le logarithme intégral (69^e Congrès des Sociétés Savantes, Paris, 1935).
14. — New operational representations (*Proc. Edin. Math. Soc.*, t. 4, 1935, p. 232).
15. — Le Calcul symbolique à deux variables (*Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, série A, t. 56, 1936, p. 26).
16. — Bessel functions products (*Phil. Mag.*, t. 24, 1937, p. 888).
17. — Formules nouvelles pour le calcul symbolique (*Bull. Soc. Math. France*, t. 65, 1937, p. 119).

18. HUMBERT (P.). — Une formule de calcul symbolique (72^e Congrès des Sociétés Savantes, Nice, 1938).
19. LOWRY (H. V.). — Operational calculus (*Phil. Mag.*, t. 13, 1932, p. 1033).
20. — Operational calculus (*Phil. Mag.*, t. 13, 1932, p. 1144).
21. MC LACHLAN et MEYERS. — Operational forms for Bessel and Struve functions (*Phil. Mag.*, t. 23, 1937, p. 918).
22. MC LACHLAN (N. W.). — Fourier expansions obtained operationally (*Phil. Mag.*, t. 24, 1937, p. 1055).
23. — Operational systems (*Phil. Mag.*, t. 25, 1938, p. 259).
24. — Operational forms and contour integrals for Bessel functions with argument $a\sqrt{t^2 - b^2}$ (*Phil. Mag.*, t. 26, 1938, p. 394).
25. — Operational forms and contour integrals for Struve and other functions (*Phil. Mag.*, t. 26, 1938, p. 457).
26. — Operational form of $f(t)$ for a finite interval, with application to impulses (*Phil. Mag.*, t. 26, 1938, p. 695).
27. — *Complex variable and operational calculus with technical applications*, Cambridge, 1939.
28. MITRA (S. C.). — Operational representations of $D_n(t)$ and $D_{-n-1}^*(it) - D_{-n-1}^2(-it)$ (*Proc. Edin. Math. Soc.*, t. 4, 1933, p. 33).
29. NIESSEN (K. F.). — Operational calculus (*Phil. Mag.*, t. 20, 1935, p. 977).
30. VAN DER POL (B.). — Operational solution of linear differential equations (*Phil. Mag.*, t. 8, 1929, p. 861).
31. VAN DER POL (B.) et NIESSEN (K. F.). — Operational calculus (*Phil. Mag.*, t. 13, 1932, p. 537).
32. VARMA (R. S.). — Operational representation of parabolic cylinder function (*Phil. Mag.*, t. 22, 1936, p. 29).
33. — Operational representation of parabolic cylinder function (*Phil. Mag.*, t. 23, 1937, p. 926).
34. — Sur les fonctions de Bessel du troisième ordre (*J. Ec. Polyt.*, 1939).



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
NOTE LIMINAIRE.....	1
ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS.....	3
DÉFINITIONS ET NOTATIONS UTILISÉS POUR LES FONCTIONS.....	4
A. — DÉFINITION ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX.....	9
B. — FORMULES OPÉRATOIRES.....	11
C. — LISTE D'IMAGES.....	14
1. Fonctions algébriques.....	14
2. Exponentielles et logarithmes.....	16
3. Fonctions circulaires.....	19
4. Fonctions hyperboliques.....	22
5. Logarithme intégral et fonctions analogues.....	26
6. Fonctions d'erreur intégrale.....	27
7. Fonctions de Bessel.....	28
8. Fonctions de Bessel de seconde espèce.....	32
9. Fonctions de Bessel de troisième espèce (F. de Hankel).....	33
10. Fonctions de Bessel d'argument imaginaire.....	35
11. Fonctions K de Bessel.....	39
12. Fonctions de Kelvin (<i>ber</i> et <i>bei</i>).....	40
13. Fonctions <i>ker</i> et <i>kei</i>	42
14. Fonctions de Bessel intégrales.....	43
15. Fonctions de Struve.....	44
16. Fonctions de Struve d'argument imaginaire.....	46
17. Fonctions de Bessel du troisième ordre.....	48
18. Fonctions hypergéométriques confluentes M.....	49
19. Fonction hypergéométrique confluyente de Whittaker.....	51
20. Fonctions de Weber.....	52
21. Séries hypergéométriques.....	54
22. Polynômes de type hypergéométrique (Hermite, Legendre, Abel, Laguerre, etc.).....	55
23. Fonctions discontinues.....	58
D. — CALCUL SYMBOLIQUE A DEUX VARIABLES.....	61
E. — RÉFÉRENCES.....	64