Mémorial des sciences mathématiques

C. Gattegno
A. Ostrowski

Représentation conforme à la frontière ; domaines particuliers

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 110 (1949)
<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1949__110__1_0>

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW,
MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHEMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR
Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur a la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CX

Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers

Par C. GATTEGNO
Maitre de Conferences a l'Université de Londres
et A. OSTROWSKI
Professeur à l'Université de Bâle

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1949

REPRÉSENTATION CONFORME A LA FRONTIÈRE
DOMAINES PARTICULIERS

PAR

C. GATTEGNO
Maître de Conférences à l'Université de Londres

ET

A. OSTROWSKI
Professeur à l'Université de Bâle.

ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES.

ac. : accessible.
C-U : cercle-unité.
E-F : élément-frontière.
F(D) : frontière du domaine D.
H_z : demi-plan $\Re z > 0$.
K-U : circonférence-unité.
point i. : point idéal.
point iac. : point idéal ac.
TC : transformation conforme
$z \to z_0$: z tend vers z_0.
$z \succ\!\!\to z_0$: z tend *angulairement* vers z_0.
$z \}\!\!\to z_0$: z tend *totalement* vers z_0.
$z \uparrow (\downarrow) z_0$: z tend monotonement en croissant (en décroissant) vers z_0.

CHAPITRE I (¹).

ÉTUDE MÉTRIQUE DE LA FRONTIÈRE.

1. Mesure d'accessibilité pour un arc de Jordan (*Unbewalltheitsfunktion*). — Soit P_0 un point-frontière de D situé sur un arc de Jordan L qui est un arc frontière ac. du même côté que P_0. Soit $K(\varepsilon)$ le cercle de centre P_0 et de rayon ε et soient $P_\varepsilon, P'_\varepsilon$ les points de L qui sont les *derniers* où $K(\varepsilon)$ coupe L, lorsqu'on se déplace, à partir de P_0 sur L, dans les deux sens. Considérons alors la partie de L qui va de P_ε à P'_ε et passe par P_0 et soit $\Delta_e(\varepsilon)$ la distance la plus grande de P_0 aux pointsde cette partie; $\Delta_e(\varepsilon)$ est appelée la *mesure extérieure d'accessibilité de* L *en* P_0.

On peut aussi utiliser avec profit une autre fonction qui est essentiellement la fonction inverse de $\Delta_e(\varepsilon)$. Considérons les deux points Q_ε et Q'_ε qui sont lês *premiers* de L rencontrés par $K(\varepsilon)$, lorsqu'on se déplace à partir de P_0 sur L dans les deux sens. Supprimons de L la partie qui va de Q_ε à Q'_ε en passant par P_0 et soit $\Delta_i(\varepsilon)$ la distance la plus courte à P_0 des points restants de L; $\Delta_i(\varepsilon)$ est appelée *mesure intérieure d'accessibilité de* L *en* P_0. On a évidemment $\Delta_i(\varepsilon) \leqq \varepsilon$ et le théorème de Schœnflies d'après lequel le point P_0 est accessible s'exprime par

$$\Delta_i(\varepsilon) \to 0, \qquad \Delta_e(\varepsilon) \to 0 \qquad \text{avec} \quad \varepsilon \to 0.$$

Si $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} \dfrac{\Delta_e(\varepsilon)}{\varepsilon}$ est bornée, on dit que L est en P_0 *linéairement accessible* (*linear unbewallt*), si $\dfrac{\Delta_e(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ lorsque $\varepsilon \to 0$, L est dit en P_0 *régulièrement accessible* (*regulàr unbewallt*).

Paramétrons L par t. Ce paramètre est dit *métrique* en P_0 si le rapport de la distance d'un point P de L à P_0, à la différence des valeurs du paramètre en ces deux points reste, en valeur absolue, compris entre deux constantes positives. *La condition nécessaire et*

(¹) Pour éviter des redites nous aurons, quelquefois, à renvoyer au cours de notre exposé à un fascicule du Mémorial paru sous le titre : *Représentation conforme à la frontière. Domaines généraux.* Le renvoi sera suivi des deux lettres F. G.; par exemple n° 23 F. G., renvoie au n° 23 du fascicule CIX.

suffisante pour que L *ait en* P_0 *un paramètre métrique est que* L *soit en* P_0 *linéairement accessible* (Warschawski [2]).

D'autre part, l'accessibilité régulière en P_0 est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un paramètre tel que le rapport ci-dessus défini tende vers une limite positive, lorsque P tend vers P_0 (Warschawski [2]).

2. Le cas général de l'accessibilité angulaire. — Soit P_0 un point iac. de F(D). A P_0 est associé l'intervalle maximum ouvert des directions des entailles rectilignes de D aboutissant en P_0. Nous l'appellerons *intervalle des directions de* P_0. Une entaille de D aboutissant en P_0, est dite *orientée en* P_0 si elle y possède une demi-tangente bien déterminée. S'il existe en P_0 deux entailles de D orientées en P_0 et de directions distinctes, P_0 est dit *accessible angulairement* (ou accessible *en angle*).

L'analyse de cette notion est bien plus commode si l'on suppose que le point iac. P_0 est rejeté à l'infini et est accessible suivant l'axe réel positif, situé à l'intérieur de D, cas auquel on peut toujours se ramener à l'aide de transformations linéaires convenables.

Nous désignerons par π_0 un des points frontières iac. angulairement à l'infini.

Soit A : $\zeta > a_0$ une demi-droite de l'axe réel positif située à l'intérieur de D et telle que ou bien $a_0 = 0$ ou bien a_0 est un point frontière de D. Pour tout $\rho > 0$ désignons par β_ρ le plus grand arc de la circonférence $|\zeta| = \rho$ contenu dans D et contenant $\zeta = \rho$. Le *noyau* D^* de D est alors défini de la manière suivante (Ostrowski [7], [8]) : D^* est l'ensemble de tous les arcs β_ρ; cependant si cet ensemble possède l'origine comme point isolé on lui ajoute ce point. Le noyau ainsi formé est un domaine simplement connexe, dont la frontière consiste en partie de points de F(D) et en partie d'un ensemble, fini ou dénombrable, d'arcs (ouverts) de cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ ayant l'origine pour centre. Chacun de ces arcs γ_i est une transversale de D le long de laquelle D^* est contigu à un domaine F_i partie de D. F_i est simplement connexe. Nous appellerons ces domaines F_i les *replis* (Falten) de D ([2]).

([2]) Dans sa Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Ostrowski [7] utilise la traduction *pli du domaine* pour Falte.

Associons au point ζ de D la quantité ρ_ζ que nous appellerons *rayon vecteur réduit* de ζ et qu'on définit de la manière suivante : $\rho_\zeta = |\zeta|$ si ζ est dans D^* ou est un point de $F(D)$ ac. suivant une de nos transversales β_ρ, tandis que lorsque ζ est à l'intérieur ou sur la frontière de F_ι, ρ_ζ est le rayon de la transversale circulaire γ_ι découpant F_ι dans D.

Pour caractériser *l'étendue* d'un repli on peut considérer les deux quotients $K_+(F) = \frac{\operatorname{Max}|\zeta|}{\rho}$ et $K_-(F) = \frac{\rho}{\operatorname{Min}|\zeta|}$ où l'on doit former les Max et Min pour les replis correspondants et où ρ désigne le rayon de la transversale circulaire γ qui découpe F dans D. Nous appellerons ces deux quotients respectivement *oscillation haute et basse* (Höhenschwankung, Tiefenschwankung) de F tandis que $K = \operatorname{Max}(K_+, K_-)$ sera dite *amplitude relative* de F.

Soit L une des parties de la frontière de D qui aboutit en π_0 et soit L_ρ la partie de L dont tous les points ont même rayon vecteur réduit $\rho_\zeta = \rho$. L_ρ est un ensemble fermé. Nous pouvons définir pour lui comme ci-dessus, les oscillations hautes et basses et l'amplitude relative. Faisons tendre ρ vers l'infini, et soit $\varkappa$ la plus grande des limites des amplitudes relatives de L_ρ. Si $\varkappa$ est bornée nous dirons que L est *linéairement accessible* en π_0 (linear unbewallt), et $\varkappa$ sera la *constante d'accessibilité* pour L en π_0.

Alors les quantités $\varkappa_+$ et $\varkappa_-$ égales respectivement à la plus grande des limites des oscillations hautes et basses de L_ρ sont aussi bornées et inversement. On a évidemment $\varkappa = \operatorname{Max}(\varkappa_+, \varkappa_-)$. Si $\varkappa = 1$ nous dirons que L est *régulièrement accessible* en π_0 (regular unbewallt). On obtiendrait évidemment des définitions toutes pareilles si ζ, au lieu de tendre vers π_0 sur l'axe réel, restait sur une ligne pour laquelle ρ croît constamment.

3. **Définition de la tangente et ses généralisations.** — Il suffit de définir la *tangente* au point-frontière idéal ac. π_0 situé à l'infini, pour la partie L de la frontière qui aboutit en π_0 d'un seul côté.

Il importe de remarquer que même dans le cas où π_0 fait partie d'un E-F de seconde espèce, il peut présenter du côté de L le caractère d'un E-F punctiforme. Alors il existe une transversale convenable aboutissant en π_0 qui découpe dans D un domaine contigu à L et pour lequel π_0 est un E-F de première espèce.

Si L est au voisinage de π_0 un arc de Jordan, une direction t : $\arg(\zeta - \zeta_0) = \varphi$ est dite *tangente* à L en π_0 si tout angle $|\arg\zeta - \varphi| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, contient tous les points de L suffisamment éloignés de l'origine.

Dans le cas le plus général, on peut définir la direction tangente comme valeur limite de $\arg(\zeta - \zeta_0)$ lorsque ζ tend vers π_0 en restant sur L, c'est-à-dire lorsque ζ parcourt les E-F de L en direction de π_0. En général le choix de ζ_0 n'a pas d'importance, bien qu'il existe des cas où $\arg(\zeta - \zeta_0)$ ne possède de limite que si ζ_0 est situé sur une demi-droite particulière (cas qui ne se présente pas si π_0 est un E-F punctiforme) (3).

Si $\lim\arg(\zeta - \zeta_0)$ n'existe pas, il y a lieu de considérer les quantités $\overline{\lim}\arg(\zeta - \zeta_0)$ et $\underline{\lim}\arg(\zeta - \zeta_0)$. Les valeurs correspondantes donnent des droites que nous appellerons les *supports-limite* (Grenzstütze) de L en π_0 (Gross [1], p. 276-277, Ostrowski [4], p. 94-95). L'ensemble des valeurs limites de $\arg(\zeta - \zeta_0)$ remplit un angle dit *angle d'oscillation des supports-limite*. Si L est au voisinage de π_0 un arc de Jordan, soient P_i, Q_i des couples de points de L tendant vers π_0; si les droites portant ces couples tendent vers une droite unique, nous dirons que cette droite est une *tangente*-L [à L en π_0, tangente d'un caractère particulièrement régulier (4)].

Si P_0 est un point-frontière à distance finie on peut mesurer le *degré de l'osculation* de F(D) à la tangente en P_0 à l'aide d'une fonction que l'on définit ainsi : soit α l'angle $|\arg(\zeta - P_0) - \varphi| \leqq \varepsilon$ où $\arg(\zeta - P_0) = \varphi$ est la direction tangente à une des branches L de F(D) aboutissant en P_0, il existe alors pour chaque $\varepsilon > 0$

---

(3) Une autre définition de la tangente de caractère plus métrique que topologique, utilisée implicitement par Wolff [6], [7], sert dans certains cas. Supposons que l'on ait un domaine jordanien ayant en π_0 un point de rebroussement et qui contienne tous les points de L assez rapprochés, au sens métrique, de π_0, la tangente de rebroussement sera dite tangente W à L en π_0. Il est essentiel de remarquer que dans cette définition il n'est tenu aucun compte de l'ordre circulaire des E-F. Une tangente-W n'est pas nécessairement une tangente d'après la définition du texte et une telle tangente peut ne pas être une tangente W. (*Cf.* Ostrowski [8].)

(4) Cette notion de tangente L implicitement considérée par Lindeloef [1] a été dégagée par Ostrowski [4]. On trouve dans Bouligand [1] sous le nom de *contingent* et *paratingent du premier ordre* des notions très proches parentes de celles que nous venons de définir. Une tangente L est un paratingent réduit à une droite unique.

un $r = r(\varepsilon)$ maximum pour lequel tout point de L situé à une distance $\leq r(\varepsilon)$ de P_0 est à l'intérieur de l'angle α. Cette fonction $r(\varepsilon)$ est appelée *fonction caractéristique de la tangente* (Richtungsfunktion) (Warschawski [2]).

4. L'oscillation de l'argument au voisinage d'un point-frontière. — π_0 est supposé toujours être un point frontière i. à l'infini et supposé ac. suivant l'axe réel positif.

Dans l'étude du comportement à la frontière de la représentation conforme, la fonction harmonique $\arg(\zeta - \zeta_0)$ joue un rôle fondamental. La plupart des raisonnements qui s'y rapportent s'appuient sur le fait que cette fonction reste bornée lorsqu'on tend angulairement vers π_0. Or ceci suppose un choix convenable de ζ_0.

Pour assurer l'uniformité à $\arg(\zeta - \zeta_0)$, le plus simple serait de prendre pour ζ_0 un point extérieur. Mais, outre qu'il n'existe pas toujours des points extérieurs, il peut se faire, s'il en existe, que pour eux $\arg(\zeta - \zeta_0)$ ne reste pas fini lorsque ζ tend vers π_0 en restant à l'intérieur de D; le même fait peut encore se produire si ζ_0 est un point-frontière non-ac.

Si ζ_0 est un point-frontière ac. on a le théorème suivant : *Soit* Λ *une ligne de Jordan allant de* ζ_0 *à* π_0 *en restant dans* D. *Supposons que* $\arg(\zeta - \zeta_0)$ *puisse être défini sur* Λ *d'une manière continue et reste dans l'intervalle* $< \alpha, \beta >$. *Alors* $\arg(\zeta - \zeta_0)$ *est défini à l'intérieur de* D *d'une manière continue à partir des valeurs sur* Λ *et reste dans l'intervalle* $(\alpha - 2\pi, \beta + 2\pi)$ *dont les bornes sont exactes* (Ostrowski [8], p. 381-384).

Une conséquence de ce théorème est qu'on peut prendre pour ζ_0 un point quelconque intérieur à D pourvu que dans l'étude de la fonction $\arg(\zeta - \zeta_0)$ au voisinage de ζ_0, on isole ce voisinage de ζ_0 par une transversale convenable.

5. Remarques générales. — Les solutions qu'on a pu donner de quelques problèmes de la représentation conforme ont exigé l'extension de la notion d'arc de Jordan orienté, à certaines suites de points. Si P_0 est un point du plan des z d'affixe z_0, une suite $\{z_n\}$ est dite *dense en* z_0 si elle converge vers z_0 et si l'on a $\frac{|z_{n+1} - z_0|}{|z_n - z_0|} \to 1$. Si z_0

est l'infini les conditions précédentes sont à remplacer par $|z_n| \to \infty$, $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \to 1$.

Soit z_n dense en z_0, $z_n - z_0 \neq 0$, alors si $\arg(z_n - z_0) \to \alpha$ (en fixant convenablement la détermination de l'argument), nous dirons que $\{z_n\}$ est *orientée en* z_0 et y possède la *direction limite* α (ou est *tangente* à la direction α). De même lorsque $z_0 = \infty$ et que $\arg z_n \to \alpha$, nous dirons que α est la direction limite de la suite $\{z_n\}$.

Soit P_0 un point iac. de F(D) situé à distance finie. Parmi tous les voisinages de P_0 intérieurs à D que l'on peut définir, trois sont particulièrement importants. (*Cf.* Ostrowski [4], p. 92-93.)

Un voisinage de P_0 intérieur à D sera dit *angulaire* (Winkelumgebung, Dreiecksumgebung) s'il est contenu dans un triangle T_1 ayant un de ses sommets en P_0 T_1 étant intérieur à un triangle T_2 complètement intérieur à D sauf un de ses sommets qui est P_0. Si ζ tend vers P_0 en restant dans un tel voisinage, nous dirons que ζ *converge angulairement vers* P_0 ($\zeta \succ\!\to P_0$). Si une fonction $\varphi(\zeta)$ tend vers α lorsque ζ tend vers P_0 angulairement, indépendamment du choix de T_1 on dit que α est la *limite angulaire* en P_0 de $\varphi(\zeta)$.

Si l'on ne soumet le voisinage de P_0 intérieur à D à aucune restriction, nous parlerons d'un *voisinage total* (Allseitige Umgebung) et la convergence de ζ vers P_0 dans un tel voisinage, sera dite *convergence totale* ($\zeta \succ\!\!\succ\!\to P_0$).

Soit L une des parties de F(D) qui aboutit en P_0 et R_1, R_2 deux rayons intérieurs à D sauf leur extrémité commune P_0. Si R_1 est compris *entre* L et R_2, joignons un point de R_1 intérieur à D à un point de L différent de P_0, par une ligne de Jordan C. Nous déterminons de la sorte un domaine partiel de D situé *entre* L et R_2 et ayant P_0 comme point iac. Ce domaine sera appelé *voisinage latéral de* P_0 *le long de* L (Halbseitige Umgebung). Si ζ tend vers P_0 en restant dans un tel voisinage, nous dirons que ζ *converge latéralement le long de* L *vers* P_0. Comme ci-dessus on définit les *limites totales* et *latérales* de fonctions $\varphi(\zeta)$ en P_0. Lorsque le point iac. est à l'infini, les modifications à introduire dans les définitions précédentes sont évidentes.

La considération du point-frontière à l'infini offre l'avantage qu'on peut l'atteindre suivant des *demi-droites*, mais il est évident que lorsqu'il s'agira de *l'uniformité* d'un fait il sera plus indiqué de prendre le point en question à distance finie. Lorsqu'on voudra étudier séparément l'argument et le module de la fonction qui effectue la TC, ainsi que la dérivée de cette fonction, il sera encore plus commode d'effectuer au préalable, une *transformation logarithmique* de manière que π_0 à l'infini devienne ac. suivant des rayons situés à l'intérieur d'une demi-bande.

CHAPITRE II.

LA CONSERVATION DES ANGLES ET LES TC ORIENTÉES A LA FRONTIÈRE.

6. **Les TC orientées entre deux domaines quelconques.** — Soit $z = f(\zeta)$ une TC de D_z sur D_ζ où z_0, point iac. angulairement de $F(D_z)$ correspond à ζ_0 point iac. de $F(D_\zeta)$. Soit L une entaille de D_z orientée en z_0. Si par notre TC, à L correspond une entaille L de D_ζ orientée en ζ_0, on dit que L est *transformée conformément* en z_0 (Ostrowski [8], p. 402).

Partant de cette définition, on a les théorèmes suivants :

I. *Soit* $z = f(\zeta)$ *une* TC *de* D_z *sur* D_ζ *où* z_0 *point iac. angulairement de* $F(D_z)$ *correspond à* ζ_0 *point iac. de* $F(D_\zeta)$. *Soit* L *une entaille de* D_z *orientées en* z_0, *dont la direction en* z_0 *est contenue dans l'intervalle des directions de* z_0. *Si* L *se transforme conformément en* z_0, *il en est de même de toute entaille* L' *tangente à* L *en* z_0 *et l'image de* L' *est tangente en* ζ_0 *à celle de* L (Ostrowski [8], p. 402-403).

II. *Supposons qu'une* TC *de* D_z *sur* D_ζ *amène* z_0, *point iac. angulairement de* $F(D_z)$ *en* ζ_0. *Soient* L' *et* L'' *deux entailles de* D_z *orientées en* z_0, *aux directions limites distinctes contenues dans* γ, *intervalle des directions de* z_0, *qui se transforment conformément en* z_0. *Alors, il en est de même de toute entaille* L *orientée en* z_0 *dont la direction en* z_0 *est contenue dans* γ, *et la direction* α' *de l'image de* L *en* ζ_0 *est une fonction linéaire de la direction* α *de* L *en* z_0

$$\alpha' = k\alpha + h,$$

où k *et* h *ne dépendent pas de* α *dès que les déterminations de* α *et* α' *sont fixées* (Ostrowski [8], p. 405-406).

On a $k \geqq 0$ si z_0 et ζ_0 sont tous deux à distance finie ou tous deux à distance infinie, mais si l'un seulement des deux points z_0 ou ζ_0 se trouve à l'infini, on a $k \leqq 0$.

k s'appellera *indice d'orientation* de la TC en question en z_0.

Si $k = \pm 1$, la transformation est *isogonale* en z_0, si $|k|$ diffère de 1 et de 0, elle est dite *quasi conforme* en z_0.

III. *Si* $k = 0$, ζ_0 *n'est pas accessible angulairement* (Ostrowski [8], p. 408).

Il résulte de II et III que l'ouverture de γ', intervalle des directions de ζ_0 en D_ζ est égale à l'ouverture de γ multipliée par $|k|$.

Une TC satisfaisant aux hypothèses de II en z_0, sera dite *orientée en* z_0.

Les démonstrations de I et II reposent essentiellement sur les théorèmes I, III du n° 9 F. G.

IV. Théorème de la distorsion a la frontière (*Randverzerrungssatz*). — *Sous les hypothèses de* II *on a, si* $\zeta \succ\!\!\to \zeta_0$,

$$\frac{f'(\zeta)}{\dfrac{z - z_0}{\zeta - \zeta_0}} \to k, \tag{1}$$

où k *est l'indice d'orientation en* ζ_0 (Visser [2], p. 37, Ostrowski [4], p. 100-101).

7. Conséquences du théorème de la distorsion à la frontière.

I. *Sous les hypothèses du théorème* II, n° 6, *l'expression*

$$\arg f'(\zeta) - (k - 1)\arg(\zeta - \zeta_0) \tag{1}$$

tend vers une limite, si $\zeta \succ\!\!\to \zeta_0$. *En particulier, si la* TC *est isogonale en* ζ_0 *et* $k = 1$, $\arg f'(\zeta)$ *converge vers une limite, si* $\zeta \succ\!\!\to \zeta_0$ (Ostrowski [4]).

I'. *Sous les hypothèses de* II, n° 6, *on a, si* $\zeta \succ\!\!\to \zeta_0$:

$$\frac{\operatorname{Log}|z - z_0|}{\operatorname{Log}|\zeta - \zeta_0|} \to k$$

(Gross [2]. p. 61).

Si k est $\gtrless 0$:

$$\frac{\operatorname{Log}|f'(\zeta)|}{\operatorname{Log}|\zeta-\zeta_0|} \to k-1,$$

si $k=0$, *on a*

$$\overline{\lim} \frac{\operatorname{Log}|f'(\zeta)|}{\operatorname{Log}|\zeta-\zeta_0|^{-1}} \leqq 1;$$

$$\underline{\lim} \frac{\operatorname{Log}\left|\int_{\zeta_0}^{\zeta}|f(u)|\,du\right|}{\operatorname{Log}|\zeta-\zeta_0|^{-1}} \geqq 0$$

(Ostrowski [4], p. 174).

II. *Sous les hypothèses de* II, n° 6, *supposons que* $|k|>0$ *et que*

$$\zeta_1 \succ\!\!\to \zeta_0, \quad \zeta_2 \succ\!\!\to \zeta_0 \qquad (\zeta_1 \neq \zeta_2),$$

en vérifiant

(2) $$c_1 \leqq \left|\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_2-\zeta_0}\right| \leqq c_2,$$

où c_1 *et* c_2 *sont deux constantes positives quelconques*, $c_1<c_2$. *Alors*

(3) $$\frac{f(\zeta_1)-z_0}{f(\zeta_2)-z_0} \sim \left(\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_2-\zeta_0}\right)^k,$$

(4) $$\frac{f'(\zeta_1)}{f'(\zeta_2)} \sim \left(\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_2-\zeta_0}\right)^{k-1}.$$

Si au lieu de (2) *on suppose que*

(2′) $$\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_2-\zeta_0} \to 0$$

ou

(2″) $$\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_2-\zeta_0} \to \infty,$$

on a respectivement

(3′) $$\frac{f(\zeta_1)-z_0}{f(\zeta_2)-z_0} \to 0$$

et

(3″) $$\frac{f(\zeta_1)-z_0}{f(\zeta_2)-z_0} \to \infty.$$

Si $k=0$, *la relation* (3) *reste vraie sous la condition* (2) (Ostrowski [4], p. 116-127).

III. *Sous les conditions de* II, n° 6, *on a pour* $\zeta \succ\!\!\to \zeta_0$:

$$(5)\qquad (\zeta-\zeta_0)^{\nu}\frac{f^{(\nu)}(\zeta)}{f(\zeta)-z_0} \to k(k-1)(k-2)\ldots(k-\nu+1), \qquad \nu>0$$

(Ostrowski [4], p. 130).

Dans les formules des théorèmes des n^os 6 et 7 chacune des constantes z_0 et ζ_0 doit être remplacée par o dès que le point fixe qu'elle représente est supposé à l'infini. Ceci se voit immédiatement pour les formules (1) n° 6 et (1) à (4) de ce numéro, pour la formule (5) le raisonnement du mémoire indiqué s'applique directement à ce cas.

IV. *Soient, sous les hypothèses du théorème* II, n° 6, z_0 *et* ζ_0 *à distance finie et* $k=1$. *Soient* z_1, z_2 *deux points de* D *tendant angulairement vers* z_0, *de manière que les trois angles* b_0, b_1, b_2, *en* z_0, z_1, z_2 *du triangle* $\Delta_z=(z_0z_1z_2)$ *restent supérieurs à une borne fixe* >0 *quelconque. Alors, si* ζ_1, ζ_2 *sont les points correspondants de* z_1, z_2, *le triangle* $\Delta_\zeta=(\zeta_0\zeta_1\zeta_2)$ *est* semblable à la limite *au triangle* Δ_z, *c'est-à-dire que, si* β_0, β_1, β_2 *sont les trois angles en* ζ_0, ζ_1, ζ_2 *du triangle* Δ_ζ,

$$(6)\qquad b_\nu-\beta_\nu\to 0 \qquad (\nu=0,1,2)$$

et

$$(7)\qquad \frac{z_\lambda-z_\mu}{z_\lambda-z_\nu}\sim\frac{\zeta_\lambda-\zeta_\mu}{\zeta_\lambda-\zeta_\nu} \qquad (\lambda\neq\mu\neq\nu,\ \lambda,\mu,\nu=0,1,2).$$

La relation (6) *reste valable même s'il n'existe pas de borne inférieure positive pour les angles* b_0, b_1, b_2.

L'équivalence relative à $\dfrac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_0}$ *peut être démontrée si l'on suppose que* $\dfrac{\zeta_1-\zeta_0}{\zeta_2-\zeta_0}$ *reste bornée* (*cf.* Ostrowski [4], p. 120-124).

Ce théorème traduit le fait de la *conformité relative* en ζ_0 d'une TC isogonale en ζ_0. Il est à relever que cette similitude infinitésimale n'implique pas l'existence d'un facteur de similitude fini et différent de zéro. Si un facteur de similitude fini et différent de zéro existe on a *conformité absolue* en ζ_0 (Ostrowski [4], p. 85).

Le théoreme IV est conséquence de l'existence de $\lim \arg f'(\zeta)$ résultant pour $k=1$ du théorème I.

8. Remarques générales sur les TC orientées entre domaines quelconques. — Dans ce numéro nous considérons des TC des domaines D_z, D_ζ, D_w où z_0, ζ_0, w_0 sont trois points des frontières de ces domaines iac. angulairement, se correspondant mutuellement, ce qui ne sera plus répété.

Soient T_1 une TC de D_z sur D_ζ orientée en z_0 et T_2 une TC de D_ζ sur D_w orientée en ζ_0, alors, la transformation résultant de T_1 et T_2 est orientée en z_0.

Utilisant ce fait, on peut étudier *l'orientation* en z_0 d'une TC de D_z sur D_w en passant par un domaine-type intermédiaire D_ζ particulièrement simple, par exemple C-U ou H_ζ ([5]). Mais ceci n'est possible que si un des deux domaines D_z, D_w, D_z, par exemple, possède une TC sur C-U orientée en z_0. Alors *toute* transformation en question de D_z sur C-U est orientée en z_0, et la condition nécessaire et suffisante pour que notre TC de D_z sur D_w soit orientée en z_0, est que la transformation de D_w sur C-U soit orientée en w_0. Si cette condition est remplie, *toute* TC en question de D_z sur D_w est orientée en z_0.

Or, notre TC de D_z sur D_w peut très bien être orientée en z_0 sans qu'il en soit de même de la TC de D_z sur C-U. Dans ce cas une étude directe s'impose; en particulier, il est probable que dans ces cas certaines TC de D_z sur D_w puissent être orientées en z_0 sans que ceci soit le cas pour la totalité de telles transformations. Ce problème se ramène au suivant : quelles TC de D_z sur lui-même conservant z_0 sont orientées en ce point? Cette question qui nous paraît présenter un très grand intérêt et pourrait conduire à des énoncés bien inattendus, reste encore à élucider (*cf.* Ostrowski [8], p. 409).

Depuis 1939, M^lle J. Ferrand [6] a obtenu des résultats sur cette question.

Un autre problème est en relation avec le précédent. Soit D'_z un domaine partiel de D_z contenant un voisinage angulaire de z_0. Existe-t-il toujours des TC de D_z sur D'_z orientées en z_0?

9. Conditions pour qu'une TC sur un domaine-type soit orientée. — Dans ce numéro et les deux suivants, nous supposerons, ce qui est

([5]) Plus généralement nous appellerons *domaine-type* tout domaine D dont F(D) est au voisinage du point considéré un arc analytique régulier.

permis sans restreindre la généralité, que le point iač. angulairement ζ_0 de $F(D_\zeta)$ est rejeté à l'infini. Nous le désignerons par π_0. Nous prendrons pour domaine-type le demi-plan H_z, la TC considérée T_0, amenant π_0 en $z=\infty$.

On a les théorèmes suivants :

I. *Soient* A *un* E-F *de* $F(D_\zeta)$ *ne contenant pas* π_0 *et* γ *un des arcs (intervalle d'*E-F*) de* $F(D_\zeta)$ *reliant* A *à* π_0. *Pour que* T_0 *soit orientée en* π_0, *il faut que le potentiel caractéristique* $P_{D_\zeta,\gamma}(\zeta)$ *sur toute entaille* L *orientée en* π_0, *de direction limite* α, *possède en* π_0 *une limite, fonction linéaire de* α, *et il suffit que sur deux telles entailles* L_1 *et* L_2 *de directions limites distinctes en* π_0, *il existe des limites pour* $P_{D_\zeta,\gamma}(\zeta)$ (Ostrowski [8]).

II. *Soit* (α, β) *l'intervalle des directions de* π_0 *en* D_ζ. *Si sur* $F(D_\zeta)$ *il existe une suite* $\{\zeta^{(\nu)}\}$ *de points dense en* π_0 *et tangente en* π_0 *à la direction* β, *alors à toute entaille de* D_ζ, *orientée en* π_0 *avec pour direction limite* β, *correspond une entaille de* H_z *orientée à l'infini, de direction limite parallèle à l'axe imaginaire, positif si* $\beta > \alpha$, *négatif si* $\beta < \alpha$ (Ostrowski [8], p. 441).

Rappelons que la propriété imposée à la suite $\zeta^{(\nu)}$ se réduit à

$$\left.\begin{aligned} &(1) \qquad |\zeta^{(\nu)}| \to \infty, \\ &(2) \qquad \left|\frac{\zeta^{(\nu+1)}}{\zeta^{(\nu)}}\right| \to 1 \\ &(3) \qquad \arg\zeta^{(\nu)} \to \beta \end{aligned}\right\} \qquad (\nu \to \infty).$$

Si l'on cherche des *conditions complètes* pour une TC sur H_z, on peut, évidemment, poser le problème de plusieurs manières; le théorème suivant résout complètement la question du point de vue probablement le plus naturel.

III. *Soit* (α, β) *l'intervalle des directions de* π_0 *en* D_ζ. *La condition nécessaire et suffisante pour que* T_0 *soit orientée en* π_0 *est qu'il existe deux suites de points de* $F(D_\zeta)$ *denses en* π_0 *et respectivement tangentes en* π_0 *aux directions* α *et* β (Ostrowski [6], [8], p. 447-449).

La démonstration originale de III, essentiellement corollaire de II, utilise la théorie de la mesure conforme et fait usage du théorème III, n° 19 F.G. Pour une autre démonstration, plus élémentaire, utilisant la méthode de Dirichlet en recourant au lemme de Wolff du n° 23 F. G., *voir* Gattegno [1], [2]. Une autre démonstration est due à J. Ferrand [2].

Dans la démonstration originale de III, il est fait usage du théorème plus élémentaire, donné par Carathéodory en 1914 [1], concernant les domaines jordaniens et d'après lequel la TC d'un domaine jordanien D_ζ sur C-U est isogonale en chaque point où $F(D_\zeta)$ possède une tangente (*voir* plus loin, n° 17).

Dans deux cas plus généraux que celui de Carathéodory, cité à l'instant, mais essentiellement plus particuliers que III, l'isogonalité a été démontrée par :

Carathéodory [2] dans le cas où toute la partie de $F(D_\zeta)$ assez éloignée de l'origine est comprise entre deux droites parallèles.

Wolff [6], [7], dans le cas où toute la partie de $F(D_\zeta)$ suffisamment éloignée de l'origine est enfermée dans un angle arbitrairement petit (la démonstration de Wolff s'appuie sur son lemme rappelé ci-dessus).

10. Le premier théorème sur les replis des domaines (Erster Faltensatz).

I. *Soit* D_ζ *un domaine représenté par* $z=f(\zeta)$ *sur* H_z *et satisfaisant aux hypothèses de* III, n° 9, *avec un indice d'orientation* >0.

Supposons qu'à la direction de l'axe réel positif du plan des z, *à l'infini corresponde en* π_0 *la direction de l'axe réel positif du plan des* ζ, *ce qui s'obtient par une rotation de* D_ζ *autour de l'origine. Alors, si* ζ *converge vers* π_0 *de l'intérieur ou sur* $F(D_\zeta)$, *on a*

$$\frac{|f(\zeta)|}{|f(\rho_\zeta)|} \to 1,$$

où ρ_ζ *est le rayon vecteur réduit de* ζ *défini au* n° 2, Chapitre I (Ostrowski [7], [8], p. 458).

(Rappelons qu'une suite de points-frontières i. de D_ζ est dite converger vers le point iac. π_0, si la suite des E–F contenant ces points i. tend vers π_0.)

Utilisant les notations du n° 2, Chapitre I, on peut traduire l'essentiel de I comme suit : si ζ tend vers l'infini, les images de tous les points de l'arc β_ρ sont *équivalentes* entre elles, ainsi qu'aux images des replis découpés par la circonférence de β_ρ.

On en déduit aisément :

II. *Sous les hypothèses de* I, *on a*, *si* ζ *tend vers* π_0, *dans* D_ζ *ou sur* $F(D_\zeta)$

$$|f(\zeta)| = \rho_\zeta^{\frac{\beta-\alpha}{\pi}[1+\varepsilon_1(\zeta)]}$$

et pour deux points ζ_1, ζ_2 *tendant vers* π_0

$$\frac{|f(\zeta_1)|}{|f(\zeta_2)|} = \left(\frac{\rho_{\zeta_1}}{\rho_{\zeta_2}}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\pi}[1+\varepsilon_2(\zeta_1,\zeta_2)]}$$

où $\varepsilon_1(\zeta)$, $\varepsilon_2(\zeta_1, \zeta_2)$ *tendent vers* o (Ostrowski [8], p. 460).

III. *Supposons que pour le* D_ζ *de* I, *un des arcs* L *de* $F(D_\zeta)$ *aboutissant en* π_0, *soit linéairement accessible en* π_0 *avec* $\varkappa$ *comme constante d'accessibilité. Alors on a*, *si* ζ *est suffisamment proche de* π_0 *en restant* entre *l'axe réel positif et* L, *pour un* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit :*

$$\frac{1}{\varkappa(1+\varepsilon)} < \frac{|f(\zeta)|}{|f(|\zeta|)|} < \varkappa(1+\varepsilon).$$

Ce théorème se trouve pour les domaines jordaniens dans Warschawski [2], [5] et Ostrowski [5], et pour les domaines généraux dans Ostrowski [8]. On trouve dans Ostrowski [8] un énoncé plus précis impliquant les constantes k_+, k_-.

IV. *Soit* D_ζ *représenté par* $z = f(\zeta)$ *sur un domaine* D_z *de sorte qu'au point iac. angulairement* π_0 *de* D_ζ *à l'infini corresponde le point* π_1 *de* D_z *iac. angulairement, également à l'infini, la* TC *étant orientée en* π_0 *et la direction des axes réels positifs en* π_0 *et* π_1 *se correspondant mutuellement.*

Supposons qu'un arc frontière L *de* D_ζ *aboutissant en* π_0 *soit linéairement ac. en* π_0 *avec la constante d'accessibilité* k. *Soit* D_ζ^* *le noyau de* D_ζ *et* D'_z *l'image de* D_ζ^* *dans* D_z *et* L^* *l'arc de* $F(D_\zeta^*)$ *situé* entre L *et l'axe réel positif. Alors :*

1° *L'arc frontière* L' *de* D'_z *aboutissant en* π_1 *situé* entre L_1, *image de* L, *et l'axe positif réel, est linéairement ac. en* π_1 *avec une constante d'accessibilité* $\leqq \varkappa$;

2° *Si* ζ *tend vers* π_0 *dans la partie de* D_ζ *contiguë au bord supé-*

rieur de l'axe réel positif et sur la frontière de cette partie, on a

$$\frac{1}{\varkappa} \leq \overline{\lim} \left| \frac{f(\zeta)}{f(\rho\zeta)} \right| \leq \varkappa.$$

(Ostrowski [8], p. 461-462).

11. Le deuxième théorème sur les replis des domaines (Zweiter Faltensatz). — Soit L_r le quart de circonférence $|z| = r, \frac{\pi}{2} > \arg z \geqq 0$ (pour le quart de cercle symétrique par rapport à l'axe réel les conclusions seraient toutes pareilles) et Λ_r son image dans D_ζ, D_ζ étant supposé satisfaire aux hypothèses du théorème III, n° 9. Le théorème I, n° 10, dit que les rayons vecteurs de l'ensemble des points de Λ_r (nous le désignerons par Λ_r^*) contenus dans D_ζ^* sont équivalents pour r tendant vers l'infini. Mais, les parties de Λ_r traversant un repli R de D_ζ peuvent, suivant l'ampleur de R, être plus ou moins éloignées de Λ^* et même le sont, si la partie de Λ_r dont il s'agit, a une extrémité dans R suffisamment éloignée de la transversale circulaire q qui découpe R dans D_ζ.

La tendance générale des précisions qu'on peut apporter sur l'allure de ces parties de Λ_r, consiste en ce qu'une partie de Λ_r qui entre dans un repli *et en ressort*, ne s'éloigne pas *trop* de la transversale q et qu'une partie de Λ_r qui *aboutit à un point-frontière du repli*, s'y rend à partir de son dernier point d'entrée par un chemin qui ne fait pas *trop* de détours.

Pour pouvoir préciser ces faits, l'introduction d'une nouvelle notion s'impose :

Les replis définis au n° 2, Chapitre I, étant appelés aussi *replis primaires* (Hauptfalten), considérons une transversale circulaire q centrée à l'origine et appelons *repli secondaire* (Nebenfalte) la partie d'un repli primaire non contiguë au noyau de D_ζ découpée par q. La frontière d'un repli secondaire est constituée par q, que nous appellerons *coupure* de ce repli secondaire et par une portion connexe de $F(D_\zeta)$. Les replis primaires sont aussi, par définition, des replis secondaires.

Utilisant cette notion on peut énoncer le théorème suivant :

I. Deuxième théorème sur les replis des domaines. — D_ζ *étant le domaine ci-dessus, supposons que la* TC *de* D_ζ *sur* H_z *soit isogonale* *en* π_0. *Soient* C *la partie de* $F(D_\zeta)$ *qui correspond à l'axe imaginaire positif, et* R *un repli secondaire de* C. *Soit* λ *un arc de* Λ_r *qui reste dans* R *et dont les extrémités* ζ_1 *et* ζ_2 *sont sur la coupure* q *de* R. *Supposons que le point* $\zeta = 0$ *est extérieur à* R; *alors tous les points de* λ *sont situés dans la couronne*

$$(1) \qquad |\zeta_1| e^{-k\theta} < |\zeta| < |\zeta_1| e^{k\theta}$$

où θ *est l'angle au centre de la coupure* q *et où la constante absolue* k *peut être prise égale à* $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ (Ostrowski [7], [8], p. 465).

Pour un résultat partiel valable dans le cas de domaines jordaniens avec tangente à l'infini et accessible linéairement à l'infini, *voir* J. Wolff [5], Warschawski [5] et J. Ferrand [2].

I devient dans un cas un peu plus général :

II. *Sous les hypothèses de* I, *soit* L *une entaille de* H_z *dont les cordes forment avec l'axe réel positif des angles compris dans l'intervalle* $< -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \frac{\pi}{2} - \alpha >$, $\alpha > 0$. *Alors, si* λ *est un arc partiel de l'image de* L *contenu dans* R *excepté ses extrémités* ζ_1 *et* ζ_2 *situées sur* q, *tous les points de* λ *sont situés dans la couronne*

$$(2) \qquad |\zeta_1| e^{-\frac{\theta}{2}\cot^2\frac{\alpha}{4}} \leq |\zeta| \leq |\zeta_1| e^{\frac{\theta}{2}\cot^2\frac{\alpha}{4}}.$$

(Ostrowski [8], p. 468).

Si l'indice d'orientation de la TC de D_ζ sur H_z n'est pas égal à 1, mais est > 0, les théorèmes I et II restent vrais lorsqu'on remplace les coefficients de (2) par d'autres faciles à calculer.

Les deux théorèmes de ce numéro donnent des renseignements essentiellement plus précis, si θ tend vers 0, ce qui a lieu par exemple si la partie de $F(D_\zeta)$, aboutissant en π_0, dont il s'agit, possède en π_0 une tangente ou même une tangente-W.

CHAPITRE III.

CONFORMITÉ ABSOLUE ANGULAIRE.

12. Conformité absolue. — Soit $\zeta = \varphi(z)$ une TC d'un domaine D_ζ sur C-U orientée en un point frontière ζ_0 iac. angulairement à distance finie, correspondant à $z=1$. Nous supposerons aussi que $\zeta_0=1$.

On se bornait généralement jusqu'ici à l'étude de la conformité absolue dans le cas d'une convergence angulaire; dans un tel cas nous parlerons de *conformité absolue angulaire.*

La condition nécessaire et suffisante pour la conformité absolue angulaire pour notre TC en ζ_0 est que les deux limites

$$(\mathrm{L})\ \lim_{z \succ\!\!\rightarrow 1} \frac{\varphi(z)-1}{z-1}, \qquad \lim_{z \succ\!\!\rightarrow 1} \varphi'(z)$$

existent, soient égales, finies et différentes de zéro. Si ces conditions sont satisfaites nous dirons que $\varphi(z)$ admet en $z=1$ un *coefficient angulaire de conformité* qui est la limite commune, différente de o, des expressions (L). Le fait analogue subsiste pour la conformité absolue totale et la conformité absolue latérale. Visser [2], p. 38-39, donne un exemple d'une TC orientée en $z=1$, pour laquelle la première des limites (L) n'existe pas.

Les conditions énoncées peuvent être condensées et remplacées par de plus simples si l'on fait quelques hypothèses particulières :

1° Si le domaine D_ζ est contenu à l'intérieur ou à l'extérieur d'un cercle ou d'un demi-plan, dont la frontière passe par $\zeta_0=1$, d'après le théorème de Wolff-Carathéodory-Landau-Valiron, la première des limites (L) existe et est différente de o. Si elle est finie, la seconde limite existe toujours et est égale à la première. Donc pour un D_ζ de cette espèce la condition de conformité absolue angulaire en $\zeta_0=1$ se réduit à la condition que *la borne inférieure* de $\frac{\varphi(z)-1}{z-1}$ soit finie pour $z \succ\!\!\rightarrow 1$;

2° De l'existence de la seconde des limites (L) il résulte que $\arg\varphi'(z)$ converge lorsque $z \succ\!\!\rightarrow 1$, c'est-à-dire que notre TC est isogonale en $z=1$. Supposons donc, que notre TC soit isogonale en $z=1$, alors si l'une des limites (L) existe l'autre existe aussi et a la même valeur (Valiron [1], Ahlfors [1], p. 28-29; Visser [2], p. 35-37; Ostrowski [4], p. 127). Il suffit donc dans ce cas d'exiger que par exemple, $\lim\log|\varphi'(z)|$ existe et soit finie pour $z \succ\!\!\rightarrow 1$.

Dans les recherches sur les conditions de conformité absolue angulaire on rejette généralement les points z_0, ζ_0 à l'infini et l'on remplace C-U par H_z. Soit donc $\zeta = \varphi(z) = \xi + i\eta$, une fonction holomorphe et univalente dans H_z, représentant H_z sur D_ζ de telle sorte que le point iac. angulairement π_0 de D_ζ à l'infini corresponde à $z = \infty$. Nous supposerons dans ce chapitre que la TC est isogonale en π_0 et que les directions des axes réels positifs à l'infini se correspondent.

Dans ce cas le problème de la conformité absolue angulaire est équivalent au suivant :

1° Dans quelles conditions portant sur le domaine D_ζ la fonction $\varphi(z)$ possède-t-elle un coefficient angulaire de conformité $\neq 0$ à l'infini ?

Un domaine de cette nature sera dit *strictement plat à l'infini* (Wolff [3] l'appelle *valable*). Évidemment, on peut remplacer dans le théorème de Wolff-Carathéodory-Landau-Valiron, H_z, par un domaine D_z strictement plat à l'infini (Ahlfors [1], p. 31-32).

Il y a lieu de considérer en même temps le problème suivant :

2° Soit $\varphi(z)$ holomorphe dans H_z, supposons que ses valeurs forment un domaine Δ s'étendant à l'infini. Sous quelles conditions portant sur Δ peut-on affirmer que les limites pour $z \succ\!\!\rightarrow 1$

$$\lim \frac{\varphi(z)}{z}, \quad \lim \varphi'(z)$$

existent, sont finies et égales ?

La condition de 2° comporte une certaine restriction de grandeur pour Δ à l'infini. Nous allons appeler un domaine Δ pour lequel cette condition est remplie *domaine régulièrement restreint à l'infini*. On voit immédiatement qu'un domaine simplement connexe, s'étendant à l'infini et faisant partie d'un domaine strictement plat à l'infini est régulièrement restreint à l'infini.

Enfin, dans quelques recherches le problème suivant est étudié en vue d'applications au problème du coefficient angulaire de conformité. Considérons un domaine D_ζ possédant à l'infini un point iac. angulairement, ac. suivant l'axe réel positif et soit $z = f(\zeta)$ une fonction à partie réelle positive, holomorphe dans D_ζ. Sous quelles conditions le quotient $\frac{f(\zeta)}{\zeta}$ reste-t-il borné lorsque ζ tend vers l'infini le long de l'axe réel positif ? (Van der Corput [1]).

Dans le même ordre d'idées la remarque suivante de Wolff [3], p. 1186-1187, présente un certain intérêt :

Soient $W(z)$, $w(z)$ deux fonctions holomorphes dans H_z avec $\mathfrak{R}W(z) \geqq 0$, $\mathfrak{R}w(z) \geqq 0$, réelles sur l'axe réel et pour lesquelles les dérivées angulaires sont toutes deux nulles à l'infini. Si H_z est représenté par $\zeta = W(z)$ sur un domaine limité par une ligne de Jordan Γ, il existe sur Γ une suite de points ζ_n, $\zeta_n \to \infty$ avec n tels que $\frac{w(\zeta_n)}{\zeta_n} \to 0$. Cette remarque est une illustration du fait que la courbe Γ possède une infinité de points qui, en un certain sens, sont *suffisamment rapprochés du voisinage angulaire de l'infini.*

Mentionnons enfin deux Notes de Weniaminoff [1], [2], où est discuté le problème de l'existence presque partout sur $K - U$ ou sur un ensemble de mesure positive, de $\lim \varphi'(z)$.

13. Domaines et courbes de comparaison. — Les recherches sur l'existence du coefficient angulaire de conformité utilisent généralement plus ou moins explicitement l'un des principes suivants :

A. D_ζ *est strictement plat à l'infini, s'il contient un domaine strictement plat à l'infini et est contenu dans un domaine strictement plat à l'infini.*

Ce principe, implicitement utilisé par Carathéodory [2] chez qui les domaines de comparaison sont des demi-plans, a été énoncé comme tel par Warschawski [2], p. 454, pour des domaines de comparaison jordaniens á tangente à l'infini, et pour le cas général par Grootenboer [1], [2], p. 130.

B. D_ζ *est strictement plat à l'infini, s'il contient un domaine strictement plat à l'infini et un domaine* D *qui correspond dans* H_z *à un domaine strictement plat à l'infini.*

Ce principe remarquable par ce que les deux domaines de comparaison sont *intérieurs* à D_ζ est employé implicitement par Carathéodory [2], p. 53, et par Wolff [1] avec des demi-plans pour domaines de comparaison.

C. D_ζ *est strictement plat à l'infini s'il contient un domaine régulièrement restreint à l'infini et un domaine strictement plat à l'infini dont l'image dans* H_z *est strictement plat à l'infini.*

Les démonstrations de ces trois principes sont presque immédiates si l'on fait usage du théorème V, Chapitre II, n° 11, F. G., dans lequel H_z est remplacé par un domaine strictement plat à l'infini.

D. D_ζ *est strictement plat à l'infini s'il est contenu dans un domaine strictement plat à l'infini et s'il contient toutes les valeurs d'une fonction* $\psi(z)$ *quelconque, convenablement choisie, holomorphe dans* H_z *et douée d'un coefficient angulaire de conformité à fini et* $\neq 0$.

Ce principe dû à Valiron [1], p. 73-76; [2], p. 208-209, pour le cas d'un demi-plan comme domaine extérieur de comparaison et dont la démonstration est un peu plus profonde que celle des principes précédents, est commode parce qu'il permet de se limiter à l'étude de l'*expression analytique* de la fonction $\psi(z)$.

E. *Si* $f(z)$ *est holomorphe dans* H_z *avec* $\Re f(z) > 0$, *réelle sur l'axe réel et que* $\lambda = \lim f'(x) < \infty$ *pour* $x \uparrow \infty$, *l'ensemble des points de* H_z *pour lesquels*

$$\lambda < \frac{\Re f(z)}{x} < \lambda + \varepsilon$$

est un domaine strictement plat à l'infini, pour tout $\varepsilon > 0$.

On obtient cet énoncé en développant un résultat de Wolff [3], p. 1186.

Parmi les principaux résultats élémentaires qu'on déduit aisément de ces principes mentionnons les deux suivants :

I. D_ζ *est strictement plat à l'infini si sa frontière est comprise entre deux droites parallèles* (Carathéodory [2]). On trouve dans la Note de v. Haselen [1] quelques précisions quantitatives relatives à ce cas.

II. D_ζ *est strictement plat à l'infini s'il contient un demi-plan et un domaine image* D'_ζ *d'un demi-plan du plan des* z, *tel que* D'_ζ *soit contenu dans un demi-plan* (Wolff, [1]).

Les résultats analysés dans les n^{os} 14, 15 sont caractérisés par le fait que leurs conditions se ramènent à la convergence de certaines intégrales; on emploie donc, par là, dans une certaine mesure des *propriétés de moyenne* de points du voisinage de π_0 et non plus des propriétés des points eux-mêmes.

Nous appellerons L_+ et L_- les branches de $F(D_\zeta)$ correspondant respectivement à l'axe imaginaire positif et négatif.

14. Problème restreint de la conformité absolue. — Dans les recherches sur la conformité absolue on se borne souvent au cas où le domaine D_ζ est contenu dans le demi-plan H_ζ. Nous appellerons ce cas de notre problème : le *problème restreint*. Il s'agit évidemment dans ce cas de trouver une *borne inférieure positive* pour la dérivée angulaire. Dans ce numéro nous analysons les résultats obtenus par différents auteurs sur le problème restreint bien que la plupart d'entre eux puissent être déduits plus ou moins aisément du résultat d'Ahlfors résumé au numéro suivant.

Dans tous les énoncés qui suivent D_ζ est partie de H_ζ.

Donnons d'abord quelques cas particuliers pour lesquels on a pu trouver une condition nécessaire et suffisante pour la conformité absolue.

I. *Supposons que* D_ζ *soit symétrique par rapport à l'axe réel et que le long de* L_+ $r = |\zeta|$ *et* $\varphi = \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$ *croissent, tandis que* $\frac{d\zeta}{dr} = \frac{d\mathfrak{R}\zeta}{dr}$ *existe et tende vers* o *avec* $r \uparrow \infty$. *Il en résulte que* $\frac{\zeta}{z}$ *tend vers la dérivée à l'infini pour la convergence totale et que la convergence de l'intégrale*

$$\int_1^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{dr}{r}$$

est nécessaire et suffisante pour que D_ζ *soit strictement plat à l'infini* (Wolff [2], [9], 1930).

II. D_ζ *étant supposé jordanien, supposons que* $\mathfrak{R}\frac{1}{\zeta}$ *décroisse monotonement lorsqu'on va à l'infini le long de* L_+ *et de* L_-. *Pour que* D_ζ *soit strictement plat à l'infini il est nécessaire et suffisant que pour* L_+, *aussi bien que pour* L_-, *les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

a. L_+ *possède un paramètre métrique* σ;

b. L'intégrale $\int_1^\infty \frac{\xi(\sigma)}{\sigma^2}\,d\sigma$ *converge.*

(Warschawski [2], 1932, p. 425-454; Wolff [4], 1933).

III. D_ζ *étant supposé jordanien, supposons que lorsque* ξ *tend vers l'infini,* $\eta(\xi)$ *tende vers* $+\infty$ *sur* L_+ *sans décroître et* $\eta(\xi)$ *tende vers* $-\infty$ *sur* L_- *sans croître. La condition nécessaire et suffisante pour que* D_ζ *soit strictement plat à l'infini est que les deux intégrales*

$$\int_1^\infty \frac{d\xi}{\eta}, \quad \int_{-\infty}^1 \frac{d\xi}{\eta}$$

soient convergentes (Visser [5], 1935).

Ce résultat est déduit par son auteur du critère suivant qui établit un lien entre le problème du coefficient de conformité absolue angulaire et la notion de *rayon conforme intérieur* d'un domaine. On appelle rayon conforme intérieur d'un domaine D_ζ relativement à ζ_0 le rayon $\rho(D_\zeta, \zeta_0)$ du cercle centré à l'origine du plan des z sur lequel D_ζ peut être transformé conformément par $z = f(\zeta)$ avec $f(\zeta_0) = 0$ et $f'(\zeta_0) = 1$.

IV. *Pour que* D_ζ *soit strictement plat à l'infini, il faut et il suffit qu'il existe une entaille* C *de* D_ζ *aboutissant en* π_0 *restant dans un angle* $|\arg\zeta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ *pour laquelle l'intégrale*

$$\int_C \left(\frac{1}{\rho(D_\zeta, \zeta)} - \frac{1}{2\xi} \frac{d\xi}{|d\xi|} \right) |d\xi|$$

soit convergente (Visser [3], 1934, où la démonstration est esquissée et Visser [4], 1935).

On a trouvé par différentes méthodes une série de conditions suffisantes pour la conformité absolue.

V. *Désignons par* $\rho(u)$, u *réel* > 0 *le* $\operatorname{Max}\left|\frac{\zeta+u}{\zeta-u}\right|$ *lorsque* ζ *parcourt* $F(D_\zeta)$. *Si l'intégrale*

$$\int_1^\infty [\rho(u) - 1] \frac{du}{u}$$

converge, D_ζ *est strictement plat à l'infini* (Visser [1], 1931 et comme corollaire de IV, Visser [5], 1935).

VI. *Désignons par* $\xi^*(\eta)$ *le* $\operatorname{Max}\xi(\eta)$ *sur* $F(D_\zeta)$ *et supposons que l'intégrale*

$$\int_1^\infty \operatorname*{Max}_{1 \leq \eta \leq t} \xi^*(\eta) \frac{dt}{t^2}$$

converge, D_ζ *est alors strictement plat à l'infini* (Van der Corput [1], 1932).

L'intégrale de van der Corput converge et diverge en même temps que

$$\int_1^\infty \operatorname*{Max}_{t \leq \eta < \infty} \frac{\xi(\eta)}{\eta^2}\, dt$$

(Warschawski [8], 1937).

On trouve dans Warschawski [2], 1932, le théorème correspondant à VI et où cette intégrale est utilisée, mais le domaine qui est supposé jordanien est soumis de plus à la condition que π_0 soit linéairement ac.

VII. *En reprenant les notations du n° 2, soit* $\rho[\pi - \theta'(\rho)]$ *la longueur de l'arc* β_ρ. *Soit* $K > 1$, *quelconque, si la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{Max}_{K^n \leq \rho \leq K^{n+1}} \theta'(\rho)$$

converge, D_ζ *est strictement plat à l'infini* (Ahlfors [1]).

On obtient VII en spécialisant le résultat correspondant d'Ahlfors relatif au problème général (*cf.* plus loin n° 15). Grootenboer [1], [2] donne une démonstration très simple de VII et prouve que la série de VII converge si, pour une suite arbitraire de nombres ρ_n croissants vers l'infini, les deux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{Max}_{\rho_n \leq \rho \leq \rho_{n+1}} \theta'(\rho); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname*{Max}_{\rho_n \leq \rho \leq \rho_{n+1}} \theta'(\rho) \log \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$$

convergent. Il en résulte en particulier que le choix de K dans VII n'est pas essentiel.

Les critères V et VI sont équivalents, en ce sens que si l'un est rempli pour D_ζ l'autre l'est aussi (Van der Corput [1]). Dans le même sens les critères de V et VI sont équivalents à celui de VII (Grootenboer [1], [2]).

En particulier de ces critères on tire le résultat suivant obtenu antérieurement par Valiron [2], 1932.

VIII. D_ζ *étant supposé jordanien et symétrique par rapport à* *l'axe réel, si, le long de* L_+ $\varphi = \arg\zeta$ *et* $\eta = \mathfrak{J}\,\zeta$ *vont en croissant et si*

$$\int_1^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\frac{d\eta}{\eta}$$

converge, D_ζ *est strictement plat à l'infini.*

En particulier :

VIII. D_ζ *est strictement plat à l'infini s'il est contenu dans un demi-plan et contient les deux arcs de la courbe*

$$\xi = \frac{|\eta|}{\log|\eta|\ldots\log_{\alpha-1}|\eta|(\log_\alpha|\eta|)^{1+\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad |\eta| > |\eta_0|.$$

(Valiron [1], 1929, où le point à l'infini est supposé point simple, Valiron [2]).

15. **Le problème général de la conformité absolue.** — En se rapportant au n° 2, Chapitre I, désignons par $\Theta_1(r)$, $\Theta_2(r)$, $\Theta_1(r) > \Theta_2(r)$, les arguments des extrémités d'une transversale circulaire β_r du noyau D_ζ^* et posons

$$\Theta(r) = \Theta_1(r) - \Theta_2(r); \qquad \Theta^*(r) = \operatorname{Min}[\Theta_1, |\Theta_2|].$$

I. *Pour que* D_ζ *soit strictement plat à l'infini il est nécessaire que les intégrales*

$$\int_1^r \frac{\pi - \Theta(r)}{\Theta(r)}\frac{dr}{r} \qquad (1 \leqq r < \infty)$$

soient inférieures à une constante indépendante de r.

Ce théorème est démontré par Ahlfors [1], 1930, p. 33-34, à l'aide de la relation du théorème IV, n° 21 F. G. (Erste Hauptungleichung).

II. *Soit* $\overline{D}_\zeta$ *un domaine simplement connexe symétrique par rapport à l'axe réel, contenu dans le noyau* D_ζ^* *de* D_ζ. *Soit* $\varphi = \overline{\Theta}(r)$ *l'équation en coordonnées polaires de la* partie supérieure *de* $F(\overline{D}_\zeta)$ *et supposons que la variation totale de* $\overline{\Theta}^2$ *soit bornée dans un intervalle* (r_0, ∞). *Si* $\overline{D}_\zeta$ *est strictement plat à l'infini, l'intégrale*

$$\int_{r_0}^r \frac{\pi - \overline{\Theta}(r)}{\overline{\Theta}(r)}\frac{dr}{r}, \qquad r_0 \leqq r < \infty,$$

reste supérieure à une constante indépendante de r.

Ahlfors [1], p. 34-35, déduit la démonstration de II, ainsi que celle du théorème III ci-dessous, d'une inégalité plus ou moins analogue à celle rappelée (zweite Hauptungleichung), se rapportant à un domaine en forme de bande s'étendant à l'infini, symétrique par rapport à une droite.

Soit $\alpha(r) = \text{Max}\left[0, \frac{\pi}{2} - \Theta^*(r)\right]$. Pour $k > 1$ soit m_n la borne supérieure de $\alpha(r)$ dans l'intervalle $k^n \leq r \leq k^{n+1}$.

III. D_ζ *est strictement plat à l'infini, si pour* $k > 1$ *la série* $\sum_1^\infty m_n$ *converge et que l'intégrale*

$$\int_1^\infty \frac{\pi - \Theta(r)}{\Theta(r)} \frac{dr}{r}$$

converge (Ahlfors [1], p. 36-38).

Pour une autre démonstration de III, *cf.* Grootenboer [1], p. 49-51. Un résultat plus spécial que III a été donné par Warschawski [2], 1932, p. 387-454 à l'aide de considérations tout à fait différentes. Du reste la série de III converge si les deux séries

$$\sum_{n=1}^\infty \underset{\rho_n \leq r < \rho_{n+1}}{\text{Max}} \alpha(r), \quad \sum_{n=1}^\infty \underset{\rho_n \leq r \leq \rho_{n+1}}{\text{Max}} \alpha(r) \log \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n},$$

formées à l'aide d'une suite arbitraire de ρ_n avec $\rho_n \uparrow \infty$, convergent (Grootenboer [2]). Le choix de k n'est donc pas essentiel.

Enfin, Ahlfors [1], p. 38-40, applique ses considérations générales aux cas particuliers suivants :

1° Soit D_ζ un domaine obtenu en supprimant dans H_ζ les entailles circulaires

$$|\zeta| = \rho_n, \qquad |\arg\zeta| > \frac{\pi}{2} - \lambda_n \qquad (\lambda_n \to 0,\ \lambda_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Ahlfors donne comme condition suffisante pour que D_ζ soit strictement plat à l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} > k, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n < \infty. \tag{2}$$

Wolff [8] esquisse une démonstration pour la suffisance de la condition suivante :

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty.$$

2° Soit $\delta(\rho)$ une fonction positive décroissant vers o avec $\frac{1}{\rho}$. Considérons les trois domaines D_1, D_2, D_3, du plan des $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ définis par

$$(D_1) \qquad |\varphi| < \frac{\pi}{2} - \delta(\rho),$$

$$(D_2) \qquad |\varphi| < \frac{\pi}{2} + \delta(\rho),$$

$$(D_3) \qquad -\frac{\pi}{2} + \delta(\rho) < \varphi < \frac{\pi}{2} + \delta(\rho).$$

Si $\int_1^{\infty} \delta(\rho) \frac{d\rho}{\rho}$ est convergente, D_1, D_2, D_3 sont strictement plats à l'infini. Cette condition est même nécessaire pour D_1 et D_2.

3° Soient $\delta_1(\rho)$, $\delta_2(\rho)$ deux fonctions positives décroissant vers o avec $\frac{1}{\rho}$. Considérons les trois domaines D_1, D_2, D_3 du plan des $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ définis par

$$(D_1) \qquad -\frac{\pi}{2} + \delta_1(\rho) < \varphi < \frac{\pi}{2} - \delta_2(\rho),$$

$$(D_2) \qquad -\frac{\pi}{2} - \delta_1(\rho) < \varphi < \frac{\pi}{2} + \delta_2(\rho),$$

$$(D_3) \qquad -\frac{\pi}{2} + \delta_1(\rho) < \varphi < \frac{\pi}{2} + \delta_2(\rho).$$

Si les intégrales

$$\int^{\infty} \delta_1(\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \quad \int_1^{\infty} \delta_2(\rho) \frac{d\rho}{\rho}$$

convergent, D_1, D_2, D_3 sont strictement plats à l'infini. La convergence de ces intégrales est même nécessaire pour D_1. Pour D_2 et D_3 respectivement on a les conditions nécessaires :

$$\int_1^{\infty} \operatorname{Min}[\delta_1(\rho), \delta_2(\rho)] \frac{d\rho}{\rho} < \infty,$$

$$\int_1^{r} [\delta_1(\rho) - \delta_2(\rho)] \frac{d\rho}{\rho} \text{ reste bornée avec } r \to \infty.$$

4° Soit $I_n = (a_n, b_n)$, $a_n < b_n$, une suite d'intervalles de l'axe imaginaire tels que $\sum_1^\infty \log \frac{b_n}{a_n}$ soit convergente. Soit D_ζ le domaine obtenu en ajoutant à H_ζ des domaines simplement connexes arbitraires du demi-plan complémentaire à H_ζ, sans points communs entre eux et avec $F(H_\zeta)$, et contigus à H_ζ le long des intervalles I_n qu'on supprime de $F(H_\zeta)$. D_ζ est strictement plat à l'infini.

Depuis 1939 M^lle J. Ferrand a amélioré les conditions de M. Ahlfors. *Voir* J. Ferrand [1], [3], [4], [5] et J. Ferrand et J. Dufresnoy [1].

CHAPITRE IV.

LES CONDITIONS D'ORDRE 1.

16. **Remarques générales.** — Dans ce Chapitre et le suivant nous supposerons, à moins de mention expresse, que $F(D_\zeta)$ est une courbe de Jordan C_ζ.

Soit $\zeta = \varphi(z)$ une TC de D_ζ sur C-U. Une représentation paramétrique de C_ζ en résulte par la formule

$$\zeta = \varphi(e^{i\theta}), \tag{1}$$

c'est une représentation au moyen d'un *paramètre* dit *conforme*.

Les considérations analysées dans ce Chapitre peuvent être caractérisées par la question : jusqu'à quel point peut-on considérer le paramètre conforme comme le *meilleur* paramètre de C_ζ? D'une manière plus précise, si une représentation paramétrique de C_ζ donnée possède certaines propriétés de continuité, dérivabilité, etc., peut-on dire que la représentation paramétrique (6), par le paramètre conforme, aura des propriétés semblables ou du moins approchantes?

Le premier énoncé dans cette direction remonte à Painlevé [1], 1891 : $\varphi(z)$ possède une dérivée $n^{\text{ième}}$ $\varphi^{(n)}(z)$ continue sur un arc de C_ζ si C_ζ possède une représentation paramétrique dérivable $(n+2)$ fois continuement sur cet arc.

(6) Naturellement le théorème de Schwarz d'après lequel $\varphi(z)$ est analytique sur un arc analytique est aussi un théorème de même nature.

Dans ce Chapitre nous nous bornerons aux conditions d'ordre 1, c'est-à-dire que nous supposerons, pour le cas d'un point unique (conditions locales), l'existence d'une tangente ou de deux demi-tangentes, la continuité de la tangente étant précisée de différentes manières; dans le cas d'un arc (conditions globales), l'existence de la tangente partout ou presque partout sur cet arc, sa continuité étant caractérisée par une condition de Lipschitz générale. Dans ce cas on sait, depuis Kellog [1], 1912, que le paramètre conforme n'est pas strictement le *meilleur*. Il suffit en effet de considérer la TC par $\zeta = z \log z$ d'un demi-cercle $|z| < \rho$, $0 < \arg z < \pi$, pour ρ assez petit, sur un domaine dont la frontière a une tangente à l'origine, la dérivée y devient infinie. Dans un sens suffisamment affaibli on peut quand même dire que le paramètre conforme appartient aux meilleurs paramètres de C_ζ (Warschawski [2], *voir* le théorème III du n° 18).

Les problèmes traités moyennant des hypothèses d'ordre 1, se rapportent généralement à la convergence totale vers le point considéré. Par exemple :

1° Ceux de la conformité relative et absolue pour la convergence totale;

2° Celui, important pour les applications, relatif à l'existence d'un *sommet conforme* (Ostrowski [1], p. 234, implicitement chez Lichtenstein [1]). On dit que D_ζ présente en ζ_0 un *sommet conforme*, si le quotient $\left|\dfrac{\zeta - \zeta_0}{(z - z_0)^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right|$ reste compris entre deux constantes positives finies lorsque dans D_ζ $\zeta \rightarrow \zeta_0$, ζ_0 image de $z_0 = e^{i\theta_0}$, C_ζ présentant en ζ_0 un intervalle des directions d'ouverture α et possédant deux demi-tangentes en ζ_0;

3° Celui de la correspondance d'ensembles de mesure nulle sur la courbe rectifiable C_ζ et sur K-U.

4° Celui de la recherche des conditions pour que $\varphi'(z)$ satisfasse uniformément à une condition de Lipschitz sur un arc de C_ζ.

Dans les questions concernant un point individualisé fixe où les deux demi-tangentes existent, nous supposerons qu'elles sont dans le prolongement l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'il existe en ζ_0 une tangente, ce qui s'obtient à l'aide de transformation auxiliaire

$w = \left(\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\zeta_1}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$ sauf si ζ_0 est un point de rebroussement, cas que nous considérons à part au n° 20.

17. Conformité relative. — Si C_ζ possède en ζ_0 deux demi-tangentes, la TC de D_ζ sur C-U est orientée en ζ_0, pour une convergence angulaire, sauf si ζ_0 est un point de rebroussement de C_ζ (Carathéodory [1]).

Une autre démonstration plus simple de ce fait, aujourd'hui classique, a été donnée par Lindeloef [1], p. 85-87, 1916, et est reproduite dans Carathéodory [3].

La question de la conformité relative pour une convergence totale est résolue par le théorème suivant :

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que la* TC *de* D_ζ *sur* C-U *soit relativement conforme en* ζ_0 *pour une convergence totale est que* C_ζ *possède en* ζ_0 *une tangente*-L.

La suffisance de la condition I a été donnée par Lindeloef [1], p. 87, qui la déduit du théorème II ci-dessous. La démonstration de sa nécessité est due à Warschawski [6], p. 315.

On déduit aisément de I le fait correspondant pour la convergence latérale.

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la* TC *de* D_ζ *sur* C-U *soit relativement conforme en* ζ_0 *pour une convergence latérale est que la partie correspondante de* C_ζ *aboutissant en* ζ_0 *y possède une tangente*-L (Ostrowski [4]).

II. Théorème de Lindeloef. — *Si* C_ζ *possède en* ζ_0 *une tangente*-L, arg $f'(\zeta)$ *converge vers une limite, facile à exprimer en fonction de l'angle de la tangente avec une direction fixe, lorsque* $\zeta \to \zeta_0$, *image de* z_0 (Lindeloef [1], p. 87-90; une autre démonstration dans Ostrowski [4]).

Il résulte de II que ce théorème reste encore vrai pour la convergence latérale, si seulement *un* des arcs de C_ζ aboutissant en ζ_0 y possède une tangente-L.

Un autre corollaire de II, facilement déduit, est que arg $f'(\zeta)$ reste continu sur un arc de C_ζ où la tangente varie d'une manière continue (Warschawski [2], p. 406).

On trouve dans Gross [2], 1919, et Ostrowski [4], 1935, des extensions des théorèmes cités aux n^{os} **6** et **7** relatifs au cas où C_ζ possède en ζ_0 des supports-limite à droite et à gauche.

Désignons par C_ζ^+ et C_ζ^- les deux arcs de C_ζ qui se raccordent en ζ_0, images respectives des arcs $|z|=1$, $\arg z > \theta_0$, $|z|=1$, $\arg z < \theta_0$. Soient $2k_+$ et $2k_-$ les angles d'oscillation des supports-limite de C_ζ^+ et de C_ζ^- et h_+, h_- les angles des bissectrices des angles d'oscillation en ζ_0 à droite et à gauche avec une direction fixe, les déterminations de ces angles étant choisies de manière à rester continus dans le voisinage total de ζ_0 dans D_ζ. Posons $\gamma = h_+ - h_-$.

III. *Si* $z \succ\!\!\to z_0$, *on a*

$$\frac{\varphi'(z)}{\dfrac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}} = \frac{\gamma}{\pi} + 2\frac{\theta}{\pi}\left(\frac{k_+}{1-\sin\psi} + \frac{k_-}{1+\sin\psi}\right) + \varepsilon(z-z_0),$$

où

$$|\theta| \leq 1, \quad \psi = \arg(1 - ze^{-i\theta_0}), \quad \varepsilon(z-z_0) \to 0$$

(Ostrowski [4], p. 168).

Ce théorème est une extension du théorème de la distorsion à la frontière; les trois théorèmes suivants sont des extensions de ses corollaires.

IV. *Sous les hypothèses de* III *et en supposant* $\gamma > 2(k_+ + k_-)$ *on a*

$$\left|\arg\varphi'(z) - \arg\frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}\right| \leq \arcsin\left[\frac{2}{\gamma}\left(\frac{k_+}{1-\sin\psi} + \frac{k_-}{1+\sin\psi}\right)\right] + \varepsilon(z-z_0),$$

où $\varepsilon(z-z_0)$ *tend vers zéro de telle sorte que* $\psi = \arg(1-ze^{-i\theta_0})$ *reste dans le domaine défini par*

$$\gamma \geq \frac{2k_+}{1-\sin\psi} + \frac{2k_-}{1+\sin\psi} + \delta \qquad (\delta > 0).$$

(Ostrowski [4], p. 171).

IV'. *Sous les hypothèses de* III, *posons*

$$P_1(z) = \frac{k_+ + k_-}{2} - \frac{k_+ - k_-}{\pi}\arg(1 - ze^{-i\theta_0}),$$

alors on a

$$\arg\frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}=\left(\frac{\gamma}{\pi}-1\right)\arg(z-z_0)+\theta P_1(z)+\frac{3h_--h_+}{2}-\frac{\gamma}{\pi}\theta_0,\ \varepsilon(z-z_0),$$

où $|\theta|\leqq 1$ *et* $\varepsilon(z-z_0)\to 0$ *lorsque* $z \succ\!\!\to z_0$ *de l'intérieur de* C-U (en principe dans Gross [1], p. 278, *cf.* Ostrowski [4], p. 172).

On trouve dans Warschawski [7] une généralisation de IV′ se rapportant à IV′ comme la tangente-W se rapporte à la tangente ordinaire.

V. *Sous les hypothèses de* III, *on a lorsque* $z \succ\!\!\to z_0$

$$\overline{\lim}\left|\frac{\log|z-z_0|}{\log|\zeta-\zeta_0|}-\frac{\gamma}{\pi}\right|\leqq\frac{k_+-k_-}{\pi}.$$

(Gross [2], p. 60, Ostrowski [4], p. 175).

On peut ajouter à ces résultats le théorème suivant :

VI. D_ζ *est strictement plat à l'infini s'il existe une suite de points* z_n *de* H_z *avec*

$$\frac{1}{K}\leqq\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<K,\qquad |\arg z_n|\leqq\frac{\pi}{2}-\delta,$$

K *et* δ *étant positifs quelconques, telle que la suite des nombres* $\frac{\zeta_n}{z_n}$ (ζ_n image de z_n), *converge vers une limite fixe, différente de* 0 (Ostrowski [8], p. 412).

18. Tangente continue. Sommet conforme. Conformité absolue totale (latérale). — Les conditions très générales dues à Warschawski [2], pour que D_ζ présente en ζ_0 de C_ζ un sommet conforme, sont contenues dans les théorèmes III et IV du n° 14. Le théorème III fournit une condition suffisante très générale, le théorème IV combiné à III, une condition nécessaire et suffisante pour une classe de domaines particuliers.

Une notion un peu plus spéciale que celle de sommet conforme a été introduite par Ostrowski [1], p. 245. On dit que D_ζ présente en un point frontière ζ_0 un *sommet conforme généralisé* si D_ζ est compris entre deux domaines $D_\zeta^{(i)}$ et $D_\zeta^{(e)}$ dont les frontières sont tangentes à C_ζ en ζ_0 et pour chacun desquels ζ_0 est un sommet conforme.

La liaison entre cette notion et celle de sommet conforme a été mise au clair par Warschawski [2] :

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que* D_ζ *possédant en* ζ_0 *un sommet conforme généralisé y possède un sommet conforme est que* C_ζ *soit linéairement ac. en* ζ_0 (Warschawski [2], p. 384.)

Entre le sommet conforme et la conformité absolue totale on a la liaison suivante :

II. *Supposons que pour une entaille* L *de* D_ζ *aboutissant en* ζ_0 *et dont les directions des supports-limite sont contenues dans l'intervalle des directions de* ζ_0 *en* D_ζ, *la limite, pour* ζ *tendant vers* ζ_0 *le long de* L, *de* $\frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}$ *existe et diffère de* o *et* ∞. *La condition nécessaire et suffisante pour que la limite de* $\frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}$ $(z \to z_0)$ *existe, est que* C_ζ *soit régulièrement ac. en* ζ_0 (Warschawski [2], p. 376, *cf.* aussi Warschawski [4] et Ostrowski [3]. Comparer avec la dernière partie du théoreme III, n° 14).

Pour le cas des courbes frontières *rectifiables*. on a des énoncés plus explicites. Si C_ζ est rectifiable elle possède une représentation paramétrique par l'arc s de C_ζ. Soit P_s, $\zeta = \zeta(s)$ un point de C_ζ, désignons par $r(s)$ la distance de P_s à $\zeta_0 = \zeta(s_0)$. Posons $s_0 = 0$. La dérivée $\zeta' = e^{i\theta(s)}$ $[\xi'_s = \cos\theta(s),\ \eta'_s = \sin\theta(s)]$, existe presque partout sur C_ζ, $\theta(s)$ désignant l'angle de la tangente avec l'axe réel positif. Soient θ_+ et θ_- les angles respectifs des demi-tangentes de droite et de gauche en ζ_0 à C_ζ.

III. *Si* $\int_0^{\pm\delta} \left| \frac{\cos\theta(s) - \cos\theta_\pm}{s} \right| ds$, $(\delta > 0)$ *convergent et que le quotient* $\frac{r(s)}{|s|}$ *reste compris entre deux constantes positives,* C_ζ *possède en* ζ_0 *un sommet conforme. Si même* $\lim \frac{r(s)}{|s|}$ *existe et est différente de zéro, la limite de* $\frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0}$ *existe pour la convergence totale* (Warschawski [2], p. 427).

Pour des conditions plus particulières $\theta(s) - \theta_0 = o(s^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ ce résultat est contenu dans un Mémoire de Bessonoff et Lavrentieff [1].

IV. *Supposons que* C_ζ *possède dans un voisinage de* ζ_0 *une tangente continue. Supposons de plus que les intégrales*

$$\int_0^\varepsilon |\zeta'(s\pm\sigma)-\zeta'(s)|\frac{d\sigma}{|\sigma|}$$

convergent, pour un certain $\varepsilon > 0$, *uniformément pour tout* s *d'un certain voisinage de* $s_0 = 0$, *alors la limite totale de* $\varphi'(z)$ *existe et est continue et différente de zéro, dans un certain voisinage de* z_0 (Warschawski [2], p. 433).

Pour spécifier le caractère de continuité de la tangente le long d'une courbe rectifiable, on introduit une condition de Lipschitz. Considérons un intervalle de s, $<-\delta, \delta>$, et supposons que l'on ait, dans cet intervalle

$$(1) \qquad |\theta(s)-\theta_+|\leqq\omega(s)\ (s>0), \qquad |\theta(s)-\theta_-|\leqq\omega(|s|)\ (s<0),$$

où $\omega(\sigma)$ est une fonction positive convergeant monotonement vers zéro pour $\sigma \downarrow 0$. $\omega(\sigma)$ est le *module de Lipschitz* pour $\theta(\sigma)$ en $\sigma = 0$. Soit $L[\omega(\sigma)]$ la famille de toutes les courbes rectifiables satisfaisant à (1) :

V. *La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les courbes de la classe* $L[\omega(s)]$ *possèdent au point* P_0 *considéré un sommet conforme est que l'intégrale*

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma \qquad (\varepsilon > 0)$$

converge (Warschawski [2], p. 443).

VI. Théorème de Kellog-Warschawski. — *Supposons que* C_ζ *possède le long d'un arc* c *une tangente continue. Soit* c' *un arc intérieur à* c *et* γ' *son image sur* K-U. *Pour que* $\varphi'(z)$ *et* $f'(\zeta)$ *soient continues sur* γ' *et* c' *et y satisfassent à une condition de Lipschitz* L_α

$$|\varphi'(e^{i\theta})-\varphi'(e^{i\theta_1})|<K|\theta-\theta_1|^\alpha,$$
$$|f'(\zeta)\ -f'(\zeta_1)|\ <K|\zeta-\zeta_1|^\alpha,$$

$0<\alpha<1$, $K>0$ *fixe, il est nécessaire et suffisant que l'on ait sur* c'

$$|\theta(s)-\theta(s_1)|<K_1|s-s_1|^\alpha$$

avec le même α (Kellog [1] pour la suffisance, Warschawski [2], p. 447, pour la nécessité).

Enfin les théorèmes suivants :

VII. *Si* C_ζ *possède partout une tangente continue, pour chaque* $p > 0$ *les intégrales*

$$\int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta})|^p \, d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\varphi'(re^{i\theta})|^p}$$

sont des fonctions de r uniformément bornées pour tout $r < 1$ (Warschawski [1], p. 362).

VIII. *Si* C_ζ *possède partout une tangente continue, on a, en désignant par* δ *la longueur d'un arc quelconque de* C_ζ *et par d la longueur de l'arc correspondant de* K-U :

$$K_1(\varepsilon)\, d^{1+\varepsilon} < \delta < K_2(\varepsilon)\, d^{1-\varepsilon}$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, $K_1(\varepsilon)$, $K_2(\varepsilon)$ *ne dépendant pas de* δ *et d* (Lavrentieff [1], [2]).

19. **Courbes rectifiables. Propriétés globales des TC.** — Dans ce numéro D_ζ sera un domaine jordanien limité par une courbe rectifiable de longueur finie L. $\zeta = \varphi(z)$ sera la TC de D_ζ sur C U. L'intégrale

$$L_r = \int_0^{2\pi} r\, |\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta$$

représente la longueur de l'image de $|z| = r$, c'est-à-dire de la courbe de niveau correspondante dans D_ζ ou, ce qui revient au même, la variation totale de $\varphi(z)$ sur la circonférence $|z| = r$. On peut caractériser de tels domaines en étudiant la longueur minima des polygones intérieurs à D_ζ et suffisamment approchés de $F(D_\zeta)$ (Seidel [1]).

Nous énonçons les résultats acquis sur ce sujet sans tenir compte strictement de l'ordre chronologique. Ces résultats ne sont pas tous *indépendants*, en ce sens que plusieurs d'entre eux sont corollaires des autres, suivant que l'on considère comme immédiates certaines notions ou certains modes de raisonnement.

I. *Pour* $r \uparrow 1$, L_r *croît monotonement vers* L. (Bieberbach [1], une autre démonstration dans Seidel [1]).

II. $\varphi'(z)$ *possède presque partout sur* K-U *des valeurs limites angulaires, que nous désignerons par* $\varphi'(e^{i\theta})$, *pour lesquelles même*

$$\int_0^{2\pi} \log |\varphi'(e^{i\theta})| \, d\theta$$

existe. Donc $\varphi'(z)$ *ne disparaît au plus que sur un ensemble de mesure nulle sur* K-U (F. Riesz [1]).

Bien que l'intégrale des valeurs limites de $\log|\varphi'(z)|$ existe, la fonction harmonique $\log|\varphi'(z)|$ n'est pas représentable nécessairement, sous les conditions de II, par l'intégrale de Poisson. (Keldych et Lavrentieff [1], [2], p. 15 25). Les domaines pour lesquels cette représentation est possible jouent un rôle particulier dans maints problèmes, surtout ceux concernant les systèmes de polynomes orthogonaux. A ceux-là appartiennent, par exemple, les domaines dont il est question dans la deuxième partie du théorème VII du n° 19, ainsi que les domaines appartenant à la classe $R(m, \infty)$ au sens du n° 21. (Keldych et Lavrentieff [2], p. 13-15, Lavrentieff [3], p. 840-844).

III. *Désignons par* $\Phi(\theta)$ *la fonction limite sur* K-U *de* $\varphi(z)$ *pour une convergence totale* ($\theta = \arg z$ sur K-U), $\Phi(\theta)$ *est une fonction absolument continue pour laquelle on a presque partout* $\Phi'(\theta) = \varphi'(e^{i\theta})$. *La variation totale* L *de* $\Phi(\theta)$ *est égale à*

$$L = \int_0^{2\pi} |\varphi'(e^{i\theta})| \, d\theta$$

(F. Riesz [1]).

Donc le paramètre conforme θ est dans ce cas le *meilleur* des paramètres de C_ζ, en ce sens que les expressions paramétriques de C_ζ par θ ne sont pas seulement à variation bornée mais aussi absolument continues.

IV. *On a, pour* $r \uparrow 1$,

$$\int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{i\theta}) - \varphi'(e^{i\theta})| \, d\theta \to 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire que pour $r \uparrow 1$, *la variation totale de* $\varphi(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})$ *tend vers zéro. D'autre part, comme conséquence de* (1) *on a*

$$(2) \qquad \int_{M} |\varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta \to \int_{M} |\varphi'(e^{i\theta})|\, d\theta,$$

où M *est un ensemble de* θ *mesurable, quelconque* (F. Riesz [1]).

V. *Un ensemble de mesure nulle* (7) *sur* C_ζ *correspond à un ensemble de mesure nulle sur* K-U *et réciproquement* (F. et M. Riesz [1], 1916, indépendamment par Lusin et Privaloff dans Privaloff [1], 1919, p. 24-36; Lusin [1], 1919; Lusin et Privaloff [1], 1925, p. 156-157; Privaloff [2], 1924, p. 83-85).

Golubev [1] construit un domaine D_ζ à frontière de longueur infinie telle que dans la TC de D_ζ sur C-U, l'image d'un ensemble de points de $F(D_\zeta)$ de longueur finie positive, soit un ensemble de mesure nulle sur la périphérie de C-U.

La démonstration de V due à Lusin-Privaloff fait usage du résultat suivant de Lusin qui représente en quelque sorte une précision du théorème classique de Fatou sur les valeurs limites angulaires des fonctions holomorphes et bornées dans C-U.

VI. *Soit* E *un ensemble de mesure nulle sur* K-U *dans le plan des* z, *alors il existe une fonction* $f_E(z)$ *holomorphe et uniformément bornée dans* C-U, *telle que sur aucune entaille aboutissant en un point de* E *elle n'ait de limite déterminée* (Lusin dans Privaloff [1], p. 25-33; Lusin et Privaloff [1], p. 157-159).

Une précision quantitative de V est donnée par le théorème :

VII. *Si* D_ζ *contient* $|\zeta| < \rho$ *à son intérieur, alors à un ensemble de points de* C_ζ *de mesure* ε, *correspond sur* K-U *un ensemble de mesure* $< \dfrac{KL}{\left|\log \frac{\varepsilon}{\rho}\right| + 1}$ *où* K *est une constante absolue. Si de plus pour un* $p > 0$ *le quotient des longueurs de tout arc* γ *de* C_ζ *au diamètre de* γ *est inférieur à* p, *la borne ci-dessus est remplacée*

(7) Un ensemble de points d'une ligne rectifiable qui peut être enfermé dans un ensemble d'intervalles de longueur totale arbitrairement petite, est un ensemble de *mesure nulle sur cette ligne*.

par $2\pi\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^{\delta}$ *où* δ *ne dépend que de* p (Lavrentieff [4], [3], p. 838-839; Keldych et Lavrentieff [2], p. 9-11).

Ces théorèmes subsistent dans le cas où $F(D_\zeta)$ contient un arc σ rectifiable formé de points iac. d'un seul côté, si l'on se borne à un arc fermé contenu à l'intérieur de σ.

Généralisant et développant un résultat de Bieberbach [1] sur les courbes qui diffèrent peu d'un cercle, Warschawski obtient le théorème suivant :

VIII. *Soit donnée une suite* $\{D_\zeta^{(\nu)}\}$ *de domaines limités par des courbes rectifiables* $C_\zeta^{(\nu)}$ *de longueurs respectives* λ_ν *convergeant faiblement vers un domaine* D_ζ *limité par une courbe rectifiable* C_ζ *de longueur* λ (8). *Supposons que* $\lambda_\nu \to \lambda$. *Soient* $\zeta = \varphi_\nu(z)$, $\zeta = \varphi(z)$ *les* TC *de* $D_\zeta^{(\nu)}$ *et* D_ζ *sur* C-U, *normées par* $\varphi_\nu(0) = \varphi(0)$ *pour tout* ν *et* $\varphi'_\nu(0) > 0$, $\varphi'(0) > 0$. *Alors, on a uniformément, pour* $0 < r < 1$

$$\lim_{\nu \to \infty} \int_0^{2\pi} |\varphi'_\nu(re^{i\theta}) - \varphi'(re^{i\theta})|\, d\theta = 0, \tag{3}$$

et les fonctions $\varphi_\nu(z)$ *convergent uniformément dans* C-U *vers* $\varphi(z)$ (Warschawski [1], p. 351).

$C_\zeta^{(\nu)}$ étant supposée à tangente continue, Warschawski [1], p. 364, obtient un résultat plus précis que (3) en remplaçant la convergence de λ_ν vers λ par la convergence paramétrique *d'ordre* 1.

Dans ce même ordre d'idées, on trouve dans Markouchevitch [1], p. 876-881, un autre résultat, et dans Warschawski [6] des résultats correspondants à VIII pour les dérivées d'ordre supérieur.

Signalons enfin quelques inégalités très précises se rapportant à la variation de $\varphi(z)$ si la frontière de D_ζ, supposée rectifiable, est déformée, Bieberbach [1], Warschawski [1], Marchenko [1], Markouchevitch [1].

Il y a lieu de remarquer que plusieurs des résultats énoncés dans ce Chapitre et dans le précédent et portant sur des courbes de Jordan comme partie de $F(D_\zeta)$ comportent un caractère *unilatéral*, c'est-à-dire que les conclusions obtenues pour un côté de la courbe en question ne paraissent pas subsister nécessairement pour l'autre

(8) C'est à dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ à partir d'un ν tous les points de toutes les courbes $C^{(\nu)}$ sont situés à distance $< \varepsilon$ de C.

côté. D'autres énoncés, au contraire, comportent un caractère *bilatéral.* Il y aurait évidemment intérêt à considérer de près, à ce point de vue, les énoncés précédents et d'autres qui s'y rattachent.

20. Points de rebroussement. — Pour étudier le comportement d'une TC aux points de rebroussements, il faut introduire un nombre qui mesure le *contact* en ce point. Soient Γ_ζ^+ et Γ_ζ^- deux courbes de Jordan tangentes en ζ_0 et de courbures finies $\varkappa_+$, $\varkappa_-$ en ζ_0. On pourvoit les nombres $\varkappa_+$, $\varkappa_-$ d'un même signe ou de signes différents suivant que le point de rebroussement est de seconde ou de première espèce.

La quantité $\varkappa = |\varkappa_+ - \varkappa_-|$ est la *mesure du contact* (Beruehrungsmass) de Γ_ζ^+ et Γ_ζ^- en ζ_0, Ostrowski [2]. Par rapport aux TC des voisinages de ζ_0, $z = F(\zeta)$, cette quantité est un invariant relatif, elle est multipliée par $\frac{1}{|F'(\zeta_0)|}$ (Ostrowski [2]).

On a alors le théorème :

I. *Soit* Γ *une entaille de* D_ζ *aboutissant en* ζ_0 *et dont les mesures du contact avec* Γ_ζ^+ et Γ_ζ^- ($F(D_\zeta) = \Gamma_\zeta^+ + \Gamma_\zeta^-$), *supposées ac. du même côté que* ζ_0, *sont* $\varkappa'$ *et* $\varkappa''$. *Son image* C *dans* C-U *aboutissant en* z_0, *image de* ζ_0, *a une demi-tangente en* z_0 *qui fait avec les demi-tangentes à* K-U *en* z_0 *des angles dont le rapport est égal à* $\frac{\varkappa'}{\varkappa''}$ (Ostrowski [2].)

Nous avons déjà rencontré aux n^{os} 6 et 7 des théorèmes valables dans le cas où l'indice d'orientation en ζ_0 est nul, c'est-à-dire dans le cas d'un point de rebroussement. Si l'on suppose Γ_ζ^+ et Γ_ζ^- munies en ζ_0 de tangentes-L, on a les résultats suivants :

II. *Si* Γ_ζ^+, Γ_ζ^- *ont en* ζ_0 *des tangentes-*L *on a pour* $z \nrightarrow z_0$, *c désignant une constante :*

$$\arg f'(z) + \arg(z - z_0) \to c,$$

et pour

$$z_1 \nrightarrow z_0, \quad z_2 \nrightarrow z_0,$$

$$\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \sim \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0},$$

$$\frac{\log|f'(z)|}{\log|z - z_0|} \to -1.$$

(Ostrowski [4], p. 184).

CHAPITRE V.

CONDITIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR A 1. CONDITIONS ESSENTIELLEMENT LOCALES.

21. Conditions portant sur l'angle de la tangente. — Reprenons les hypothèses du n° 18, considérons un arc σ de C_ζ rectifiable, possédant en chaque point une tangente ou deux demi-tangentes. Nous supposons qu'il existe une fonction bornée $\Theta(t)$, t étant pris croissant dans le sens de parcours positif sur σ et telle que :

1° Si pour t_0, σ possède une tangente, $\Theta(t)\,(\bmod 2\pi)$ donne l'angle de cette tangente orientée, avec une direction fixe;

2° En tout point anguleux de σ, $\Theta(t)$ possède des limites à droite et à gauche, déterminant $(\bmod 2\pi)$ les directions des demi-tangentes en ce point;

3° En un point anguleux ou de rebroussement, les sauts de $\Theta(t)$ sont en valeur absolue $\leqq \pi$. En un point de rebroussement le saut est égal à $+\pi$ ou $-\pi$ suivant que l'ouverture de l'angle des directions en ce point est o ou 2π;

4° Partout où σ possède une tangente, Θ est continue excepté en un seul point, lorsque σ est une courbe fermée, pour lequel le saut de Θ est de 2π (9).

Nous appellerons la fonction Θ ainsi définie *angle analytique* de la tangente au point de paramètre t (Tangentenrichtungsfunktion) (Ostrowski [5]).

Dans le cas où *toute la courbe* C_ζ possède ces propriétés et que $\Theta(t)$ est à variation bornée, D_ζ est un domaine de la classe considérée par Paatero sous le nom de *domaines à frontières à rotation bornée* (beschraenkter Randdrehung). Paatero [1] a donné de ces domaines une définition n'utilisant que leur intérieur. Si l'on part de cette définition, l'existence de la fonction $\Theta(t)$ est un des principaux objets de la théorie. Plus généralement, un arc σ jouissant

(9) Le fait que le saut est égal à 2π est essentiellement équivalent à la formule d'O. Bonnet pour le cas du plan. Sa démonstration sous des hypothèses suffisamment générales n'a été donnée que récemment par Radon, Watson, Ostrowski. Pour la bibliographie, *voir* Ostrowski [5].

des propriétés ci-dessus est équivalent à ce que Paatero [2] appelle *arc à rotation bornée.*

I. *Soient* σ *un arc à rotation bornée et* s *l'arc correspondant de* K-U. $\varphi'(z)$ *possède presque partout sur* s *une limite totale et* $\varphi''(z)$ *presque partout sur* s *une limite angulaire. Les valeurs de* φ' *forment, convenablement complétées, une fonction à variation bornée* (Paatero [2], p. 8 et 13).

Pour une courbe fermée simple analytique C_ζ, définissons la fonction $\Theta(t)$ correspondante, en fixant une des valeurs de Θ pour $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Désignons respectivement par $m(C)$ et $M(C)$ les bornes inférieure et supérieure de $\Theta(t)$ sur C_ζ. On dit que D_ζ appartient à la classe $R(m, M)$ si, quel que soit un ensemble fermé $E \prec D_\zeta$, il existe dans D_ζ une courbe analytique simple fermée C contenant E à son intérieur et telle que $m \leqq m(C)$ et $M \geqq M(C)$. Un point iac. π_0 de F(D) est dit *accessible par segments,* s'il existe une entaille rectiligne de D aboutissant à π_0.

II. *Si* D_ζ *appartient à la classe* $R(m, \infty)$, $m > -\infty$, *ou à* $R(-\infty, M)$, $M < \infty$, *à l'ensemble des points i. de* $F(D_\zeta)$ *qui ne sont pas iac. angulairement* (par des angles d'ouverture aussi proche de π que l'on veut), *il correspond sur* K-U *un ensemble de mesure nulle. Il existe un domaine jordanien* D_ζ *tel qu'à l'ensemble des points de* $F(D_\zeta)$ *qui sont ac. par segments, il correspond sur* K-U *un ensemble de mesure nulle* (Lavrentieff [4], [3], p. 822, 826-830).

Dans les classes $R(m, M)$ entrent les domaines convexes et étoilés.

III. *Si* D_ζ *est un domaine étoilé, la limite* $\lim\limits_{r \uparrow 1} |\varphi(re^{i\theta})|$ *existe pour tout* θ *et est atteinte monotonement, la limite* ∞ *étant admise.* (Seidel [1], 1931, p. 207). *La limite angulaire de* $\varphi'(re^{i\theta})$ *pour* $r \uparrow 1$ *existe presque partout; la* TC *est isogonale presque partout sur* K-U (Lusin et Privaloff [1], 1925, p. 165-167).

IV. *Si* D_ζ *est un domaine convexe,* $\varphi'(z)$ *et* $\varphi''(z)$ *possèdent presque partout sur* K-U *des limites angulaires.* $|z\varphi'(z)|$ *croît monotonement sur chaque rayon de* C-U *et converge vers une valeur finie ou infinie, supérieure à une constante positive fixe pour toute* K-U (Seidel [1]).

Les domaines considérés en H possèdent encore une autre propriété présentant un certain intérêt. On dit qu'un ensemble de points du plan possède la mesure linéaire $\leqq \varepsilon$ s'il peut être recouvert par un nombre fini de cercles dont la somme des diamètres est $\leqq \varepsilon$. Un tel ensemble possède la mesure linéaire nulle si sa mesure est inférieure à tout nombre positif.

V. *Pour tout domaine* D_ζ *de* II, *à un ensemble de points i. de* $F(D_\zeta)$ *de mesure linéaire nulle correspond un ensemble de points de* K-U *de mesure linéaire nulle.*

Plus précisément, si D_ζ *contient un cercle* $|\zeta - \zeta_0| < \rho$ *à son intérieur,* ζ_0 *correspondant à* $z_0 = 0$, *à un ensemble de points i. de* $F(D_\zeta)$ *de mesure linéaire* $\leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *correspond sur* K-U *un ensemble de mesure linéaire* $\leqq 2\pi\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^\delta$, $\delta > 0$ *ne dépendant que de m ou* M.

VI. *Il existe un domaine jordanien* D_ζ *et un ensemble* E *de points i. de* $F(D_\zeta)$ *de mesure linéaire nulle, tel qu'à* E *corresponde sur* K-U *un ensemble de mesure positive* (Lavrentieff [4], [3], p. 822-826, 830-837).

22. Conditions de Lipschitz d'ordre 1 et généralisations. — L'hypothèse que $\Theta(s)$, fonction de l'arc de C_ζ définie au n° 21, satisfait à la condition de Lipschitz d'ordre 1

$$|\Theta(s+h) - \Theta(s)| \leqq \rho |h| \tag{1}$$

pour une constante ρ fixe positive, entraîne, d'après un théorème de Lebesgue, que $\Theta(s)$ est presque partout dérivable et a une dérivée bornée. Dans le cas où $\Theta'(s)$ est partout continue, il résulte des recherches de Hintikka [1], 1912, que $\varphi'(z)$ reste continue dans $|z| \leqq 1$. Ce résultat est généralisé par le théorème suivant de Seidel :

I. $\varphi(z)$ *possède un coefficient de conformité absolue angulaire uniformément borné en tout point de* K-U, *si* $\Theta(s)$ *satisfait à* (1). *La fonction* φ' *est continue sur* $|z| \leqq 1$, *ses valeurs sur* K-U *forment une fonction absolument continue de l'argument et* $\varphi''(z)$ *reste compris entre deux bornes positives dans* $|z| \leqq 1$. $\varphi''(z)$ *possède presque partout sur* K-U *une limite angulaire* $\psi(\theta)$.

La fonction $|\psi(\theta)|^p$ *est sommable pour tout p positif* (Seidel [1], p. 217-226; pour une autre démonstration très simple de la continuité de $\varphi'(e^{i\theta})$, *cf.* Visser [6]).

II. *L'arc de* C_ζ *comme fonction de l'argument sur* K-U *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* 1 (Seidel [1], p. 229).

Le résultat relatif aux bornes positives de $|\varphi'(z)|$ avait été donné antérieurement par Lavrentieff [1], [2], pour le cas des courbures bornées.

Seidel a obtenu ses résultats en approfondissant la signification géométrique de la condition (1) et en utilisant le théorème V du n° 11 F. G. En faisant surtout usage de divers théorèmes sur la série conjuguée d'une série de Fourier, Smirnoff a considérablement généralisé I, remplaçant l'hypothèse de Seidel par celle où pour un p positif $\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^p$ est sommable.

III. *Supposons que pour un p positif* $\left|\frac{d\theta}{ds}\right|^p$ *soit sommable. Alors* $\varphi'(z)$ *est continue dans* $|z| \leqq 1$ *et absolument continue sur* K-U. $\varphi'(z)$ *reste compris entre deux bornes positives pour* $|z| \leqq 1$, *l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} |\varphi''(re^{i\theta})|^p d\theta$$

est bornée en r pour $r < 1$ *et* $\varphi''(z)$ *possède presque partout sur* K-U *des limites angulaires pour lesquelles on a*

$$\lim_{r \to 1} \varphi''(re^{i\theta}) = \frac{d\varphi'(e^{i\theta})}{de^{i\theta}}$$

(Smirnoff [1], p. 322).

23. **Conditions d'ordre** $n > 2$. — Le premier théorème suffisamment général et précis dans cette direction est dû à Kellog [1] qui l'a démontré en utilisant la théorie du potentiel et surtout la théorie des équations intégrales (noyaux itérés de Fredholm).

I. *Supposons que* $\Theta^{(n-1)}(s)$ *satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre* α, $0 < \alpha < 1$:

$$|\Theta^{(n-1)}(s+h) - \Theta^{(n-1)}(s)| < k\,|h|^\alpha,$$

k étant une constante positive. Alors $\varphi^{(n)}(z)$ *est continue sur* $|z| \leqq 1$ *et satisfait sur* K-U *à une condition de Lipschitz du même ordre* α

$$|\varphi^{(n)}(e^{i\theta_1}) - \varphi^{(n)}(e^{i\theta_2})| < K|\theta_1 - \theta_2|^\alpha,$$

où K *est une constante positive. Enfin* $|\varphi'(z)|$ *est dans* $|z| \leqq 1$ *comprise entre deux bornes positives.* (Kellog [1], une autre démonstration a été donnée par Warschawski [3], qui utilise les méthodes plus *pures* de la théorie des fonctions ainsi qu'un théorème de Privaloff sur la série conjuguée d'une série de Fourier.)

I ne reste plus vrai si $\alpha = 1$. Dans ce cas la condition se réduit à : $\Theta^{(n)}(s)$ existe presque partout et est uniformément bornée. Alors $\varphi^{(n+1)}(z)$ bien qu'elle existe presque partout, comme nous allons le voir, n'est plus nécessairement bornée. Le résultat de Seidel que nous allons énoncer contient une propriété de $\varphi^{(n+1)}(z)$ qui remplace ici l'existence d'une borne supérieure.

II. *Supposons que* $\Theta(s), \ldots, \Theta^{(n-1)}(s)$ *soient absolument continues, tandis que* $\Theta^{(n)}(s)$ *existe presque partout et que pour un* $p > 1$, $|\Theta^{(n)}(s)|^p$ *soit sommable, alors* $\varphi(z), \ldots, \varphi^{(n)}(z)$ *sont absolument continues dans* $|z| \leqq 1$, *tandis que* $\varphi^{(n+1)}(z)$ *possède presque partout une limite angulaire* $\varphi^{(n+1)}(e^{i\theta})$ *pour laquelle* $|\varphi^{(n+1)}(e^{i\theta})|^p$ *est sommable* (Seidel [1], p. 226-232).

Smirnoff [1], p. 313, redémontre II pour $n = 2$ et prouve qu'en outre $\int_0^{2\pi} |\varphi''(re^{i\theta})|^p \, d\theta$ est bornée en r, $r < 1$.

Un résultat plus faible que celui de Seidel, à savoir que si $\Theta^{(n)}(s)$ existe et est bornée sur un arc ouvert de C_ζ, $\varphi^{(n)}(z)$ existe partout sur l'arc correspondant de K-U, a été démontré indépendamment par Holzmann et Lavrentieff [1].

Du reste on montre aisément que, sous les conditions de II, les conditions de I sont satisfaites avec $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$. Il en résulte que sous les conditions de II, $\Theta^{(n)}(s)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $1 - \frac{1}{p}$.

Les hypothèses des théorèmes I et II se rapportent à toute la $F(D_\zeta)$. On voit immédiatement qu'il suffit de faire ces hypothèses pour un arc ac. de Jordan C_0 appartenant à C_ζ. Les conclusions de ces théorèmes restent vraies pour tout arc fermé contenu à l'intérieur de C_0.

Warschawski [6] a établi quelques résultats assez précis sous une condition d'un caractère plus local que celles de I et II. C est dite posséder en un point $s = s_0$ une *courbure*-L *d'ordre n* si $\Theta^{(n-1)}(s)$ existe dans un voisinage de s_0 et qu'on a

$$\frac{1}{s_2 - s_1}[\Theta^{(n-1)}(s_2) - \Theta^{(n-1)}(s_1)] \to \Theta^{(n)}(s_0),$$

s_1 et s_2 convergeant indépendamment l'un de l'autre vers s_0. D'autre part, posons pour un a positif

$$V_n(s, a) = \int_0^a [\Theta^{(n)}(s+t) + \Theta^{(n)}(s-t) - 2\Theta^{(n)}(s)]\frac{dt}{t^2}.$$

III. *a. Si dans le voisinage de $s = s_0$, $\Theta^{(n-1)}(s)$ existe et satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* 1, *et si $\Theta^{(n)}(s_0)$ et $V_{n-1}(s_0, a)$ existent, alors $\varphi^{(n+1)}(z)$ possède une limite radiale au point correspondant de* K-U.

b. Si $\Theta^{(n)}(s)$ existe et reste continue sur un arc ouvert C_0 de C *et si, sur un arc fermé C'_0 contenu dans C_0, $V_{n-1}(s, a)$ existe et converge vers* 0 *uniformément avec $a \downarrow 0$, alors $\varphi^{(n+1)}(z)$ possède des valeurs limites continues à l'intérieur de l'arc γ'_0 de* K-U *correspondant à C'_0. De plus, s possède comme fonction de arg. z, à l'intérieur de γ'_0 une dérivée d'ordre $n+1$ continue.*

*c. Si en un point s de C_0 la courbure-*L *d'ordre n et $V_{n-1}(s, a)$ existent, $\varphi^{(n)}(z)$ est différentiable en z_0 pour $z \rightarrowtail z_0$*. (Warschawski [6]).

24. Conditions essentiellement locales. — L'existence de la courbure L (et celle de la tangente L) remplace dans une certaine mesure la condition de continuité de la dérivée correspondante de $\Theta(s)$ sans supposer que cette dérivée existe dans le voisinage du point considéré s. Mais même dans ce cas il est nécessaire de supposer que les dérivées précédentes existent dans le voisinage de s_0. On doit à Warschawski et Wolff quelques résultats dans lesquels les hypothèses sont strictement locales et applicables aux frontières les plus générales. Le premier résultat dans cette direction a été donné par

Warschawski [5], p. 339-341 et perfectionné dans Warschawski et Wolff [1].

I. *Soit* $\varphi(\eta) \downarrow 0$ *avec* $\eta \uparrow \infty$ *et telle que l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{\varphi(\eta)}{\eta}\,d\eta$ *converge. Soit* D_ζ *un domaine ayant à l'infini un point-frontière ac. le long de l'axe réel positif et tel que* $F(D_\zeta)$ *soit contenu dans le domaine* $|\xi| \leqq \varphi(|\eta|)$, $\zeta = \xi + i\eta$. *Alors si l'on a une* TC *de* D_ζ *sur* H_z *dans laquelle les points à l'infini se correspondent et que* $\frac{\zeta}{z} \to 1$ *avec* $\zeta \to \infty$, *la différence* $\zeta - z$ *converge vers une constante finie imaginaire, si* $z \to \infty$ *dans un demi-plan quelconque* $\Re z > d$, *pour tout* $d > 0$. (Warschawski et Wolff [1]).

Les hypothèses de I sont le pendant des hypothèses sur la *courbure* au point à l'infini lorsque F(D) satisfait aux conditions de différentiabilité. Pour le cas des dérivées d'ordre supérieur quelques énoncés strictement locaux ont été donnés par Warschawski [8]. Ces énoncés se présentent très simplement si l'on fait usage des notions suivantes:

Soient C, C_1 deux arcs de Jordan dans le plan $w = u + iv$ possédant en w_0 une tangente commune. Supposons les axes u, v orientés de telle façon que w_0 soit l'origine et la tangente commune l'axe des v. Supposons que les équations de C et C_1 dans un certain voisinage de l'origine soient respectivement $u = g(v)$, $u = g_1(v)$, $|v| \leqq a$, $a > 0$. Nous dirons alors qu'entre C et C_1 à l'origine il y a une *osculation nette d'ordre n* si l'intégrale $\int_0^a \left|\frac{g - g_1}{v^{n+1}}\right| dv$ converge pour un $a > 0$, convenablement choisi.

Soit, d'autre part, une fonction $F(z)$ définie à l'intérieur d'un domaine D et z_0 un point-frontière iac. angulairement. Nous dirons alors que $F(z)$ possède en z_0 une *représentation asymptotique d'ordre n* pour l'approximation angulaire si l'on peut poser

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu (z - z_0)^\nu + R(z)(z - z_0)^n,$$

où A_ν sont des constantes convenables et $R(z)$ converge vers 0 lorsque $z \succ\!\!\to z_0$.

L'analyse de Warschawski repose sur le théorème suivant :

II. *Soit* D *un domaine jordanien du plan des* ζ *limité par la* *courbe* C *possédant au voisinage d'un point* ζ_0 *une courbure bornée. Si* C *possède en* ζ_0 *une osculation nette d'ordre n avec un arc* Γ *de Jordan analytique au voisinage de* ζ_0, *les fonctions*

$$\zeta = \varphi(z), \qquad z = f(\zeta),$$

effectuant la TC *de* D *sur* C-U *et faisant correspondre* z_0 *à* ζ_0, *possèdent des représentations asymptotiques d'ordre n au voisinage de* z_0 *et* ζ_0. (Warschawski [8], p. 349-350).

De ce résultat son auteur déduit le suivant extrêmement général :

III. *Soit* D *un domaine du plan des* ζ *contenu dans le domaine jordanien* D_* *et contenant le domaine jordanien* D^* *dont les frontières se touchent au point* ζ_0 *et y satisfont toutes les deux aux conditions du théorème* II *avec le même arc analytique* Γ. *Si une* TC *de* D *sur* C-U *effectuée par les fonctions* $\varphi(z)$, $f(\zeta)$ *transforme* ζ_0 *en* z_0, *les fonctions* φ *et* f *possèdent des représentations asymptotiques d'ordre n en* z_0 *et* ζ_0 (Warschawski [8], p. 350-353).

Il est à remarquer que sous les conditions III F(D) ne possède pas nécessairement une tangente au sens ordinaire du mot.

En modifiant un peu les conditions d'osculation nette on peut obtenir aussi quelques conditions suffisantes pour que la représentation asymptotique reste valable même pour certaines approximations tangentielles, comme on le voit pour $n = 2$ par le théorème I (*cf.* Warschawski [8], p. 353-363).

INDEX DES TERMES [10].

[10] Les nombres entre parenthèses renvoient au numéro où est introduit le terme pour la première fois.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE [11].

L. AHLFORS [1], *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen* (*Acta Soc. Sci. Fennicæ*, 2^e^ sér., A, n° 9, 1930, p. 1-40) (12, 12, 14, 15, 15, 15, 15).

P. BESSONOFF et M. LAVRENTIEFF [1], *Sur l'existence de la dérivée limite* (*Bull. Sc. Math. France*, t. 58, 1930, p. 175-198) (18).

L. BIEBERBACH [1], *Ueber die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche* (*Sitz.-Berl. Akad. Berlin*, 1924, p. 181-188) (19, 19, 19).

G. BOULIGAND [1], *Géométrie infinitésimale directe et physique mathématique classique* (*Mém. des Sc. Math.*, fasc. LXXI, 1935) (3).

C. CARATHÉODORY [1], *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen* (*Schwarz Festschrift*, 1914, p. 19-41) (9, 17).

[2] *Ueber die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen* (*Sitzb. Berlin*, 1929, p. 39-54) (9, 13, 13, 13).

[3] *Conformal representation* (*Cambridge Tracts*, t. 28, 1932, p. 1-105) (17).

J. G. VAN DER CORPUT [1], *Ueber die Winkelableitung bei konformer Abbildung* (*Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, t. 35, 1932, p. 330-338) (12, 14, 14).

J. DUFRESNOY et M^lle^ J. FERRAND [1], *Extension d'une inégalité de M. Ahlfors et application au problème de la dérivée angulaire* (*Bull. des Sc. Math.*, 2^e^ sér., t. 59) (15).

M^lle^ J. FERRAND [1], *Sur les conditions d'existence d'une dérivée angulaire dans la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 638) (15).

[2] *Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière* (*Annales Éc. Norm. Supér.*, 1942, p. 43-106) (9, 10, 11).

[3] *Sur les conditions d'existence d'une dérivée angulaire dans la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 507) (15).

[4] *Sur l'inégalité d'Ahlfors et son application au problème de la dérivée angulaire* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1944 (15).

[5] *Extension d'une inégalité de M. Ahlfors* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 220, 1945, p. 873) (15).

[6] *Sur les transformations conformes d'un domaine sur lui-même laissant un bout premier invariant* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1946, p. 189-190) (8).

---

[11] Les nombres entre parenthèses qui suivent le titre des mémoires renvoient aux numéros du texte et ce autant de fois que l'auteur est cité.

C. GATTEGNO [1], *Nouvelle démonstration d'un théorème de M. Ostrowski sur la représentation conforme au voisinage d'un point frontière* (*Bull. des Sc. Math.*, fasc. LXII, 1938, p. 1-10) (9).

[2] *Nouvelle démonstration d'un théorème de M. Ostrowski* (*Proc. Égypt.*, 14, 8, *Phys. Soc.*, 1942) (9).

V. GOLUBEV [1], *Sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme* (en russe) (*Rec. Math. Moscou*, t. 32, 1924, p. 55-57) (§ 19).

B. GROOTENBOER [1], *Over het gedrag van een conforme afbeelding bij een Rand punkt* (*Thèse*, Utrecht, 1932, p. 1-54) (13, 14, 14, 15).

[2] *Sur la représentation conforme des domaines simplement connexes au voisinage des frontières* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, 6. 61, 1933, p. 128-149) (13, 14, 14, 15).

W. GROSS [1], *Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen* (*M. Ztsch.*, t. 2, 1918, p. 242-294) (3).

[2] *Zum Verhalten der konformen Abbildung am Rande* (*M. Ztsch.*, t. 3, 1919, p. 43-64) (7, 17, 17, 17).

A. VAN HASELEN [1], *Sur la représentation conforme* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 35, 1932, p. 867 869) (13).

E. A. HINTIKKA [1], *Ueber das Verhalten der Abbildungsfunktion auf dem Rande des Bereiches in der konformen Abbildung* (*Thèse*, Helsingfors, 1912, VIII + 36 pages) (22).

W. HOLZMANN et M. LAVRENTIEFF [1], *Sur l'existence des dérivées limites* (*Rec. Math. Moscou*, t. 38, 1931, p. 51-58) (23).

M. KELDYCH et M. LAVRENTIEFF [1], *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. I, 1935, p. 85-88) (19).

[2] *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables* (*Ann. Éc. Norm. Supér.*, 3e sér., t. 54, 1935, p. 1-38) (19, 19, 19).

O. D. KELLOG [1], *Harmonic functions and Green's integral* (*Trans. A. M. S.*, t. 13, 1912, p. 109-132) (16, 18, 23, 23).

M. LAVRENTIEFF [1], *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 84, 1927, p. 1407-1409) (18, 22).

[2] *Sur la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme* (*Rec. Math. Moscou*, t. 36, 1929, p. 112-115) (18, 22).

[3] *Sur quelques problèmes concernant les fonctions univalentes sur la frontière* (en russe) (*Rec. Math. Moscou*, t. 43, 1936, p. 816-846) (19, 19, 21, 21).

[4] *Sur quelques propriétés des fonctions univalentes* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. I, 1935, p. 1-4) (19, 19, 21, 21).

M. LAVRENTIEFF et P. BESSONOFF (*voir* P. BESSONOFF et M. LAVRENTIEFF).

M. LAVRENTIEFF et M. KELDYCH (*voir* M. KELDYCH et M. LAVRENTIEFF).

M. LAVRENTIEFF et W. HOLZMANN (*voir* W. HOLZMANN et M. LAVRENTIEFF).

L. LICHTENSTEIN [1], *Ueber die konforme Abbildung ebener analytischer Gebiete mit Ecken* (*Journ. für Math.*, t. 140, 1911, p. 100-116) (16).

E. LINDELOEF [1], *Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle* (4e *Congr. des Math. scandinaves*, 1916, p. 59-90) (3, 17, 17, 17).

N. LUSIN [1], *Sur la représentation conforme* (*Ivanovno-Voznesensk, Bull. Inst. Polytech.*, t. 2, 1919, p. 77-80) (19).

N. LUSIN et I. PRIVALOFF [1], *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques* (*Ann. Éc. Norm. Supér.*, 3e sér., t. 42, 1925, p. 143-191) (19, 19, 21).

A. MARCHENKO [1], *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, t. I, 1935, p. 287-290) (19).

A. MARKOUCHEVITCH [1], *Sur la représentation conforme des domaines à frontière variable* (*Rec. Math. Moscou*, 2e sér., t. I, 1936, p. 863 884) (19, 19).

A. OSTROWSKI [1], *Ueber quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen* (*Acta Math.*, t. 53, 1929, p. 181-266) (16, 18).

[2] *Beruehrungsmasse, nullwinklige Kreisbogendreiecke und die Modulfigur* (*Jahr. D. M. V.*, t. 44, 1934, p. 56-75) (20, 20, 20).

[3] *Bemerkung zur vorstehenden Note von Herrn St. Warschawski* (*M. Ztsch.*, t. 38, 1934, p. 684-686) (18).

[4] *Ueber den Habitus der konformen Abbildung am Rande des Abbildungsbereiches* (*Acta Math.*, t. 64, 1935, p. 81-184) (3, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 12, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 20).

[5] *Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente.* I. (*Ueber eine topologische Verschärfung des Rollschen Satzes*) (*Comp. Math.*, t. 2, 1935, p. 26-49) (10, 21, 21).

[6] *Sur la conservation des angles dans la transformation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 726-727) (9).

[7] *Sur la transformation des plis dans la transformation conforme au voisinage d'un point frontière* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 1135-1137) (2, 2, 10, 11, 11).

[8] *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung* (à la mémoire de L. Lichtenstein) (*Prace Mat. Fisycz.*, t. 44, 1936, p. 371-471) (2, 3, 4, 6, 6, 6, 6, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11).

V. PAATERO [1], *Ueber die konforme Abbildung von Gebieten, deren Ränder von beschränkter Drehung sind* (*Ann. Ac. Sc. Fennicæ*, t. 33, n° 9, 1931, p. 1-79) (21).

[2] *Ueber Gebiete von beschränkter Randdrehung* (*Ann. Ac. Sc. Fennicæ*, A, t. 37, n° 9, 1933, p. 1-20) (21, 21).

P. PAINLEVÉ [1], *Sur la théorie de la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1891, p. 653-657) (16).

I. PRIVALOFF [1], *L'intégrale de Cauchy* (en russe) (*Thèse*, Szaratow, 1919, p. 1-96) (19, 19).

[2] *Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques* (*Journ. Éc. Polyt.*, 2e sér., t. 24, 1924, p. 77-112) (19).

I. Privaloff et N. Lusin (*voir* N. Lusin et I. Privaloff).

F. Riesz [1], *Ueber die Randwerte der analytischen Funktionen* (*M. Ztsch.*, t. 18, 1923, p. 87-95) (19, 19, 19).

F. et M. Riesz [1], *Ueber die Randwerte einer analytischen Funktion* (*C. R. du 4e Congr. des math. scandinaves*, 1916, p. 27-44) (19).

M. et F. Riesz (*voir* F. et M. Riesz).

W. Seidel [1], *Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* (*Math. Ann.*, t. 104, 1931, p. 182-243) (19, 19, 21, 21, 22, 22, 23).

V. Smirnoff [1], *Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung* (*Math. Ann.*, t. 107, 1932, p. 313-332) (22, 23).

G. Valiron [1], *Sur un lemme de M. Julia étendant un lemme de Schwarz* (*Bull. Soc. Math.*, 2e série, t. 53, 1929, p. 70-76) (12, 13, 14).

[2] *Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme* (*Bull. Soc. Math.* 2e sér., t. 56, 1932, p. 208-211) (13, 14, 14).

C. Visser [1], *Sur la dérivée angulaire* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931, p. 1388-1389), (14).

[2] *Ueber beschränkte analytische Funktionen und die Randverhältnisse bei konformen Abbildungen* (*Math. Ann.*, t. 107, 1932, p. 28-39) (6, 12, 12).

[3] *Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 924-925) (14).

[4] *Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes.* I (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 38, 1935, p. 402-411) (14).

[5] *Sur la dérivée angulaire des fonctions univalentes.* II (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 40, 1935, p. 223-226) (14, 14).

[6] *Ueber die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 38, 1935, p. 411-414) (22).

S. Warschawski [1], *Ueber einige Konvergenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung* (*Gött. Nach.*, 1930, p. 344-369) (18, 19, 19, 19).

[2] *Ueber das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung* (*M. Ztsch.*, t. 35, 1932, p. 321-456) (1, 1, 3, 10, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18, 18).

[3] *Ueber einen Satz von O. D. Kellog* (*Gött. Nach.*, t. 25, 1932, p. 73-86) (23).

[4] *Bemerkung zu meiner Arbeit : Ueber das Randverhalten der Ableitung.*, (*M. Ztsch.*, t. 38, 1934, p. 669-683) (18).

[5] *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung* (*Comp. Math.*, t. 1, 1934, p. 314-343) (10, 11, 24).

[6] *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping* (*Trans. A. M. S.*, t. 38, 1935, p. 310-340) (17, 19, 23, 23).

[7] *On the preservation of angles at the boundary point in conformal mapping* (*Bull. A. M. S.*, t. 42, 1936, p. 674 680) (17).

[8] *Ueber die Winkelderivierten schlichter Funktionen* (*Comp. Math.*, t. 4, 1937, p. 346-366) (14, 24, 24, 24, 24).

S. Warschawski et J. Wolff [1], *Zum Randverhalten der zweiten Derivierten der Ableitungsfunktion bei konformer Abbildung* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 37, 1934, p. 145-149) (24. 24).

V. Weniaminoff [1], *Sur la dérivée limite d'une fonction analytique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 180, 1925, p. 114-116) (12).

[2] *Sur quelques propriétés de la dérivée limite* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 180, 1925, p. 902-904) (12).

J. Wolff [1], *Sur la dérivée angulaire dans la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 190, 1930, p. 575-576) (13, 13).

[2] *Sur la dérivée angulaire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 191, 1930, p. 921-923) (14).

[3] *Quelques propriétés des fonctions holomorphes dans un demi-plan dont toutes les valeurs sont dans ce demi-plan* (*Proc. Amsterdam*, t. 33, p. 1185-1188) (12, 12, 13).

[4] *Extension d'un théorème de M. Warschawski sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 196, 1933, p. 891-893) (14).

[5] *Sur la représentation conforme des bandes* (*Comp. Math.*, t. 1, 1934, p. 214-222) (11).

[6] *Sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 42-43) (3, 9).

[7] *Démonstration d'un théorème sur la conservation des angles dans la représentation conforme d'un domaine au voisinage d'un point frontière* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 38, 1935, p. 46-50) (3, 9).

[8] *Sur la représentation d'un demi-plan sur un demi plan à une infinité d'incisions circulaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 630 632) (15).

[9] *Sur la représentation conforme d'un demi plan sur un domaine qui en fait partie* (*Proc. Akad. Amsterdam*, t. 33, 1930, p. 1023-1024) (14).

J. Wolff et S. Warschawski (*voir* S. Warschawski et J. Wolff).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

Les conditions d'ordre 1.

CHAPITRE V.

Conditions d'ordre supérieur a 1.
Conditions essentiellement locales.

123984. Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands Augustins.
Dépôt légal imprimeur 1949, n° 496 | Dépôt légal éditeur 1949, n° 244
Achevé d'imprimer le 16 mai 1949.