MÉMORIAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Esquisse d'ensemble de la nomographie

Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 4 (1925)

<http://www.numdam.org/item?id=MSM_1925__4__1_0>

© Gauthier-Villars, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Mémorial des sciences mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CIRM - BIBLIOTHEQUE
N° d'Inventaire L 21348
Date 4/3/93

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), ETC.
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE. AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR :

Henri VILLAT

Correspondant de l'Académie des Sciences de Paris
Professeur à l'Université de Strasbourg.

FASCICULE IV.

Esquisse d'ensemble de la Nomographie

Par MAURICE D'OCAGNE
Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique

C.I.R.M.
Luminy
BIBLIOTHÈQUE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1925

AVERTISSEMENT

La Bibliographie est placée à la fin du fascicule, immédiatement avant la Table des Matières.

Les numéros en caractères gras, figurant entre parenthèses dans le courant du texte, renvoient à cette Bibliographie.

ESQUISSE D'ENSEMBLE

DE LA

NOMOGRAPHIE

Par Maurice d'OCAGNE,

Membre de l'Institut,
Professeur à l'École Polytechnique.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES D'ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES COTÉS.

1. **Définitions.** — Si des éléments géométriques, points ou lignes, considérés sur un plan, dépendent d'un paramètre variable z, ils forment un système simplement infini, ou *système* ∞^1, que l'on peut définir graphiquement en traçant sur le plan un certain nombre de ces éléments, correspondant à une suite discontinue de valeurs de z, mais suffisamment rapprochés pour que l'on puisse insérer mentalement entre eux, à un certain degré d'approximation, ceux qui correspondent aux valeurs intermédiaires de z; c'est là ce qu'on appelle pratiquer une *interpolation à vue*. Les éléments effectivement tracés, à côté de chacun desquels est inscrite la valeur correspondante de z, constituent un *système coté* en z.

En général, les valeurs de z ainsi retenues sont prises en progression arithmétique, la raison de cette progression étant dite l'*échelon* du système (1).

Il va sans dire que l'interpolation à vue est, à la fois, plus facile et

(1) Par suite du resserrement plus ou moins grand de ces éléments dans les diverses parties du système, on peut être amené à prendre des échelons différents dans plusieurs intervalles successifs; on dit que, sur l'élément séparatif de deux de ces intervalles, il y a *césure*. De telles césures se rencontrent sur les échelles logarithmiques des règles à calcul ordinaires.

plus précise lorsqu'il ne s'agit que d'un système non de lignes mais de points cotés. Cette remarque nous conduira par la suite à recourir de préférence, chaque fois que ce sera possible, à de tels systèmes de points plutôt qu'à des systèmes de lignes, celles-ci fussent-elles même droites, sans compter que l'emploi exclusif de points offre des avantages évidents sous le rapport de la simplicité et de la rapidité de la construction; la détermination graphique d'une ligne exige, en effet, la construction d'un nombre plus ou moins grand de points, à tout le moins de deux quand il s'agit de droites; on a donc alors à construire effectivement plusieurs points, au lieu d'un seul, pour chaque valeur de z.

2. Échelles fonctionnelles. — Les systèmes cotés les plus simples sont ceux que constituent des points en ligne droite et que l'on nomme des *échelles fonctionnelles*. Une telle échelle, portée sur l'axe Ox, qui en est dit le *support*, se définit par la formule

$$x = \mu f(z),$$

μ étant ce qu'on appelle le *module*, exprimé au moyen d'une certaine unité métrique, le millimètre par exemple (1).

Les échelles les plus usuelles sont celles qui correspondent aux fonctions z, $\log z$, z^2, $\sin z$, $\operatorname{tang} z$, et, plus particulièrement les deux premières, dites respectivement *métrique* et *logarithmique* (2). De telles échelles portées sur le bord d'une règle servant à leur report constituent ce qu'on appelle des *étalons de graduation*.

Lorsqu'on possède une échelle de $f(z)$, les échelles transformées rationnellement de celle-ci, c'est-à-dire s'appliquant à toute fraction rationnelle en $f(z)$, s'en peuvent déduire par des constructions géométriques simples. En particulier, l'échelle de la fonction

$$F(z) = \frac{mf(z) + n}{pf(z) + q} \qquad (\text{avec } mq - np \neq 0)$$

s'obtient par simple projection de celle de $f(z)$. Aussi l'échelle de $F(z)$ ainsi obtenue est-elle dite *projective* de celle de $f(z)$. Cette

(1) Pour le détail de la construction d'une échelle fonctionnelle, en vue d'atteindre à un certain degré d'approximation, *voir* **21**, n° 2.

(2) L'échelle logarithmique, premier exemple d'échelle fonctionnelle, a été imaginée par Gunter en 1624.

propriété de la projectivité résulte du fait, immédiatement vérifiable, que, si l'on considère, sur les échelles de $f(z)$ et de $F(z)$, les points correspondant aux quatre mêmes valeurs de z, ces deux groupes de quatre points ont même rapport anharmonique.

Il s'ensuit que si trois couples de points, de même cote d'une échelle à l'autre, sont placés sur des droites concourant en un même point S, tous les couples de points correspondants sont alignés sur S.

3. **Systèmes de points cotés plus généraux. Emploi des coordonnées parallèles.** — Le système de points cotés en z le plus général sera défini par l'ensemble de deux équations telles que

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0,$$

mises le plus souvent sous la forme

$$x = f(z), \qquad y = g(z),$$

le support de ce système ayant pour équation celle qui résulte de l'élimination de z entre les deux précédentes. Si, d'ailleurs, les fonctions f et g sont des fractions rationnelles du premier degré en $h(z)$, ayant même dénominateur, le résultat de cette élimination est du premier degré en x et y; autrement dit, le support de l'échelle est une droite sur laquelle l'échelle obtenue est elle-même projective de celle de $h(z)$ et peut, par suite, être construite ainsi qu'il vient d'être dit.

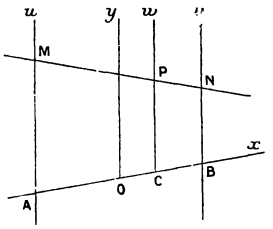
Il peut être avantageux, en certains cas, de définir de tels systèmes de points cotés au moyen non point de leurs coordonnées cartésiennes x et y, mais de leur équation en coordonnées tangentielles u et v dualistiques, c'est-à-dire avec lesquelles tout point ait une équation du premier degré

$$uf(z) + vg(z) + h(z) = 0.$$

Les classiques coordonnées pluckériennes satisfont à cette condition, mais elles offrent, lorsqu'il s'agit de les faire intervenir effectivement dans une construction graphique, l'inconvénient grave de représenter non pas des segments de droite, mais des inverses de tels segments, ce qui est pratiquement une complication considérable. La question se posait donc d'obtenir des coordonnées tangentielles dualistiques constituées *directement* par des segments de droite. Fait

curieux, de telles coordonnées avaient été envisagées dès 1829 par Chasles (**21**, p. 12); mais cette circonstance, à peu près tombée dans l'oubli, était totalement ignorée de l'auteur lorsque, dans son mémoire **16**, il retrouva ces coordonnées en cherchant à satisfaire, en vue de certains besoins nomographiques, au *desideratum* ci-dessus formulé. Étudiées en détail dans la brochure **17** ces coordonnées sont ainsi définies : Au et Bv étant deux axes parallèles, de même sens, dont A et B sont les origines (*fig.* 1), les coordonnées de toute

Fig. 1.



droite MN coupant les axes en M et N sont les segments $AM = u$ et $BN = v$, pris avec leur signe.

A ces axes parallèles nous lierons de façon permanente les axes cartésiens ainsi définis : origine O au milieu de AB; axe Ox confondu avec la droite AB, avec sens positif de O vers B; axe Oy parallèle aux axes Au et Bv avec même sens positif que ceux-ci. Nous conviendrons, en outre, de représenter toujours la longueur AB par 2δ.

Dans un tel système, toute équation du premier degré

$$au + bv + c = 0 \tag{1}$$

représente un point. Si, en effet, nous supposons les points M et N respectivement affectés des poids a et b, nous voyons que les coordonnées x et y du centre de gravité P de ces points sont données, si l'on prend les moments successivement par rapport à Ox et Oy, par

$$\begin{cases} (a+b)x = \delta(b-a), \\ (a+b)y = au + bv = -c, \end{cases} \tag{2}$$

ce qui montre que ce point P est fixe; par suite, l'équation (1) définit ce point dans ce système de coordonnées u et v.

La construction du point P ainsi défini peut s'effectuer de diverses manières :

1° Deux couples de valeurs de u et v satisfaisant à (1) donnent, par report direct des segments u et v sur les axes, deux droites MN qui se coupent en P;

2° Un couple de valeurs de u et v satisfaisant à (1) donne une droite MN sur laquelle P est déterminé par la condition d'être le centre de gravité des poids a et b appliqués en A et B, ce qui montre que ce point divise MN dans le rapport

$$\frac{PM}{PN} = -\frac{b}{a}, \tag{3}$$

ou encore, que la distance x de ce point P au point de rencontre de MN et de Oy est donnée par la première formule (2) ci-dessus, où les segments x et δ sont comptés cette fois sur MN au lieu de AB, où, par suite, δ représente la moitié de MN;

3° Enfin, si l'on préfère en revenir aux coordonnées cartésiennes, celles de P, rapporté aux axes Ox et Oy ci-dessus définis, sont données par les formules (2).

4. Systèmes algébriques de points cotés. Cas des degrés un et deux. — Un système algébrique de degré m de points cotés en z est celui dont l'équation en coordonnées parallèles peut s'écrire

$$Uz^m + Vz^{m-1} + Wz^{m-2} + \ldots + Xz + Y = 0.$$

U, V, W, ..., X, Y étant des polynomes du premier degré en u et v, et il est clair que le support de cette échelle est une courbe du $m^{\text{ième}}$ ordre puisque, à tout couple de valeurs de u et v, correspondent m valeurs de z, et, par suite, que sur toute droite du plan se trouvent m points du système.

Si z_0 représente une valeur particulière de z, le point coté z_0 aura pour équation

$$Uz_0^m + Vz_0^{m-1} + Wz_0^{m-2} + \ldots + Xz_0 + Y = 0.$$

Les u et v des droites unissant ce point coté z_0 à l'un quelconque des points z satisfaisant à la fois à chacune des équations précédentes satisfera encore à celle que l'on obtient en les retranchant, qui, après

suppression du facteur $z - z_0$, peut se mettre sous la forme

$$U' z^{m-1} + V' z^{m-2} + \ldots + X' z + Y' = 0,$$

U', V', ..., X', Y' étant de nouveaux polynomes du premier degré en u et v, dont les coefficients sont des polynomes en z_0.

Cela montre que *le faisceau projetant un système de degré m à partir de l'un quelconque de ses points est également projetant d'un système de degré* $m - 1$, théorème qui permet (et d'une infinité de façons) d'obtenir tout système de degré m par rencontre des rayons correspondants de deux faisceaux projetant des systèmes de degré $m - 1$. De proche en proche, ce théorème ramène donc la construction de tout système algébrique, de degré quelconque, à une suite de projections dont les premières ne portent que sur des systèmes du premier degré, et comme ceux-ci, ainsi qu'on vient déjà de le voir, sont projectifs d'échelles métriques, ce sera donc, à partir de telles échelles, par une construction ne comportant que l'emploi de droites, que l'on parviendra à un système algébrique de points de degré quelconque.

Dans le cas du premier degré, l'équation du système étant écrite

$$U z + V = 0,$$

on voit que l'on a tout simplement une échelle projective d'échelle métrique portée par la droite qui joint les points U et V, d'équations respectives $U = 0$ et $V = 0$, points qui correspondent aux valeurs ∞ et 0 de la cote z. Il suffit dès lors, pour construire projectivement l'échelle, comme il a été dit au n° 2, d'en déterminer un troisième point, par exemple, celui de cote 1, dont l'équation est $U + V = 0$. Remarquons d'ailleurs qu'un seul couple de valeurs de u et v satisfaisant à cette équation, qui fournira une droite passant par ce point, suffira à sa détermination — ou encore, une seule de ses coordonnées x ou y — puisque ce point doit déjà se trouver sur la droite UV.

Si nous passons maintenant au système du deuxième degré le plus général, dont l'équation s'écrit

$$U z^2 + V z + W = 0,$$

nous voyons qu'il a pour support une conique dont nous connaissons immédiatement les deux points $U(z = \infty)$ et $W(z = 0)$.

Remarquons que nous pouvons immédiatement déterminer la tan-

gente en chaque point de cette conique. En effet, les u et v de la tangente au point coté z satisfont à la fois à l'équation précédente et à sa dérivée par rapport à z

$$2\,U z + V = 0,$$

donc aussi à

$$V z + 2W = 0.$$

La première de ces équations montre que la tangente au point $z = 0$, c'est-à-dire en W, passe par le point $V = 0$, et la seconde que la tangente au point $z = \infty$, c'est-à-dire en U, passe par le même point. Autrement dit, les tangentes en U et W au support se coupent en V, ce qui résulte également de l'équation en u et v de ce support

$$V^2 - 4\,UW = 0.$$

L'application du théorème général ci-dessus montre que l'on construira ce système du deuxième degré au moyen de deux faisceaux projetants d'échelles métriques ayant chacun pour centre un point du système. Pour qu'un tel faisceau soit déterminé, il faut en connaître trois rayons, par suite, trois points du système, construits directement. Nous en connaissons déjà deux, savoir les points U et W ; il suffit donc d'en construire un troisième, par exemple le point S de cote 1, dont l'équation est $U + V + W = 0$.

5. **Systèmes de lignes cotées.** — Quand un système de lignes cotées est défini par une équation telle que

$$f(x, y, z) = 0,$$

on peut construire individuellement chacune de ces lignes, par les procédés habituels de la géométrie analytique, en attribuant successivement à z les diverses valeurs retenues pour la cotation; mais il est généralement plus expédient de déterminer en bloc tous les points de rencontre de ces lignes avec une série de droites qui leur soient transverses, points qui constituent sur ces droites certaines échelles, et de réunir ensuite par un trait continu tous les points de même cote appartenant à ces diverses échelles. On rencontre souvent ainsi de sensibles simplifications.

Si, par exemple, l'équation du système est de la forme

$$y = z f(x) + g(x),$$

on voit que, sur chaque parallèle à Oy, les diverses lignes cotées z déterminent une échelle métrique. Il suffit, par conséquent, sur chacune de ces droites, de déterminer les points correspondant à deux valeurs particulières de z, par exemple o et 1, pour avoir immédiatement tous les autres points cotés z. On dit, en ce cas, que les lignes z sont *métriquement espacées* dans le sens de Oy.

Un autre cas où il est évidemment avantageux d'appliquer le procédé des échelles transverses est celui où les lignes z sont des droites, puisque alors deux telles échelles suffisent à déterminer à la fois toutes ces droites.

Lorsque ces droites appartiennent à un faisceau du premier degré, d'équation

$$Uz + V = 0,$$

où U et V sont des polynomes du premier degré en x et y, ces droites, passent toutes par le point de rencontre des droites $U = 0$ et $V = 0$, cotées respectivement $z = \infty$ et $z = 0$, et déterminent sur toute parallèle à la droite U une échelle métrique.

Dans le cas d'un système du deuxième degré défini par l'équation

$$Uz^2 + Vz + W = 0, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} U &= ax + by + c, \\ V &= a'x + b'y + c', \\ W &= a''x + b''y + c'', \end{aligned}$$

on voit, en suivant la voie corrélative de celle qui a servi, au numéro précédent, pour les systèmes de points du deuxième degré, que les points communs à toutes les droites z et à l'une d'entre elles z_0 se trouvent sur les rayons du faisceau du premier degré

$$U(z + z_0) + V = 0; \tag{2}$$

par suite, aussi, sur ceux du faisceau

$$zz_0 U - W = 0, \tag{3}$$

dont l'équation se déduit immédiatement de (1) et (2). Proposons-nous de trouver à quelles conditions toutes les échelles ainsi déterminées par les droites z sur l'une d'entre elles sont métriques, auquel cas le système peut être dit *à recoupements métriques*.

Si, remplaçant U, V, W dans (2) et (3) par leurs valeurs ci-dessus, on pose, d'une manière générale,

$$ab' - a'b = |ab'|, \qquad ab'' - a''b = |ab''|, \qquad \ldots,$$

on transforme, par un calcul facile, le système des équations (2) et (3) en

$$\frac{x}{(|bc'|z_0 + |bc''|)z + |bc''|z_0 + |b'c''|} = \frac{y}{(|ca'|z_0 + |ca''|)z + |ca''|z_0 + |c'a''|} = \frac{1}{(|ab'|z_0 + |ab''|)z + |ab''|z_0 + |a'b''|},$$

d'où l'on déduit que l'échelle sera métrique (c'est-à-dire x et y linéaires en z) si

$$ab' - a'b = 0, \qquad ab'' - a''b = 0,$$

conditions qui ne peuvent être satisfaites que pour $a = b = 0$, car, sans cela, lorsqu'on les écrit

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''},$$

on voit qu'elles entraîneraient le parallélisme de toutes les droites du système qui, par suite, ne se recouperaient pas. D'ailleurs, pour $a = b = 0$, l'équation du système, où l'on peut faire $c = 1$, devient

$$z^2 + Vz + W = 0,$$

et son enveloppe a pour équation

$$V^2 - 4W = 0,$$

c'est-à-dire est une parabole.

6. **Systèmes d'éléments doublement cotés. Eléments condensés. Réseaux de points à deux cotes.** — Il est bien clair *a priori* qu'on ne saurait, en général, figurer de façon permanente sur un plan un système dépendant de deux paramètres z_1, z_2, ou *système* ∞^2 de lignes. En effet, pour chaque valeur attribuée à l'un de ces paramètres, z_2 par exemple, on a un système ∞^1 en z_1, et la coexistence de ces systèmes ∞^1 sur un même graphique est matériellement irréalisable. La seule exception possible correspond au cas où la variation

de z_2 laisse les lignes du système (z_1) géométriquement inaltérées en ne faisant varier que leurs cotes. Cela a lieu lorsque, dans l'expression des coordonnées d'un point du système ∞^2, les paramètres z_1 et z_2 n'entrent que dans une seule fonction $f(z_1, z_2)$, c'est-à-dire où l'on a

$$x = F(f), \qquad y = G(f).$$

Dans ce cas, les systèmes (z_1) correspondant aux diverses valeurs de z_2 se superposent géométriquement; chacune des lignes qui composent ce système *géométriquement* ∞^1 peut être regardée comme provenant de la condensation en une seule d'une infinité de lignes correspondant à autant de couples de valeurs de z_1 et z_2. De telles lignes sont dites *condensées*. On verra plus loin (n° 12) comment on peut définir graphiquement tous les couples de valeurs de z_1 et z_2 correspondant à chacune d'elles. Un système condensé ainsi défini peut être dénoté, comme système ∞^1_2.

Les points de rencontre des lignes d'un tel système avec une ligne quelconque peuvent, de même, être regardés comme des *points condensés à deux cotes*.

Mais les points peuvent donner naissance à des systèmes ∞^2 figurés de façon permanente sur un plan. En effet, les coordonnées d'un point du système s'écrivant

$$x = f(z_1, z_2), \qquad y = g(z_1, z_2),$$

on aura le lieu des points pour lesquels soit la cote z_1, soit la cote z_2 aura une certaine valeur donnée, en éliminant soit z_2, soit z_1 entre les deux équations précédentes, ce qui conduit aux équations

$$F(x, y, z_1) = 0, \qquad G(x, y, z_2) = 0,$$

définissant chacune un système simplement coté, en z_1 d'une part, en z_2 de l'autre, dont l'ensemble, marqué sur le plan, constitue un *réseau de points à deux cotes* z_1 *et* z_2. Le point (z_1, z_2) n'est autre, en effet, que le point commun aux lignes cotées z_1 et z_2 respectivement dans les deux systèmes dont se compose le réseau, ces lignes pouvant, bien entendu, être soit de celles qui sont effectivement tracées, soit de celles que l'interpolation à vue permet d'insérer entre les précédentes.

Dans le cas où le point à deux cotes est défini par son équation en

coordonnées parallèles

$$uf(z_1, z_2) + vg(z_1, z_2) + h(z_1, z_2) = 0,$$

il suffit d'écrire les expressions de ses coordonnées cartésiennes rapportées aux axes Ox et Oy, liés comme on l'a vu aux axes parallèles Au et Bv [formules (2) du n° 3], c'est-à-dire

$$x = \delta \frac{g(z_1, z_2) - f(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2) + g(z_1, z_2)}, \qquad y = \frac{-h(z_1, z_2)}{f(z_1, z_2) + g(z_1, z_2)}$$

pour être ramené au cas précédent.

CHAPITRE II.

NOMOGRAMMES A LIGNES COTÉES.

7. Définitions et notations. Liaison et contact graphiques. — Si, plusieurs systèmes cotés coexistant sur un plan, on établit entre éléments choisis dans chacun d'eux une certaine liaison graphique, celle-ci s'exprime nécessairement par une équation liant les cotes de ces éléments. On a donc ainsi une représentation graphique cotée, ou un *nomogramme*, de cette équation. L'objet propre de la nomographie consiste essentiellement, une équation étant donnée, à en constituer un nomogramme aussi simple que possible, c'est-à-dire sur lequel figurent des éléments de la nature la plus simple, et de la construction la plus facile, entre lesquels soit établie la liaison graphique de la constatation la plus immédiate.

Pour définir un tel mode de liaison graphique, nous conviendrons d'abord d'étendre un peu, au point de vue graphique, le sens du mot « contact » en l'appliquant non seulement dans l'acception ordinaire qu'on lui donne en géométrie, mais encore pour exprimer le fait qu'un point se trouve sur une ligne. En particulier, le parallélisme entre deux droites nous apparaîtra, dès lors, comme un contact graphique, celui d'une des deux droites avec le point à l'infini de l'autre.

Quant à la coïncidence de deux points, elle équivaudra d'après cela à un contact double, savoir celui d'un des deux points avec deux lignes quelconques passant par l'autre. De même pour la coïncidence

de deux droites qui équivaut au contact de l'une avec deux points pris sur l'autre.

La notion de contact étant ainsi élargie, on peut admettre, à titre de postulat, que *les seules liaisons graphiques précises, vérifiables à vue, se réduisent à des constatations de contacts.*

Nous exprimerons le contact entre les éléments E et E′, points ou lignes, par la notation

$$E \mathrel{\text{⊢}} E',$$

qui s'énoncera : E *en contact avec* E′.

La coïncidence de deux points P et P′ étant, d'après ce qui vient d'être dit, équivalente à deux contacts, sera dénotée

$$P \mathrel{\text{⊢⊣}} P',$$

et, de même, la coïncidence de deux droites D et D′,

$$D \mathrel{\text{⊢⊣}} D'.$$

Parfois, nous adjoindrons à la désignation propre de l'élément le nombre des cotes y afférentes, mis entre parenthèses; parfois même, lorsqu'il ne pourra en résulter aucune ambiguïté, nous ne ferons figurer, dans la notation du contact, que les nombres de cotes des éléments y intervenant.

Nous aurons d'ailleurs, le cas échéant, à envisager des éléments isolés, n'appartenant à aucun système, donc dépourvus de cote, qui seront dits *constants* et désignés comme E(o) ou simplement o.

Enfin, lorsque nous aurons à préciser que tel élément est un point, une droite, un cercle, une ligne quelconque, nous le désignerons, plus particulièrement, par l'une des lettres P, D, C, L.

Pour ce qui est de l'écriture des équations représentées, nous aurons systématiquement recours au mode de notation que voici, par nous introduit en nomographie dès l'origine : chaque variable sera désignée par la lettre z affectée d'un indice correspondant : z_1, z_2, z_3, ..., et toute fonction de ces variables sera représentée par une lettre affectée de tous les indices des variables correspondantes.

Nous écrirons donc $f_1, f_2, f_{12}, \ldots, f_{12\ldots n}$, pour $f(z_1), f(z_2), f(z_1, z_2), \ldots, f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ (1).

(1) Il arrivera que nous représenterons aussi des coefficients entrant dans certaines équations par des lettres affectées d'indices, sans qu'il puisse en résulter la moindre confusion.

Nous dirons, en outre, avec M. Soreau (**29**), qu'une équation de la forme

$$f_1 f_2 \dots f_n + g_1 g_2 \dots g_n + \dots = 0,$$

est *nomographiquement rationnelle*, et si, une fois *nomographiquement ordonnée* par rapport à z_1, c'est-à-dire mise sous la forme

$$f_1 f_{23\dots n} + g_1 g_{23\dots n} + \dots = 0,$$

où les fonctions f_1, g_1, ... sont linéairement indépendantes, elle comporte $p_1 + 1$ termes, qu'elle est *d'ordre nomographique* p_1 par rapport à z_1. La somme $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ est l'*ordre nomographique total* de l'équation.

Ainsi l'équation d'ordre nomographique total 3 la plus générale, qui est d'ordre nomographique 1 respectivement par rapport à z_1, z_2, z_3, s'écrira

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0.$$

8. Équations à deux variables. — Dans le cas de deux variables, on voit que les seuls types possibles de nomogramme répondent aux notations

$$E(1) \rightarrowtail E'(1) \quad \text{et} \quad E(2) \rightarrowtail E'(0).$$

Or un E(2) ne peut être qu'un point P(2) qui doit être mis en contact avec une ligne L(0). Le second type se particularise donc nécessairement en

$$P(2) \rightarrowtail L(0).$$

Pour le premier type on peut supposer que les éléments E et E' sont des lignes quelconques. La liaison graphique équivaudra alors au contact géométrique entre les courbes respectivement cotées z_1 et z_2. Mais, il est bien clair (comme on peut, au reste, s'en rendre compte en considérant la ligne L, lieu de ces points de contact, et la déformant pour la rendre droite), que tout nomogramme de ce type peut se réduire à un ensemble de deux échelles fonctionnelles portées de part et d'autre d'un même axe (1).

(1) On peut tout aussi bien, en dédoublant, en quelque sorte, l'axe commun, déplacer les deux échelles l'une par rapport à l'autre dans le sens perpendiculaire à leur direction commune en traçant, de l'une à l'autre, un système de droites perpendiculaires à cette direction, suffisamment rapprochées pour permettre d'établir la correspondance entre les points de ces deux échelles. Le nomogramme est alors à *échelles parallèles*.

Il est dit, pour cette raison, *à échelles accolées*.

Soient $x = \mu f_1$ et $x = \mu f_2$ les équations de ces deux échelles. L'équation représentée sera donc

$$f_1 = f_2.$$

Pour le nomogramme du second type, le réseau des points à deux cotes est évidemment arbitraire, attendu que si l'on se donne de façon quelconque, pour les systèmes (z_1) et (z_2), les équations

$$g_1(x, y, z_1) = 0,$$
$$g_2(x, y, z_2) = 0,$$

les lignes z_1 et z_2 dont les cotes seront liées par une équation quelconque

$$f_{12} = 0$$

se couperont sur une ligne L dont l'équation proviendra de l'élimination de z_1 et z_2 entre les trois dernières équations écrites. On pourra donc, dans tous les cas, définir le réseau (z_1, z_2) au moyen des équations

$$x = \mu_1 z_1, \qquad y = \mu_2 z_2,$$

qui donnent des systèmes de perpendiculaires aux axes, menées par les points d'échelles métriques portées par ces axes. L'équation de la ligne L sera dans ce cas

$$f_{12}\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}\right) = 0.$$

On retombe ainsi sur le procédé classique de représentation de toute loi à deux variables, familier même aux personnes tout à fait étrangères à la géométrie analytique.

9. **Équations à trois variables.** – La liaison graphique entre trois variables ne pourra être réalisée que par un contact $E(1) \rightarrowtail E(2)$. Or un élément $E(2)$ étant nécessairement un point $P(2)$ qui, par ailleurs, ne peut être mis en contact qu'avec une ligne, la notation de tout nomogramme à trois variables ne comportant que des éléments fixes sera donc de la forme

$$P(2) \rightarrowtail L(1).$$

Ainsi, la ligne z_3 passera par le point (z_1, z_2) de rencontre des

lignes z_1 et z_2, ou, ce qui revient au même, *les trois lignes* z_1, z_2, z_3 *concourront en un même point*. Tel est le mode le plus général de représentation d'une équation à trois variables au moyen de trois systèmes cotés sur un plan, sans nul élément extérieur à ce plan.

On remarquera, en outre, que, parmi ces trois systèmes cotés, deux sont arbitraires.

Étant donnée, en effet, l'équation

$$f_{123} = 0,$$

si l'on se donne arbitrairement les systèmes (z_1) et (z_2), d'équations

$$g_1(x, y, z_1) = 0,$$
$$g_2(x, y, z_2) = 0,$$

on obtient l'équation du système (z_3)

$$g_3(x, y, z_3) = 0,$$

en éliminant z_1 et z_2 entre les trois équations précédentes. Déterminer les trois équations (bien entendu, supposées représenter des lignes *réelles*) $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$ pour une équation $f_{123} = 0$ donnée, c'est opérer la *disjonction des variables* que lie cette équation.

On peut d'ailleurs, dans tous les cas, prendre pour systèmes (z_1) et (z_2)

$$x = \mu_1 z_1, \qquad y = \mu_2 z_2,$$

ce qui donne pour (z_3) l'équation

$$f_{123}\left(\frac{x}{\mu_1}, \frac{y}{\mu_2}, z_3\right) = 0.$$

Tel est, bien entendu, le mode de représentation qui s'est présenté tout d'abord à l'esprit des premiers chercheurs dans cette voie, Pouchet notamment (**26**), dont Terquem a fait remarquer l'identité avec la représentation d'une surface rapportée au trièdre trirectangle $Oxyz$ par les projections de ses courbes de niveau sur le plan Oxy, et qui, jusque dans les dernières années du XIX^e^ siècle, a été le seul usité.

Tout nomogramme ainsi constitué ayant l'aspect général d'un damier (en grec ἄβαξ) sur lequel sont tracées les lignes du sys

tème (z_3) a été dit, d'après Lalanne, un *abaque* (¹); nous ajoutons *cartésien*, lorsque, comme ci-dessus, les échelles portées sur Ox et Oy sont métriques.

Il semble, au premier abord, puisque toute équation à trois variables est ainsi représentable, qu'il n'y ait pas lieu d'envisager d'autre choix des équations de disjonction. Mais l'intérêt d'un choix différent apparaît quand on se rend compte qu'il permet, en certains cas, de n'avoir à construire que des lignes plus simples que celles qui devraient être tracées sur l'abaque cartésien.

Par exemple, dans le cas de la multiplication

$$z_1 z_2 = z_3,$$

pour laquelle l'abaque cartésien comporte le tracé d'hyperboles équilatères, si, au lieu de prendre pour (z_1) et (z_2) les perpendiculaires à Ox et Oy correspondant à des échelles métriques, portées sur ces axes, on prend celles que déterminent les échelles logarithmiques

$$x = \mu \log z_1, \qquad y = \mu \log z_2,$$

il vient pour (z_3)

$$x + y = \mu \log z_3,$$

droites d'un tracé immédiat puisqu'on les obtient en joignant les points de même cote pris dans les échelles déjà portées sur Ox et Oy. C'est ainsi que Lalanne a construit son premier abaque à *anamorphose*.

D'une façon plus générale, on peut dire qu'il y a *anamorphose* chaque fois que la disjonction est différente de celle que comporte l'abaque cartésien.

10. Anamorphose rectiligne. Cas des faisceaux de droite parallèles. — Le cas le plus simple, le plus important, tout à la fois, et le plus fréquent, est celui où l'anamorphose permet de construire le nomogramme à lignes concourantes uniquement avec des droites, auquel cas, cette anamorphose, envisagée pour la première fois sous cette forme générale par Massau (**14**), peut être dite *rectiligne*. En ce cas,

(¹) Nous tenons cette étymologie de la bouche même de Lalanne. C'est après que nous avons, dans **18**, étendu ce terme à tout graphique coté représentatif d'une équation, qu'il est, dans cette acception généralisée, devenu d'un usage courant. Le terme de « nomogramme » nous a, depuis lors, paru plus correct.

les équations de disjonction étant de la forme

$$f_1 x + g_1 y + h_1 = 0,$$
$$f_2 x + g_2 y + h_2 = 0,$$
$$f_3 x + g_3 y + h_3 = 0,$$

l'équation représentée n'est autre que

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0.$$

que nous écrirons encore sous la forme condensée

$$|f_i g_i h_i| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La plupart des équations à trois variables rencontrées dans les applications techniques appartiennent à ce type. Elles se présentent généralement d'abord sous la forme

$$f_1 F_{23} + g_1 G_{23} + h_1 H_{23} = 0. \tag{1}$$

Pour y effectuer la disjonction des variables sous la forme voulue, on pose

$$x = \frac{F_{23}}{H_{23}}, \qquad y = \frac{G_{23}}{H_{23}},$$

et l'on élimine successivement z_3 et z_2 entre ces deux dernières équations. Si l'équation est susceptible d'anamorphose rectiligne, le résultat de chacune de ces éliminations est linéaire en x et y.

Une forme d'équation très fréquente rentrant dans ce type est celle qui s'écrit

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0, \tag{2}$$

pour laquelle la disjonction est immédiate par les équations

$$x = \mu_1 f_1, \qquad y = \mu_2 f_2,$$
$$\mu_2 f_3 x + \mu_1 g_3 y + \mu_1 \mu_2 h_3 = 0.$$

Nous n'insistons pas davantage sur ce sujet parce que les équations sus-visées peuvent être représentées suivant un autre mode plus avantageux qui sera étudié plus loin (n° 14) en détail.

Lorsque l'équation donnée se réduit à la forme

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0, \tag{3}$$

la disjonction, si l'on adopte le même module pour les échelles (z_1) et (z_2), en est immédiate par les équations

$$x = \mu f_1, \qquad y = \mu f_2,$$
$$x + y + \mu f_3 = 0.$$

Cette dernière équation définit un faisceau de droites perpendiculaires à la bissectrice Ot de l'angle xOy, sur laquelle elles déterminent l'échelle

$$t = -\frac{\mu}{\sqrt{2}} f_3.$$

Les trois échelles (z_1), (z_2), (z_3) étant ainsi portées respectivement sur Ox, Oy, Ot, si l'on déplace sur le plan un transparent d'orientation constante sur lequel soient tracés trois index I_1, I_2, I_3 respectivement perpendiculaires à Ox, Oy, Ot, ces trois index coïncideront à chaque instant avec trois droites concourantes prises dans les trois systèmes et marqueront, par suite, sur les trois échelles des valeurs de z_1, z_2, z_3 satisfaisant simultanément à l'équation donnée, d'où l'avantage de ramener l'interpolation à vue à n'être pratiquée que sur de simples échelles et non dans des faisceaux.

Cet artifice a été imaginé par divers auteurs, M. Blum notamment (**2**), à propos de certains cas particuliers. M. Lallemand, qui en a eu l'idée de son côté, l'a complété par un autre permettant la construction des trois échelles au moyen du même module et qui consiste à prendre des axes Ox et Oy faisant entre eux un angle de 120°, tout en conservant des coordonnées orthogonales, c'est-à-dire déterminées par les pieds des perpendiculaires abaissées du point qu'il s'agit de définir, sur Ox et Oy.

Dans ce cas, on voit immédiatement que les échelles portées sur Ox, Oy, Ot sont définies respectivement par

$$x = \mu f_1, \qquad y = \mu f_2, \qquad z = -\mu f_3.$$

Les trois index concourants faisant alors entre eux des angles de 60° se confondent avec les diagonales d'un hexagone régulier, d'où le nom d'*hexogonal* donné à un tel abaque.

11. Anamorphose circulaire. Équations quadratiques. — On peut, plus généralement, envisager l'anamorphose dite *circulaire*, qui admet l'emploi non seulement de droites, mais de cercles; bien

que les occasions d'y recourir soient infiniment plus rares, on a pu en rencontrer quelques exemples dans des cas isolés, d'ailleurs très simples, avant que la théorie en ait été donnée sous sa forme la plus générale dans **21** (1re édition, p. 113) et amenée à une forme plus simple dans **24** (1re édition, p. 191).

Dans ce cas, les équations de disjonction peuvent s'écrire

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varphi_1(x^2+y^2)+f_1x+g_1y+h_1&=0,\\ \varphi_2(x^2+y^2)+f_2x+g_2y+h_2&=0,\\ \varphi_3(x^2+y^2)+f_3x+g_3y+h_3&=0, \end{aligned}$$

une ou deux des fonctions φ pouvant se réduire identiquement à 0.

Représentant, comme au n° 4, d'une manière générale, la quantité $f_i\varphi_j - f_j\varphi_i$ par la notation $|f_i\varphi_j|$, nous voyons que l'élimination de x^2+y^2 entre les trois équations précédentes prises deux à deux donne

$$(2)\qquad \begin{aligned} |f_1\varphi_2|x+|g_1\varphi_2|y+|h_1\varphi_2|&=0,\\ |f_2\varphi_3|x+|g_2\varphi_3|y+|h_2\varphi_3|&=0,\\ |f_3\varphi_1|x+|g_3\varphi_1|y+|h_3\varphi_1|&=0. \end{aligned}$$

Convenons maintenant, en posant, comme au n° 10,

$$\Delta=|f_ig_ih_i| \qquad (i=1,2,3)$$

de représenter par Δ_f, Δ_g, Δ_h ce que devient ce déterminant lorsqu'on y remplace les f, ou les g, ou les h, par les φ.

On voit alors que la somme des trois équations (1) respectivement multipliées par $|f_2g_3|$, $|f_3g_1|$, $|f_1g_2|$ donne

$$\Delta_h(x^2+y^2)+\Delta=0,$$

et que la somme des trois équations (2) respectivement multipliées une première fois par g_1, g_2, g_3, et une seconde par f_1, f_2, f_3 donne

$$\begin{aligned} \Delta_h x-\Delta_f&=0,\\ \Delta_h y-\Delta_g&=0. \end{aligned}$$

Dès lors, le résultat de l'élimination de x et y entre les trois dernières équations écrites sera

$$\Delta_f^2+\Delta_g^2+\Delta\Delta_h=0.$$

Telle est la forme générale de l'équation représentable par trois systèmes de cercles.

Si deux de ces systèmes, (z_1) et (z_2) par exemple, se réduisent à des systèmes de droites, auquel cas φ_1 et φ_2 sont identiquement nuls, l'équation précédente, où l'on peut toujours faire $\varphi_3 = 1$, se réduit à

$$|f_1 h_2|^2 + |g_1 h_2|^2 + |f_1 g_2| \Delta = 0.$$

Parmi les types d'équation susceptibles d'anamorphose circulaire, nous citerons celui de l'équation quadratique en f_1, f_2, f_3 la plus générale qui peut s'écrire

$$\Sigma A_i f_i^2 + 2\Sigma B_i f_j f_k + 2\Sigma C_i f_i + D = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

et qui est nomographiquement d'ordre 6.

Si l'on pose $A_j A_k - B_i^2 = \delta_i^2$, cette équation est représentable au moyen de deux faisceaux de droites parallèles

$$(3_1) \qquad A_2 y + \delta_3 f_1 = 0,$$

$$(3_2) \qquad \delta_3 x - B_3 y + \delta_3 f_2 = 0,$$

et d'un système de cercles

$$A_2 \delta_3 (x^2 + y^2) - 2(B_1 f_3 + C_2)\delta_3 x - 2[(A_2 B_2 - B_1 B_3) f_3 + A_2 C_1 - B_3 C_2] y + \delta_3 (A_3 f_3^2 + 2 C_3 f_3 + D) = 0,$$

cercles dont les centres sont en ligne droite et dont l'enveloppe est une conique. La réalité de cette représentation suppose, on le voit, qu'une au moins des différences $A_j A_k - B_i^2$ est positive.

Le résultat précédent est un cas particulier pour $m_1 = 0$ et $m_2 = 1$ de celui qui se trouve établi dans **19**.

12 Équations à quatre variables, dissociables en deux équations à trois variables. Échelles binaires. — Pour représenter sur un plan une équation à quatre variables, il faudrait y réaliser un contact $E(2) \mapsto E'(2)$. Pour l'un de ces éléments, on peut prendre un point à deux cotes; mais l'autre, devant être alors nécessairement une ligne, ne saurait être qu'une ligne condensée à deux cotes (n° 6). Cela montre que toute équation à quatre variables ainsi représentable devra pouvoir se mettre sous la forme

$$(1) \qquad f_{12} = f_{34}.$$

D'après M. Goursat (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 27, 1899, p. 27) pour qu'il en soit ainsi de l'équation $F_{1234} = 0$, il faut

et il suffit, si l'on représente le jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z_i} & \frac{\partial G}{\partial z_i} \\ \frac{\partial F}{\partial z_j} & \frac{\partial G}{\partial z_j} \end{vmatrix} \quad \text{par} \quad D_{ij}\,|\,F,\,G|,$$

que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial z_3} D_{12}\left|F, \frac{\partial F}{\partial z_4}\right| = \frac{\partial F}{\partial z_4} D_{12}\left|F, \frac{\partial F}{\partial z_3}\right|.$$

Si l'on pose

$$f_{34} = \zeta, \tag{2}$$

on représente, comme il a été dit au n° 8, l'équation

$$f_{12} = \zeta. \tag{3}$$

On en disjoint les variables au moyen des équations

$$\begin{cases} g_1(x, y, z_1) = 0, \\ g_2(x, y, z_2) = 0, \\ \gamma(x, y, \zeta) \;\; = 0, \end{cases} \tag{4}$$

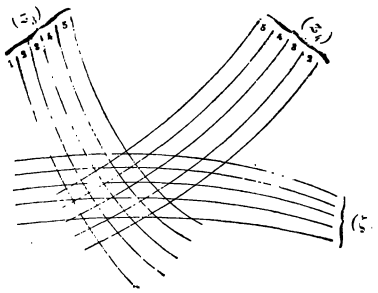
dont deux, comme on l'a vu (n° 9), peuvent être choisies arbitrairement. La troisième de ces équations définit le système des lignes condensées; pour rattacher à chacune de ces lignes tous les couples de cotes z_3, z_4 qui s'y rapportent, il n'y a qu'à représenter à son tour, de la même façon, l'équation (2), en conservant, pour l'une des équations de disjonction, précisément la troisième des équations (4); on a ainsi

$$\begin{cases} g_3(x, y, z_3) = 0, \\ g_4(x, y, z_4) = 0, \\ \gamma(x, y, \zeta) \;\; = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Dès lors, les doubles cotes des lignes condensées ζ leur sont rattachées au moyen d'un réseau (z_3, z_4), chacune d'elles correspondant à la fois à tous les couples de cotes z_3, z_4 des points du réseau par lesquels elle passe (*fig.* 2). Mais, on voit bien nettement, d'après ce qui précède, que la représentation obtenue provient simplement de l'accolement par un système (ζ) commun (dit *système de liaison*) de deux nomogrammes à trois variables seulement chacun : z_1, z_2, ζ pour l'un, z_3, z_4, ζ pour l'autre.

Sous une forme un peu plus générale, on peut dire que l'équation $F_{1234} = 0$ n'est susceptible d'un tel mode de représentation que

Fig. 2.



si, moyennant l'introduction d'une variable auxiliaire ζ, elle est *dissociable* en deux équations

$$f_{12}(z_1, z_2, \zeta) = 0, \qquad f_{34}(z_3, z_4, \zeta) = 0,$$

telles que l'élimination de ζ entre ces équations redonne la proposée. Le choix du même système (ζ) pour les deux nomogrammes partiels établit entre eux une liaison graphique qui dispense d'inscrire les cotes de ce système. D'ailleurs, la liaison graphique qui fixe le mode d'emploi du nomogramme peut être dénotée

$$(z_1, z_2) \rightarrowtail \zeta, \qquad \zeta \rightarrowtail (z_3, z_4).$$

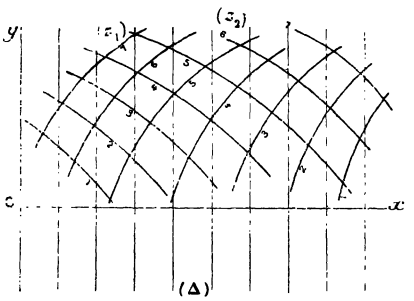
Si, par exemple, on se donne z_1, z_2, z_3, il suffit, pour avoir z_4, de lire la cote de la ligne du système (z_4) passant au point où la ligne z_3 est coupée par la ligne ζ issue du point (z_1, z_2).

Les systèmes de lignes condensées permettent, à leur tour, comme on l'a dit au n° 6, de définir des systèmes de *points condensés;* il suffit pour cela de couper l'un d'eux (ζ) par une ligne L quelconque et de regarder chaque point ainsi obtenu sur L comme affecté de tous les couples de cotes que le réseau des doubles cotes fait correspondre à la ligne ζ aboutissant en ce point.

C'est ainsi que tous les points de Ox pourront être regardés comme des points à deux cotes z_1, z_2 par l'intermédiaire d'un faisceau de droites Δ perpendiculaires à cet axe et tracées à travers un réseau de points affectés de ces deux cotes (*fig.* 3). Un tel dispositif constitue ce qu'on appelle une *échelle binaire* accolée à Ox.

Dans tout nomogramme où interviennent des échelles fonctionnelles portées sur des axes, il suffit d'accoler à chacun de ces axes

Fig. 3.



une échelle binaire pour doubler le nombre des variables correspondantes.

C'est ce qu'a fait M. Lallemand, sur une suggestion de M. Prévot, pour ses abaques hexagonaux, ce qui lui a immédiatement fourni la représentation d'équations de la forme

$$f_{14} + f_{25} + f_{36} = 0.$$

Mais il est essentiel de remarquer qu'une telle représentation provient tout simplement de l'accolement de trois nomogrammes auxiliaires, représentatifs des équations

$$\zeta_1 = f_{14}, \qquad \zeta_2 = f_{25}, \qquad \zeta_3 = f_{36},$$

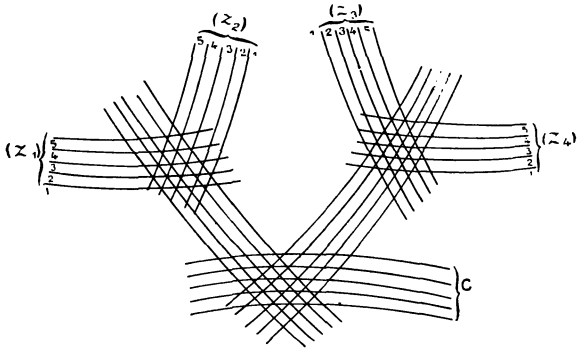
à l'abaque hexagonal représentatif de l'équation

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 0.$$

13. Équations à un nombre quelconque de variables, dissociables en une suite d'équations à trois variables. Systèmes ramifiés. — Ce qui vient d'être dit à propos des équations à quatre variables comporte une généralisation immédiate pour le cas d'un nombre quelconque de variables. Que l'on remplace chaque système de lignes simplement cotées, intervenant dans un nomogramme à trois variables, par un système de lignes condensées à deux cotes en lui adjoignant un réseau, puis, de même, chacun des systèmes constitutifs de ce réseau par un système lui-même condensé à deux cotes, et ainsi de suite; on obtiendra de cette manière, les systèmes *ramifiés* de lignes

condensées à un nombre quelconque de cotes; la figure 4 montre un tel système de lignes C à quatre cotes.

Fig. 4.



Les équations à n variables représentables par ce procédé pourront être formées comme suit : partir d'une équation à trois variables; y remplacer une ou plusieurs de ces variables par autant de fonctions de deux variables; opérer de même sur les variables figurant dans la nouvelle équation ainsi obtenue, et ainsi de suite.

Mais il convient de ne pas s'y tromper : au point de vue nomographique, une telle représentation est constituée non pas intrinsèquement par un nomogramme à n variables proprement dit, mais par un enchaînement de nomogrammes à trois variables, que l'on pourrait, si on le voulait, isoler les uns des autres à la condition de coter les systèmes de liaison, communs à ces nomogrammes partiels pris deux à deux, au moyen des valeurs de la variable auxiliaire correspondante.

Pour obtenir, dans le cas de plus de trois variables, des nomogrammes *intrinsèques*, c'est-à-dire non dissociables en nomogrammes à un moindre nombre de variables, ou, ce qui revient au même, dans lesquels n'interviennent point de variables auxiliaires, il faudra avoir recours à un autre principe de représentation (n° 14).

Les nomogrammes constitués comme il vient d'être dit comprennent donc à la fois des systèmes terminaux, cotés au moyen des variables entrant dans l'équation donnée, et des systèmes intérieurs, dits de liaison, correspondant aux variables auxiliaires qui ont permis la dissociation de l'équation à n variables donnée en équations à trois variables.

L'introduction d'une variable nouvelle ayant pour effet de transformer un système coté en système de liaison, on voit que, pour n variables, le nombre des systèmes de liaison est $n - 3$, et, par suite, le nombre des nomogrammes partiels à trois variables, en lesquels se décompose le nomogramme total, $n - 2$. De plus, puisque, pour l'un quelconque de ces nomogrammes partiels, nous avons le libre choix de la nature géométrique des lignes de deux des systèmes intervenant, et que, par conséquent, en passant d'un de ces nomogrammes à un nomogramme contigu, par un système déjà défini, il nous restera encore le choix d'un des deux autres systèmes pour celui-ci, nous voyons que le nombre total des systèmes dont nous pouvons fixer arbitrairement la nature géométrique est égal à $n - 1$.

Il suffit de pratiquer une coupure en travers de chacun des $n - 3$ systèmes de liaison, en repérant, d'un côté à l'autre de la coupure, les lignes du système de liaison ainsi interrompues (notamment au moyen des valeurs correspondantes de la variable auxiliaire ayant servi à définir ce système) pour isoler les $n - 2$ nomogrammes partiels à trois variables dont se compose le nomogramme total.

Il est essentiel de faire encore la remarque suivante : une équation à n variables pourra, en certains cas, revêtir la forme voulue, spécifiée au début du présent numéro, à la condition qu'une même variable z_i figure à la fois dans plusieurs des fonctions ultimes auxquelles aboutissent les substitutions successives à partir de trois variables, et, par suite, que cette variable donne naissance à plusieurs systèmes de lignes cotées au moyen de ses propres valeurs. Cela devra être évité autant que possible, le modèle théoriquement parfait de nomogramme ne devant évidemment comporter qu'un seul système coté par variable entrant dans l'équation donnée. Toutefois, on pourra, le cas échéant, recourir à une telle manière de faire, mais à la condition formelle que *la variable z_i n'ait jamais à être prise comme inconnue*, attendu qu'elle ne pourrait être donnée par le nomogramme que moyennant certains tâtonnements (1) et que le but

(1) On voit bien aisément en quoi peuvent consister de tels tâtonnements. Si la variable z_i entre dans p systèmes, on lui attribue, dans $p - 1$ de ces systèmes, une valeur voisine de celle que l'on présume devoir être la sienne, puis, la regardant dans le $p^{ième}$ système comme une variable distincte, on détermine, au moyen du nomogramme, la valeur correspondante de celle-ci qui, si la valeur de départ était exacte, lui serait égale; et l'on modifie cette valeur de départ jusqu'à ce qu'il en soit

que l'on se propose en nomographie est précisément d'obtenir les inconnues par de simples lectures sur les nomogrammes, de façon immédiate et sans tâtonnement.

Si l'on tentait, par exemple, de représenter l'équation en forme de déterminant du n° 10 par un abaque hexagonal à échelles multiples, on devrait faire correspondre à chacune des trois variables deux systèmes cotés, d'où résulterait qu'aucune d'elles ne pourrait être prise pour inconnue et, par suite, qu'une telle représentation serait purement illusoire.

CHAPITRE III.

NOMOGRAMMES A POINTS COTÉS.

14. Principe des points alignés. — Les avantages, signalés dès le n° 1, des systèmes de points sur les systèmes de lignes, tant au point de vue de la simplicité et de la rapidité de la construction qu'à celui de la facilité et de la précision de la lecture, surtout lorsque celle ci comporte une interpolation à vue, rend désirable le plus large emploi possible de points cotés dans la composition des nomogrammes. Or, on a déjà dit (n° 10) que l'immense majorité des équations rencontrées dans les applications sont représentables au moyen de systèmes de droites concourantes. Il suffit donc d'appliquer à un tel nomogramme une transformation dualistique quelconque (bien entendu, avec conservation des cotes) pour en obtenir un autre sur lequel les seuls systèmes cotés seront des systèmes de points, la liaison graphique devenant alors l'alignement de trois de ces points sur une même droite. Il faut, dès lors, pour établir la liaison graphique entre

---

ainsi. On peut, au reste, grandement abréger ces tâtonnements en appliquant un procédé que l'on peut dire classique en pareil cas (*voir* notamment **24**, n° 18) et qui consiste, si l'on prend pour abscisse la valeur de départ admise, pour ordonnée l'écart pris avec son signe, entre celle-ci et celle qu'on en déduit, ainsi qu'il vient d'être dit, à se procurer deux valeurs de départ conduisant à des écarts petits et de sens contraires, et à prendre le point de rencontre de l'axe des abscisses et de la droite joignant les extrémités des ordonnées représentatives de ces écarts, ce qui équivaut à une simple traduction graphique du mode d'interpolation dit par parties proportionnelles.

les éléments cotés, disposer d'une droite mobile, ou index, déplaçable à volonté sur le nomogramme (1).

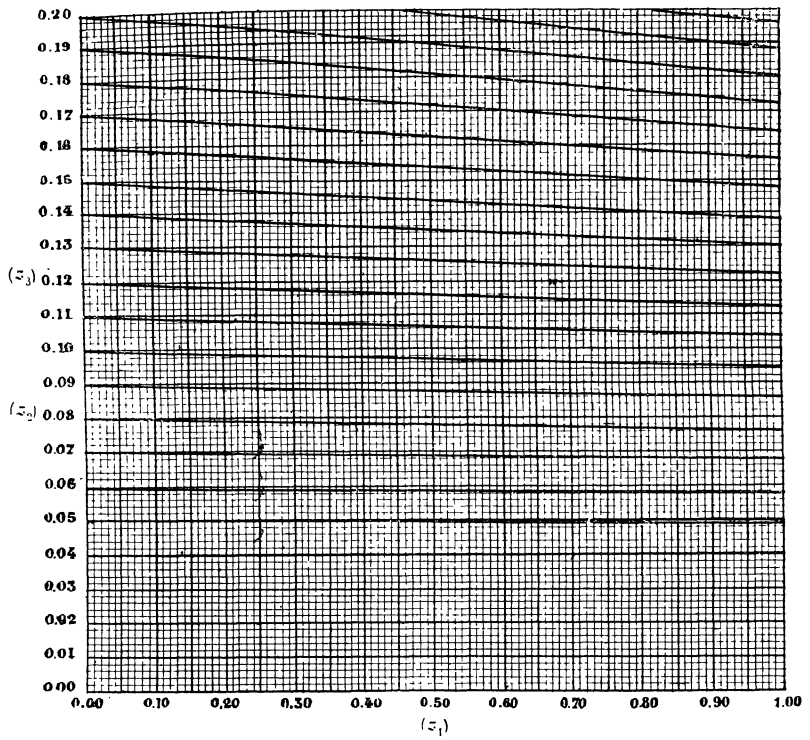
On voit que cette liaison graphique s'exprimera par le symbole

$$I \rightarrow P_1, \quad I \rightarrow P_2, \quad I \rightarrow P_3,$$

où I représente l'index et P_i le point coté z_i.

La forme la plus avantageuse à donner à la transformation voulue consiste tout simplement dans l'échange de coordonnées cartésiennes

Fig. 5.

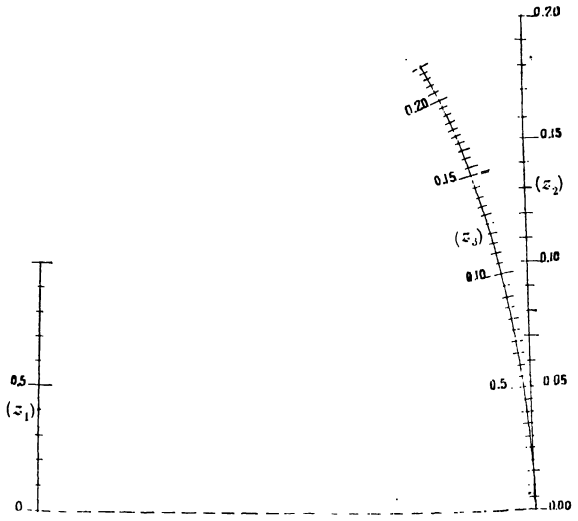


en coordonnées parallèles (n° 3); c'est sur ce simple échange qu'a été fondé, dès l'origine, le principe de la nouvelle méthode (**16**). Il peut être effectué directement sur un nomogramme à droites concourantes

(1) Cette droite pourra être tracée, d'un trait fin, sur un transparent appliqué sur le plan fixe portant les systèmes cotés, ou réalisée au moyen d'un fil tendu sur ce plan.

déjà construit. Les figures 5 et 6 en fournissent un exemple, sur lequel, au reste, les avantages du nomogramme à points alignés,

Fig. 6.



au point de vue de la commodité de la lecture, sautent, peut-on dire, aux yeux (1).

Mais, d'une manière plus générale, on obtiendra les nomogrammes à points alignés en formant les équations de disjonction comme au n° 10, avec simple remplacement des coordonnées cartésiennes x et y par les coordonnées parallèles u et v, les points ainsi définis par leur équation étant déterminés par l'un des procédés indiqués à la fin du n° 3, au besoin complétés par ceux étudiés au n° 4.

Ainsi, par le procédé du n° 10, les trois variables de toute équa-

(1) La figure 5 est un fragment d'une *Table graphique pour l'arpentage des coupes* qui était naguère en usage à l'École forestière. La graduation portée le long de Oy y sert à la fois pour les systèmes (z_2) (droites perpendiculaires à cet axe) et (z_3) (droites inclinées sur cet axe), ce qui entraîne, sur la figure 6, le fait que les points z_2 et z_3 de même cote sont alignés sur le point $z_1 = 0$. L'enveloppe des droites z_3 de la figure 5, corrélative du lieu des points z_3 de la figure 6 serait pratiquement impossible à déterminer par la voie simplement graphique, ce qui implique un nouvel avantage des points alignés, très appréciable notamment quand il s'agit de la représentation de certaines lois empiriques (**21**, Chap. IV, Sect. IV, et **24**, n° 71).

tion représentable par points alignés peuvent être disjointes au moyen d'équations de la forme

$$uf_i + vg_i + h_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et l'équation elle-même s'écrira

$$\Delta_{123} = |f_i \quad g_i \quad h_i| = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Remarquons tout d'abord que le support de l'échelle (z_i) sera rectiligne, ou non, selon que les fonctions f_i, g_i, h_i seront, ou non, linéairement dépendantes, c'est-à-dire exprimables linéairement, ou non, au moyen d'une seule fonction de z_i. Nous appellerons *genre* d'un nomogramme à points alignés le nombre des échelles à support non rectiligne que comporte ce nomogramme, nombre qui varie, par conséquent, de 0 à 3 (¹).

Nous ferons aussi observer que l'on peut trouver des couples de valeurs de deux des variables pour lesquelles la troisième devient indéterminée; il suffit pour cela que, dans le déterminant, les termes homologues de deux lignes soient proportionnels. Par exemple, les équations

$$\frac{f_2}{f_3} = \frac{g_2}{g_3} = \frac{h_2}{h_3}$$

fourniront les couples de valeurs de z_2, z_3 qui rendent la variable z_1 indéterminée. Ces couples de valeurs se rapportent nécessairement à un même point.

De telles valeurs des variables sont dites *critiques*, le point auquel est appliqué un couple de telles valeurs, un *point critique*. Tout point commun aux supports distincts de deux systèmes cotés est nécessairement un point critique.

Si la disjonction opérée dans l'équation donnée conduit à une disposition de systèmes cotés peu commode, en particulier, si les fractions de ces systèmes, limitées aux valeurs pratiques des variables, sont constamment coupées sous un angle trop petit par l'index unique servant à la lecture, on peut y remédier en ayant recours à la trans-

(¹) Cette notion de genre ne fait pas double emploi, comme on a pu le croire, avec celle d'ordre définie au n° 7. La notion d'ordre se rapporte à l'équation représentée, celle de genre au nomogramme à points alignés. et, pour une équation donnée, la représentation peut parfois se faire par des nomogrammes de genres divers (*voir* la note de la page 38).

formation homographique la plus générale qui, dépendant de huit paramètres, laisse libre le choix de quatre points. On peut, par exemple, fixer aux extrémités de deux côtés opposés d'un rectangle les points correspondant aux valeurs limites, en pratique, des deux variables prises pour données. Pour définir une telle transformation homographique de la façon la plus générale, il suffit de multiplier l'équation mise sous la forme du déterminant ci-dessus par le déterminant, supposé non nul,

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix}$$

ce qui donne le nouveau déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda f_i + \mu g_i + \nu h_i & \lambda' f_i + \mu' g_i + \nu' h_i & \lambda'' f_i + \mu'' g_i + \nu'' h_i \end{vmatrix} = 0$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

On trouvera un exemple particulièrement caractéristique d'application de cette méthode dans **21** (n° 86).

15. **Nomogrammes de genre zéro.** — Les types canoniques d'équations représentables par des nomogrammes à points alignés, de genre zéro, peuvent s'écrire

(1) $$f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

et

(2) $$f_1 + f_2 f_3 = 0,$$

dans chacun desquels on opère la disjonction au moyen des mêmes équations

(3) $$u = \mu_1 f_1, \qquad v = \mu_2 f_2$$

qui définissent, sur Au et Bv, des échelles des fonctions f_1 et f_2, et qui donnent, comme équation du troisième système,

(4) $$\mu_2 u + \mu_1 v + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0$$

dans un cas, et

(5) $$\mu_2 u + \mu_1 f_3 v = 0$$

dans l'autre.

L'équation (4), qui entraîne

$$y = -\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} f_3,$$

définit l'échelle de la fonction $-f_3$, portée avec le module $\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, sur la parallèle aux axes qui divise leur intervalle dans le rapport $-\frac{\mu_1}{\mu_2}$ (n° 3, 2°).

L'équation (5) définit une échelle projective de celle de f_3 sur l'axe AB (n° 4).

Mais, d'après ce qui a été vu au numéro précédent, l'équation la plus générale représentable par un nomogramme de genre zéro est celle dont le premier membre se met sous la forme du déterminant Δ_{123} lorsque les éléments de chaque ligne s'expriment linéairement à l'aide d'une seule fonction f_i. Après développement d'un tel déterminant, l'équation est donc nécessairement de la forme

$$(6) \qquad A f_1 f_2 f_3 + \Sigma B_i f_j f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

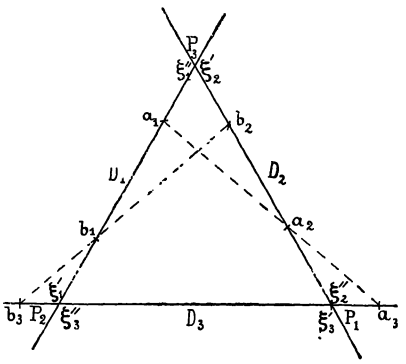
par suite d'ordre nomographique 3. Inversement, étant donnée une telle équation, proposons-nous d'en construire un nomogramme. Puisque, comme nous l'avons vu au numéro précédent, ce nomogramme n'est déterminé qu'à une homographie générale près, nous sommes libres de nous donner quatre droites qui en fassent partie, par exemple celles D_1, D_2, D_3 qui serviront de supports respectivement aux échelles (z_1), (z_2), (z_3) et celle sur laquelle s'aligneront trois points a_1, a_2, a_3 de ces échelles dont les cotes satisfassent simultanément à l'équation (6) [*fig.* 7]. Les points P_1, P_2, P_3 où se rencontrent les trois supports sont les points critiques, dont les cotes (ζ'_3, ζ''_2), (ζ'_1, ζ''_3), (ζ'_2, ζ''_1) sont des couples de valeurs critiques correspondants (1). Dès lors, tout est déterminé, puisque, pour chacune des échelles (z_i), projective de celle de la fonction f_i, on connaît trois points, savoir ceux qui sont cotés a_i, ζ'_i, ζ''_i (2).

(1) C'est à l'occasion de cette question que nous avons introduit dans cette théorie la notion des points critiques.

(2) Si, pour certaines valeurs de f_i, la valeur correspondante de z_i est imaginaire (ce qui est le cas, par exemple, pour $\sin z_i$ lorsque cette fonction prend des valeurs supérieures à 1 en valeur absolue), il n'y a qu'à se servir de f_i même comme paramètre pour la construction. On a ainsi des échelles projectives d'échelles métriques, sur lesquelles, après coup, on inscrit les valeurs correspondantes de z_i.

Toute la question revient donc à calculer les valeurs critiques ζ_i' et ζ_i'' — ou, ce qui revient au même, les valeurs correspondantes φ_i' et φ_i'' de f_i — et à les répartir entre les points critiques.

Fig. 7.



Pour avoir, par exemple, les valeurs critiques relatives aux indices i et j, il suffit, l'équation (6) étant ordonnée en f_k, d'annuler les deux coefficients de cette équation. On trouve (1) ainsi le résultat suivant : si l'on pose

$$F_0 = \Sigma B_i C_i - AD,$$

$$E_i = AC_i - B_j B_k, \qquad F_i = F_0 - 2B_i C_i, \qquad G_i = B_i D - C_j C_k,$$

φ_i' et φ_i'' sont les racines de l'équation

$$E_i \varphi_i^2 - F_i \varphi_i + G_i = 0.$$

De plus, quel que soit i, on a

$$F_i^2 - E_i G_i = \Delta,$$

Δ étant le discriminant de la forme obtenue en rendant homogène le premier membre de (6).

Par suite,

$$\varphi_i' = \frac{F_i + \sqrt{\Delta}}{2E_i}, \qquad \varphi_i'' = \frac{F_i - \sqrt{\Delta}}{2E_i}.$$

On trouve, en outre, que les valeurs critiques attachées à un même

(1) Pour les détails du calcul et de la discussion, voir : **21**, n° 75, et **25**, n° 69.

point critique doivent correspondre à des signes différents pris pour $\sqrt{\Delta}$.

Les points de la droite D_i étant liés de façon univoque aux valeurs de f_i, la réalité de la représentation exige que $\Delta \geq 0$.

Si $\Delta > 0$, on a donc le choix entre les combinaisons

$$P_1(\varphi'_2, \varphi''_3), \quad P_2(\varphi'_3, \varphi''_1), \quad P_3(\varphi'_1, \varphi''_2)$$

et [1]

$$P_1(\varphi'_3, \varphi''_2), \quad P_2(\varphi'_1, \varphi''_3), \quad P_3(\varphi'_2, \varphi''_1),$$

auxquelles correspondent deux séries de dispositions, homographiques entre elles dans chaque série.

Si $\Delta = 0$, les deux valeurs critiques φ'_i, φ''_i de chaque fonction se réduisent à une seule φ_i, ce qui exige la réunion des trois points P_i en un seul; les trois échelles sont concourantes [2].

Si $\Delta < 0$, la représentation devient imaginaire; on ne saurait la rendre réelle sans recourir à une anamorphose transcendante. M. Fontené a fait voir (*Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. 19, 1900, p. 495) que cette anamorphose résulte de la transformation $g_i = \text{arc tang } f'_i$, la fonction f'_i étant projective de f_i.

Pour obtenir une disposition permettant l'emploi direct de l'échelle de la fonction f_i au lieu d'une échelle qui en soit simplement projective, il faut rejeter à l'infini le point où cette fonction devient infinie. Cette condition pourra généralement être réalisée pour deux des fonctions, par rejet à l'infini de la droite joignant les points où elles deviennent l'une et l'autre infinies. On pourra, pour les trois échelles, adopter celles mêmes des fonctions f_1, f_2, f_3, lorsque les points où ces fonctions deviennent infinies se trouvent en ligne droite. Si ces points coïncident chacun avec un point critique, un seul d'entre eux pourra être, à la fois, rejeté à l'infini, sans quoi une des trois échelles tout entière y serait elle-même rejetée [3].

16. Nomogrammes de genre un. Équations trinomes. — Si un nomogramme à points alignés est de genre un, c'est-à-dire comporte deux

---

(1) C'est à cette seconde hypothèse que correspond la disposition de la figure 7.

(2) En pareil cas, en plus des trois supports concourants, on peut se donner les alignements correspondant à deux systèmes (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) de valeurs satisfaisant à l'équation (6).

(3) On trouvera tout le détail de cette discussion dans **21**, n° 76, et dans **24**, n° 70.

échelles rectilignes, on peut toujours, par transformation homographique, rejeter à l'infini le point de rencontre des supports de ces échelles, et prendre, dès lors, ces supports devenus parallèles pour axes Au et Bv. Dans ces conditions, l'équation représentée prend la forme

$$f_1 g_3 + f_2 h_3 + f_3 = 0, \tag{1}$$

d'ordre nomographique quatre, où la disjonction des variables s'opère au moyen des équations

$$u = \mu_1 f_1, \qquad v = \mu_2 f_2,$$
$$\mu_2 g_3 u + \mu_1 h_3 v + \mu_1 \mu_2 f_3 = 0,$$

les fonctions étant, bien entendu, ici linéairement indépendantes.

Dans ce type rentrent immédiatement les équations trinomes telles que

$$z'' + pz + q = 0, \tag{2}$$

où la disjonction se fait au moyen de

$$u = \mu p, \qquad v = \mu q, \tag{3}$$
$$zu + v + \mu z^n = 0. \tag{4}$$

Quel que soit n, on a d'ailleurs

$$x = \delta \frac{1 - z}{1 + z}, \tag{5}$$

qui définit sur AB une échelle projective d'échelle métrique [1] (n° 2).

On vient de voir que toute équation représentable par un nomogramme de genre un est de l'ordre nomographique quatre. M. Clark s'est proposé de reconnaître inversement à quelle condition une équation de cet ordre est susceptible d'être ainsi représentée. Le résultat qu'il a obtenu à la suite de calculs assez laborieux (**4**) découle immédiatement de la considération des valeurs critiques. En effet, les échelles rectilignes étant supposées être celles de z_1 et z_2, on voit que les valeurs φ_1 et φ_2 de f_1 et f_2 correspondant au point de rencontre des supports de ces échelles seront critiques. Si donc

[1] On peut ne considérer, pour la construction de cette échelle, que des valeurs positives de z, les racines négatives pouvant être obtenues en valeur absolue comme racines positives de la transformée en z. Voir le détail de la construction dans **21** (1re éd., p. 183; 2e éd., p. 216).

l'équation à trois variables la plus générale pour l'ordre nomographique quatre est écrite

$$(6)\qquad f_3(a_0f_1f_2+a_1f_1+a_2f_2+a_3)+g_3(b_0f_1f_2+b_1f_1+b_2f_2+b_3)+h_3(c_0f_1f_2+c_1f_1+c_2f_2+c_3)=0,$$

les équations

$$\begin{aligned}a_0\varphi_1\varphi_2+a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+a_3&=0,\\ b_0\varphi_1\varphi_2+b_1\varphi_1+b_2\varphi_2+b_3&=0,\\ c_0\varphi_1\varphi_2+c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+c_3&=0\end{aligned}$$

devront avoir une solution commune.

L'élimination de φ_1 et φ_2 entre ces équations, par une méthode calquée sur celle que nous avons employée au n° 11, lorsque l'on pose

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

et que l'on représente par D_i ce que devient ce déterminant quand on y remplace a_i, b_i, c_i par a_0, b_0, c_0, conduit à l'équation résultante

$$(7)\qquad DD_3+D_1D_2=0.$$

Telle est la condition trouvée par Clark (d'une tout autre façon, beaucoup moins simple) dont, suivant la remarque de M. Soreau, le premier membre se confond avec le discriminant Δ de la forme que l'on obtient en rendant homogène le premier membre de (6).

Pour notre part, ayant obtenu cette condition par la voie très simple qui vient d'être indiquée, nous avons fait la remarque que, lorsqu'elle est remplie, les valeurs critiques de f_1 et f_2 sont données par

$$\varphi_1=\frac{D_1}{D_3},\qquad \varphi_2=\frac{D_2}{D_3},$$

d'où se déduisent les valeurs correspondantes ζ_1 et ζ_2 et z_1 et z_2.

En dehors de ces valeurs affectées au point critique, il suffit de se donner arbitrairement les cotes de deux points de chacune des échelles (z_1) et (z_2) pour que celles-ci soient entièrement déterminées comme projectives de celles de f_1 et f_2. Chaque point de l'échelle (z_3) est ensuite déterminé au moyen de deux alignements répondant à des couples de valeurs de z_1 et z_2 qui satisfassent avec la valeur correspondante de z_3 à l'équation donnée.

17. Nomogrammes de genre deux. Type conique. — Si, reprenant l'équation d'ordre nomographique trois la plus générale

$$(1) \qquad A f_1 f_2 f_3 + \Sigma B_i f_j f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0,$$

on lui applique le procédé de disjonction indiqué au n° 10 pour former l'équation $\Delta_{123} = 0$, on trouve, en conservant les notations du n° 15, complétées par

$$H_i = B_i(F_0 - 2B_j C_j - 2B_k C_k) + 2A C_j C_k,$$
$$K = A F_0 - 2 B_1 B_2 B_3,$$

que l'équation (1) est représentable au moyen des trois systèmes de points cotés

$$u f_1 + v = 0,$$
$$E_2 f_2^2 + (B_1 u - A v - F_2) f_2 + C_3 u - B_2 v + G_2 = 0,$$
$$E_3 f_3^2 + (B_1 u - A v - F_3) f_3 + C_2 u - B_3 v + G_3 = 0,$$

le premier ayant pour support une droite **D** (confondue avec AB), les deux derniers, une même conique **C** d'équation

$$(B_1 u - A v)^2 - 2 H_1 u + 2 K v + \Delta = 0,$$

Δ étant toujours le discriminant du premier membre de (1) rendu homogène et les z_2 et z_3 en chaque point de **C** étant liés par la relation

$$(2) \qquad 2 E_2 f_2 - F_2 = 2 E_3 f_3 - F_3.$$

On aurait encore deux autres nomogrammes de même type par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

Ces nomogrammes de genre deux, à deux coniques superposées, ont été étudiés à fond par J. Clark (**4**) qui leur a donné le nom de *nomogrammes coniques*.

Ici, les points critiques sont nécessairement les points de rencontre de **D** et de la conique **C**, les valeurs critiques des f_i se répartissant entre eux suivant les groupes $(\varphi_1', \varphi_2'', \varphi_3'')$ et $(\varphi_1'', \varphi_2', \varphi_3')$.

Suivant que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, les valeurs critiques φ_i' et φ_i'' sont réelles, égales ou imaginaires et, par suite, la droite **D** coupe la conique **C** en des points réels, confondus ou imaginaires. Mais, dans tous les cas, la représentation est réelle.

Si l'on opère la transformation

$$g_i = 2 E_i f_i - F_i \qquad (i = 2, 3),$$

on trouve, si l'on pose

$$L_1 = A F_2 F_3 + 2 B_2 E_2 F_3 + 2 B_3 E_3 F_2 + 4 C_1 E_2 E_3,$$
$$M_1 = B_1 F_2 F_3 + 2 C_2 E_3 F_2 + 2 C_3 E_2 F_3 + 4 D E_2 E_3,$$
$$g_1 = A f_1 + B_1, \qquad h_1 = K f_1 + H_1, \qquad l_1 = L f_1 + M_1,$$

que l'équation (1) devient

$$g_1 g_2 g_3 + (g_2 + g_3) h_1 + l_1 = 0, \tag{1 bis}$$

forme canonique obtenue par Clark d'une tout autre façon.

Quand l'équation est ramenée à cette forme, les équations de disjonction prennent la forme simple

$$g_1 u + h_1 v + l_1 = 0,$$
$$u - g_2 v + g_2^2 = 0,$$
$$u - g_3 v + g_3^2 = 0,$$

l'équation de la conique **C** devenant

$$v^2 - 4u = 0,$$

et la relation entre les valeurs correspondantes de z_2 et z_3,

$$g_2 = g_3.$$

D'ailleurs l'équation $\Delta_{123} = 0$ prenant ici la forme

$$\begin{vmatrix} g_1 & h_1 & l_1 \\ 1 & -g_2 & g_2^2 \\ 1 & -g_3 & g_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

on voit, en développant ce déterminant, qu'elle provient simplement de la multiplication de (1 *bis*) par le facteur parasite $g_2 - g_3$.

Il est clair que, par une transformation homographique appropriée, on pourra, en outre, faire en sorte que la conique **C** soit un cercle. *Voir* à ce sujet : **21** (n° 84) et **24** (n° 77).

18. Nomogrammes de genre trois. — Clark a remarqué (**4**, Chap. V) que la réduction de l'équation (1) du numéro précédent à la forme canonique

$$g_1 g_2 g_3 + \beta \Sigma g_i g_j + \gamma \Sigma g_i + \delta = 0,$$

équivalente à

$$\begin{vmatrix} g_1 + \beta & g_1^2 - \gamma & g_1^3 + \delta \\ g_2 + \beta & g_2^2 - \gamma & g_2^3 + \delta \\ g_3 + \beta & g_3^2 - \gamma & g_3^3 + \delta \end{vmatrix} = 0,$$

moyennant l'introduction du produit de facteurs parasites $(g_1 - g_2)(g_2 - g_3)(g_3 - g_1)$, conduit à un nomogramme sur lequel les trois échelles ont pour support commun une cubique, au point double de laquelle viennent se réunir les trois couples de valeurs critiques, point double réel, de rebroussement ou imaginaire, suivant que $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$. On a donc ainsi, pour l'équation générale d'ordre nomographique trois, un nomogramme de genre trois, à trois supports confondus.

Clark a remarqué, en outre, que, lorsque la condition (7) du n° 16, pour qu'une équation d'ordre nomographique quatre soit représentable par un nomogramme de genre un n'est pas satisfaite, cette équation est nécessairement représentable par un nomogramme de genre trois (1). Nous avons depuis lors, établi cette proposition de la manière très simple que voici :

Si nous écrivons l'équation développée (6) du n° 16 sous la forme

$$f_3\alpha_{12} + g_3\beta_{12} + h_3\gamma_{12} = 0,$$

et que nous lui appliquions le procédé de disjonction du n° 10, nous poserons

$$u = \frac{\alpha_{12}}{\gamma_{12}}, \qquad v = \frac{\beta_{12}}{\gamma_{12}}.$$

Mais pour que ces valeurs de u et v conduisent effectivement à la disjonction voulue, il faut que les trois équations

$$\alpha_{12} = 0, \qquad \beta_{12} = 0, \qquad \gamma_{12} = 0$$

ne soient pas compatibles. Si, en effet, elles l'étaient, on aurait, pour des valeurs convenables des coefficients λ et μ,

$$\gamma_{12} = \lambda\alpha_{12} + \mu\beta_{12},$$

et, par suite,

$$\lambda u + \mu v = 1,$$

équation indépendante de z_1 et z_2, ce qui équivaudrait à une impossibilité. Or, la condition d'incompatibilité de ces trois équations est que le premier membre de la relation (7) du n° 16 (discriminant Δ

(1) Le fait qu'une équation d'ordre trois peut être représentée *ad libitum* par un nomogramme de genre zéro, deux ou trois, et une équation d'ordre un, suivant le cas, par un nomogramme de genre un ou trois, montre que les notions d'ordre et de genre sont, par le fait, bien distinctes.

du premier membre de l'équation (6) du même numéro) soit différent de zéro. C'est le résultat de Clark.

On peut observer, en outre, si l'on pose

$$U_i = c_i u - a_i, \qquad V_i = c_i v - b_i,$$

et, conformément à la notation employée au n° **11**,

$$U_i V_j - U_j V_i = |U_i V_j|,$$

que le résultat de la disjonction aboutit pour z_1 et z_2 aux équations

$$|U_0 V_i| f_i^2 + (|U_0 V_3| - |U_i V_j|) f_i + |U_j V_3| = 0 \qquad (i, j = 1, 2),$$

définissant deux échelles du deuxième degré, de même support, savoir la conique dont l'équation en u et v s'écrit

$$|U_0 V_3|^2 + |U_1 V_2|^2 - 2(|U_0 V_1||U_2 V_3| + |U_0 V_2||U_1 V_3|) = 0.$$

On trouvera dans les travaux de MM. F. Boulad (**3**) et Soreau (**30**) d'intéressants développements sur la représentation, par nomogrammes de genre trois, des équations d'ordre nomographique cinq ou six.

La question, celle-ci purement analytique, s'est nécessairement posée de reconnaître à quelles conditions une équation quelconque donnée est susceptible de revêtir la forme

$$|f_i g_j h_k| = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

et, en ce cas, de déterminer les fonctions f_i, g_i, h_i.

Elle avait été primitivement résolue dans les cas particuliers suivants : 1° celui de l'équation (1) du n° **15**, correspondant aux nomogrammes de genre zéro à échelles parallèles, par P. de Saint-Robert, (**27**) ; 2° celui de l'équation (1) du n° **16**, correspondant à un nomogramme de genre un, à peu près simultanément, mais de façon différente par Massau (**14**) et par M. Lecornu (**11**).

La solution dans le cas général a été donnée d'une façon complète par M. Gronwall (**7**). Depuis lors, M. Soreau a fait connaître (**30**) une solution grandement simplifiée pour le cas où l'équation donnée, au lieu d'être prise tout à fait quelconque (comme dans la solution de M. Gronwall), est supposée se présenter d'abord sous la forme

$$f_1 F_{23} + g_1 G_{23} + h_1 H_{23} = 0.$$

19. **Nomogrammes à double alignement.** — Pour certaines équations à quatre variables $F_{1234} = 0$ dissociables en deux équations à trois variables

$$f_{12}(z_1, z_2, \zeta) = 0, \qquad f_{34}(z_3, z_4, \zeta) = 0,$$

moyennant l'introduction de la variable auxiliaire ζ (n° **12**), il pourra se faire que chacune de ces deux équations soit susceptible d'être représentée en points alignés. Les deux nomogrammes partiels ainsi obtenus pourront être séparés l'un de l'autre, le passage de l'un à l'autre, par la commune valeur de ζ, pouvant au besoin être guidé par des traits unissant entre eux les points de même cote sur les deux échelles (ζ). Mais, en général, il sera possible d'adopter pour ζ la même échelle sur les deux nomogrammes partiels; dans ces conditions les alignements à prendre sur ces nomogrammes se couperont en un point du support L de cette échelle commune (ζ), dont les cotes n'auront pas, dès lors, besoin d'être marquées ; ce point autour duquel on devra faire pivoter l'index servant à la lecture, pour passer de sa première à sa seconde position, sera dit un *pivot*, et le support, lieu de ce point, la *ligne des pivots* ou, plus simplement, la *charnière*.

Si I' et I'' désignent les deux positions de l'index, la notation symbolique du nomogramme est

$$\begin{array}{llll} P_1 \rightarrowtail I' & P_2 \rightarrowtail I' & \zeta \rightarrowtail I', \\ \zeta \rightarrowtail I'' & P_3 \rightarrowtail I'' & P_4 \rightarrowtail I''. \end{array}$$

Dans le cas — le plus intéressant pour les applications — où cette charnière est rectiligne, M. Soreau a mis sous une forme élégante (**28**, p. 320) le type général de l'équation correspondante, grâce à la simple remarque que voici : si l'on regarde la charnière comme la ligne de terre d'une représentation de l'espace par projections orthogonales, les points (z_1) et (z_2) apparaissent comme appartenant à un des plans de projection, (z_3) et (z_4) à l'autre; et, comme les droites (z_1, z_2) et (z_3, z_4) se coupent sur la ligne de terre, les quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 sont coplanaires. Si donc on les définit en coordonnées parallèles u, v, w de l'espace, telles que l'axe Au se confonde avec la charnière, on a, en exprimant que les quatre points

sont coplanaires,

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 0 & h_1 \\ f_2 & g_2 & 0 & h_2 \\ f_3 & 0 & g_3 & h_3 \\ f_4 & 0 & g_4 & h_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la forme d'équation cherchée. Elle offre l'avantage de permettre, par généralisation de l'artifice indiqué à la fin du n° 14, la transformation homographique la plus générale de l'ensemble des deux nomogrammes, en leur conservant toujours même échelle auxiliaire (ζ), au moyen de la multiplication du déterminant précédent par un déterminant quelconque non nul à seize éléments.

Les équations du type le plus fréquent rentrant dans le type général ci-dessus sont celles qui s'écrivent

$$(2)\qquad f_1 g_2 + f_2 = f_3 g_4 + f_4$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & f_1 \\ 1 & g_2 & 0 & -f_2 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 \\ 1 & 0 & g_4 & -f_4 \end{vmatrix} = 0,$$

pour lesquelles on obtient la disjonction voulue tout simplement en appelant ζ la valeur commune des deux membres de (2), ce qui donne, pour le premier nomogramme partiel,

$$u = \mu\zeta, \qquad v = -\mu_1 f_1,$$
$$\mu_1 u + \mu g_2 v = \mu\mu_1 f_2,$$

et pour le second,

$$u = \mu\zeta, \qquad v = -\mu_3 f_3,$$
$$\mu_3 u + \mu g_4 v = \mu\mu_3 f_4.$$

M. Soreau s'est proposé de rechercher à quelles conditions l'équation générale d'ordre nomographique quatre, à quatre variables, qui peut toujours être amenée à la forme

$$(3)\qquad g_1 g_2 g_3 g_4 + \Sigma \gamma_{ij} g_i g_j + \Sigma \delta_i g_i + \varepsilon = 0 \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3, 4),$$

est représentable par un nomogramme à double alignement, à charnière rectiligne (**28** et **30**). Il a trouvé d'abord que, pour que les variables de cette équation pussent se grouper dans une équation de la

forme $F_{12} = F_{34}$, il fallait que l'on eût

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{23}} = \frac{\gamma_{14}}{\gamma_{24}},$$
$$\frac{\delta_3}{\delta_4} = \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{14}} = \frac{\gamma_{23}}{\gamma_{24}}.$$

Clark a remarqué que les conditions précédentes se réduisaient à trois, savoir

$$\frac{\delta_1\delta_3}{\gamma_{13}} = \frac{\delta_1\delta_4}{\gamma_{14}} = \frac{\delta_2\delta_3}{\gamma_{23}} = \frac{\delta_2\delta_4}{\gamma_{24}},$$

et que, de plus, la valeur commune ρ de ces rapports devait être donnée par

$$\rho = \varepsilon - \gamma_{12}\gamma_{34}.$$

Ainsi complétées, les conditions sont suffisantes, attendu que, si elles sont remplies, on peut mettre l'équation (3) sous la forme (1)

$$\frac{g_1 g_2 + \gamma_{34}}{\delta_1 g_1 + \delta_2 g_2 + \rho} = \frac{-(\delta_3 g_3 + \delta_4 g_4 + \rho)}{\rho(g_3 g_4 + \gamma_{12})}. \tag{4}$$

L'équation étant ainsi écrite, il suffit de désigner par g la valeur commune de ses deux membres et de représenter simultanément les deux équations

$$\delta_1 g_1 g + \delta_2 g_2 g - g_1 g_2 + \rho g - \gamma_{34} = 0, \tag{5}$$
$$\rho g g_3 g_4 + \delta_3 g_3 + \delta_4 g_4 + \gamma_{12}\rho g + \rho = 0, \tag{6}$$

en leur affectant une échelle (g) commune qui constituera la charnière, ce qui est toujours licite quand la représentation est possible, puisque dans chacun des nomogrammes partiels, on peut disposer arbitrairement d'une des trois échelles.

Les discriminants des équations (5) et (6), l'une et l'autre d'ordre nomographique trois, sont d'ailleurs

$$\Delta = \rho^2 + 4\delta_1\delta_2\gamma_{34},$$
$$\Delta' = \rho^2(\rho^2 + 4\delta_3\delta_4\gamma_{12}).$$

Les équations (5) et (6) peuvent être représentées chacune par un

(1) La notation ne doit prêter ici à aucune confusion, étant entendu que γ_{12}, qui entre dans le second membre, et γ_{34}, dans le premier, sont des coefficients et non des fonctions.

nomogramme conique (n° 17) dont l'échelle rectiligne soit l'échelle (g) déjà choisie.

Il est bien clair, sans que nous y insistions davantage, qu'on peut, à partir de là, multiplier autant qu'on le veut le nombre des alignements. On a ainsi, dans le cas des points alignés, la généralisation analogue à celle que constituent les systèmes ramifiés pour les lignes concourantes.

20. **Nomogrammes à index parallèles ou en équerre.** — Les nomogrammes à index parallèles, envisagés en premier lieu par M. Béghin (**1**), de même que ceux à index en équerre, par M. Goedseels (**6**), ont été rattachés au double alignement par M. Soreau comme suit :

Lorsque l'équation générale représentable par double alignement, avec charnière rectiligne, a été mise sous la forme (1) du numéro précédent, on peut la regarder comme exprimant le fait que les quatre points

$$x = \frac{f_i}{h_i}, \qquad y = \frac{g_i}{h_i}, \qquad z = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

$$x = \frac{f_j}{h_j}, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{g_j}{h_j} \qquad (j = 3, 4),$$

sont dans un même plan, les droites P_1P_2 et P_3P_4 se coupant dès lors sur Ox qui forme la charnière, lorsque le plan Oxz est rabattu sur Oxy.

Or, si, dans ce déterminant (1), on remplace les éléments de la dernière colonne par leur somme avec les éléments correspondants de la troisième, et que l'on permute les deuxième et quatrième colonnes, on le met sous la forme

$$\begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 0 & g_1 \\ f_2 & h_2 & 0 & g_2 \\ f_3 & h_3 & g_3 & g_3 \\ f_4 & h_4 & g_4 & g_4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que les quatre points

$$x = \frac{f_i}{g_i}, \qquad y = \frac{h_i}{g_i}, \qquad z = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

$$x = \frac{f_j}{g_j}, \qquad y = \frac{h_j}{g_j}, \qquad z = 1 \qquad (j = 3, 4)$$

sont dans un même plan. Mais ici les droites P_1P_2 et P_3P_4, situées dans les plans parallèles $z = 0$ et $z = 1$, sont parallèles, et il en est de même de leurs projections sur le plan Oxy, d'où le nomogramme à index parallèles (1) dont la notation est la même que celle du nomogramme à double alignement à la condition que la charnière soit confondue avec la droite à l'infini du plan, ce que nous exprimerons par la notation

$$\begin{array}{lll} P_1 \rightarrowtail I' & P_2 \rightarrowtail I' & \zeta_\infty \rightarrowtail I' \\ \zeta_\infty \rightarrowtail I'' & P_3 \rightarrowtail I'' & P_4 \rightarrowtail I''. \end{array}$$

Pour passer de là aux index en équerre, il suffit de faire tourner les systèmes (z_3) et (z_4), donc aussi l'index I'', d'un angle droit, ce qui revient à remplacer la seconde ligne ci-dessus par

$$x = \frac{h_j}{g_j}, \qquad y = -\frac{f_j}{g_j} \qquad (j = 3, 4).$$

La notation du nomogramme devient alors

$$P_1 \rightarrowtail I' \qquad P_2 \rightarrowtail I' \qquad P_3 \rightarrowtail I'' \qquad P_4 \rightarrowtail I''.$$

21. Nomogrammes à index circulaire. — C'est encore M. Goedseels (**6**) qui, en généralisant le mode de liaison graphique entre points cotés constitué par l'alignement, a envisagé tout d'abord les nomogrammes sur lesquels l'index rectiligne est remplacé par un index circulaire.

Nous avons, de notre côté, formé, pour la première fois, le type général des équations correspondantes de la façon que voici :

Si α et β sont les coordonnées variables du centre du cercle de rayon r formant l'index circulaire, le contact avec ce cercle des trois points cotés

$$x = f_i, \qquad y = g_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

s'exprime, si l'on pose

$$f_i^2 + g_i^2 - r^2 = h_i,$$

(1) Si l'index est tracé sur une équerre transparente, on le transporte de sa première à sa seconde position par glissement le long d'une règle; on peut aussi se servir d'un transparent portant un faisceau de droites parallèles suffisamment rapprochées.

par les trois équations

$$\alpha^2+\beta^2-2f_i\alpha-2g_i\beta+h_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Le type d'équation cherché résultera de l'élimination de α et β entre ces trois équations, problème d'algèbre identique à celui dont nous avons donné la solution au n° 11, lorsque, dans les équations considérées à cet endroit, on remplace simplement φ_i, f_i, g_i, respectivement par 1, $-2f_i$, $-2g_i$. Si donc posant ici

$$\Delta=|f_i \quad g_i \quad h_i| \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

nous représentons par Δ_f, Δ_g, Δ_h les déterminants déduits de celui-ci lorsqu'on y remplace la colonne des f_i, ou celle des g_i, ou celle des h_i par une colonne uniquement composée de 1, nous voyons que l'équation cherchée peut s'écrire

$$\Delta_f^2+\Delta_g^2+\Delta\Delta_h=0.$$

M. Gercevanoff (5) a usé d'index circulaires dans un autre type de nomogramme, que l'on peut considérer comme se rattachant aux nomogrammes à index parallèles, et qui consiste en ceci : les points z_2 et z_3 se trouvent à la fois sur un même cercle Γ dont le centre O est en coïncidence avec le point z_1. La notation est ici, lorsqu'on tient compte de ce qui a été dit au n° 7,

$$P_1 \equiv O \qquad P_2 \frown \Gamma \qquad P_3 \frown \Gamma.$$

Cette liaison graphique revenant à dire que les distances des points P_2 et P_3 au point P_1 sont égales entre elles (ce qui a conduit M. Gercevanoff à donner à ce type le nom de *nomogramme à points équidistants*), on voit que l'équation représentée aura la forme

$$(f_2-f_1)^2+(g_2-g_1)^2=(f_3-f_1)^2+(g_3-g_1)^2.$$

qui, suivant la propre remarque de M. Gercevanoff, peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} f_2-f_3 & 0 & g_3-g_2 \\ g_2+g_3 & 1 & f_2+f_3 \\ 2g_1 & 1 & 2f_1 \end{vmatrix}=0.$$

Si les systèmes (z_1) et (z_2) sont portés respectivement sur Ox et Oy, auquel cas $g_1 = 0$ et $f_2 = 0$, l'équation se réduit à

$$2 f_1 f_3 + g_2^2 - (f_3^2 + g_3^2) = 0,$$

qui rentre dans le type (1) du n° 16 et peut, par conséquent, être, en outre, représentée par un nomogramme à points alignés de genre un, grâce à la disjonction

$$u = 2\mu_1 f_1, \qquad v = \mu_2 g_2^2,$$
$$\mu_2 f_3 u + \mu_1 v - \mu_1 \mu_2 (f_3^2 + g_3^2) = 0.$$

22. Nomogrammes à réseau de points à deux cotes. Équation complète du troisième degré. — Nous avons vu au n° 12 que le principe des lignes concourantes ne permet pas la représentation intrinsèque d'une équation à plus de trois variables, faute de pouvoir utiliser des éléments à plus d'une cote qui ne soient pas condensés, ce qui revient à dire qu'une telle équation n'est ainsi représentable que moyennant sa dissociation en équations ne contenant pas chacune plus de trois variables. Mais, lorsque les éléments à une cote intervenant dans un nomogramme à trois variables ne sont que des points, ce qui est le cas pour les points alignés, il suffit de remplacer ces systèmes de points à une cote par des réseaux de points à deux cotes (qui, eux, ne sont pas condensés) pour obtenir la représentation intrinsèque de certaines équations qui, non susceptibles de dissociation, ne sauraient être représentées en lignes concourantes (1). De telles équations ne sont pas rares dans les applications. La méthode des points alignés a permis d'en aborder systématiquement une vaste catégorie, réduisant ainsi, pour la première fois, à une représentation intrinsèque un nombre de dimensions supérieur à trois.

Si maintenant, dans un nomogramme quelconque à points alignés,

---

(1) Certaines équations peuvent, *ad libitum*, être représentées avec ou sans dissociation. Nous avons notamment démontré que les équations représentables à la fois par double alignement, avec charnière rectiligne, et par simple alignement, avec réseau de points à deux cotes, sont celles de la forme (2) du n° 19, et nous avons fait connaître la transformation géométrique permettant de passer du nomogramme du premier type à celui du second (n° 64 de la liste supplémentaire ajoutée à 21 dans la *Bibliographie* finale).

nous remplaçons chaque échelle par un réseau de points à deux cotes, nous obtenons une représentation intrinsèque, non dissociable, de l'équation

$$\begin{vmatrix} f_{12} & g_{12} & h_{12} \\ f_{34} & g_{34} & h_{34} \\ f_{56} & g_{56} & h_{56} \end{vmatrix} = 0.$$

Tel est, en plus de ceux qui ont déjà été signalés au n° **14**, l'avantage capital qu'offre la méthode des points alignés. Parmi les équations de ce type, celles qui se rencontrent le plus fréquemment dans les applications sont celles qui dérivent de la forme (1) du n° **16** par substitution d'un réseau (z_3, z_4) à la simple échelle (z_3), c'est-à-dire qui s'écrivent

$$f_1 g_{34} + f_2 h_{34} + f_{34} = 0,$$

et pour lesquelles, par conséquent, la disjonction s'effectue sous la forme

$$u = \mu_1 f_1, \qquad v = \mu_2 f_2,$$

et

$$\mu_2 g_{34} u + \mu_1 h_{34} v + \mu_1 \mu_2 f_{34} = 0,$$

ou, comme on l'a vu au n° **6**,

$$x = \delta \frac{\mu_1 h_{34} - \mu_2 g_{34}}{\mu_1 h_{34} + \mu_2 g_{34}}, \qquad y = \frac{-\mu_1 \mu_2 f_{34}}{\mu_1 h_{34} + \mu_2 g_{34}}.$$

Cette méthode permet la représentation de toute équation algébrique quadrinome, et notamment celle de l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + n z^2 + p z + q = 0.$$

Si l'on pose ici, comme pour l'équation trinome au n° **16**,

$$u = \mu p, \qquad v = \mu q,$$

il vient, pour le système (n, z),

$$z u + v + \mu (z^3 + n z^2) = 0$$

ou

$$x = \delta \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad y = \frac{-\mu z^2 (z + n)}{1 + z}.$$

Pour le détail de la construction, voir **21** (1re éd., p. 333; 2e éd., p. 302).

D'après ce qui a déjà été dit plus haut, tout autre type de nomogramme ne comportant que des systèmes de points à simple cote peut, par l'introduction de points à deux cotes, fournir des modes de représentation pour équations à plus de trois variables.

Pour n'en citer qu'un exemple, M. P. Luckey (**12**), en partant du type des nomogrammes à points équidistants de M. Gercevanoff (n° **21**), a envisagé des nomogrammes sur lesquels l'équidistance est prise entre points appartenant d'une part aux systèmes doublement cotés (z_1, z_2) et (z_3, z_4), d'autre part, aux systèmes doublement cotés (z_5, z_6) et (z_7, z_8), de sorte que les distances $P_{12}P_{34}$ et $P_{56}P_{78}$ soient égales. Un tel type de nomogramme rentre dans la catégorie qui sera étudiée au n° **27**. Si l'on suppose deux plans mobiles sur le plan où sont figurés les quatre systèmes doublement cotés, portant l'un des cercles Γ' de centre O', l'autre des cercles Γ'' de O'', chacun de ces cercles ayant pour cote son rayon r, on voit que la notation du nomogramme sera

$$P_{12} \equiv O' \qquad P_{34} \mid \Gamma'(r)$$
$$P_{56} \equiv O'' \qquad P_{78} \mid \Gamma''(r).$$

CHAPITRE IV.

NOMOGRAMMES A SYSTÈMES COTÉS MOBILES.

23. Définition générale. Théorie morphologique. — Pour multiplier sans dissociation le nombre des cotes affectées à un élément entrant dans un nomogramme, le moyen qui s'offre tout naturellement à l'esprit consiste à rendre mobile le système auquel appartient cet élément et à lui affecter comme cotes, outre celles qui servent à le définir dans ce système, les paramètres par lesquels on peut fixer la position de celui-ci.

Supposons d'abord deux plans Π et Π' appliqués l'un sur l'autre, dont l'un Π soit considéré comme fixe, l'autre Π' comme mobile, et qui portent respectivement des systèmes d'éléments cotés $E_1, E_2, \ldots$ d'une part, $E'_1, E'_2, \ldots$ de l'autre. Les déplacements de Π' par rapport à Π étant, dans le cas général, à trois degrés de liberté, il faudra, pour fixer ce plan Π' dans une position déterminée par rapport à Π, établir, de l'un à l'autre plan, trois contacts tels que $E_1 \mid E'_1$, $E_2 \mid E'_2$, $E_3 \mid E'_3$. A ce moment, l'ensemble des deux plans pourra n'être plus

considéré que comme n'en formant qu'un seul, sur lequel, dès lors, pourra être constaté un quatrième contact $E_4 - E'_4$.

Théoriquement, les éléments E_i et E'_i peuvent être supposés quelconques; pratiquement, sauf dans des cas d'une telle rareté qu'il est inutile de s'y arrêter, sur ces deux éléments en contact, l'un est un point, l'autre une ligne.

Pour qu'une représentation ainsi constituée soit intrinsèque, c'est-à-dire non dissociable en plusieurs autres distinctes portant chacune sur un moindre nombre de variables, il faut que les divers éléments soient pourvus de cotes sans l'intervention d'aucun système ramifié (un tel système introduisant, comme on l'a vu au n° **13**, autant de dissociations qu'il comporte de systèmes de liaison). On aura, par suite, le mode de représentation intrinsèque ainsi réalisable le plus général en supposant que chacun des quatre contacts a lieu entre une ligne à une cote et un point à deux, ce qui correspond à douze variables.

Mais cette condition nécessaire n'est pas suffisante. Il y a exception si, dans tous les déplacements permis au plan Π', les lignes intervenant dans l'un des contacts n'engendrent sur Π qu'un système géométriquement ∞^1, auquel cas, ce système peut figurer de façon permanente sur Π et y être coté par l'intermédiaire d'une dissociation; nous verrons une telle circonstance se produire lorsque les déplacements de Π' sur Π se bornent à une translation simple ou à une rotation, dans le cas d'un degré de liberté (n° **25**), à une translation double, dans le cas de deux degrés de liberté (n° **26**).

Ce qui précède est susceptible d'une généralisation immédiate : si l'on envisage m plans mobiles appliqués sur un plan fixe, la fixation de leur ensemble dans une position déterminée exigera $3m$ contacts; après quoi il n'y aura plus qu'à constater un dernier contact sur l'ensemble ainsi fixé. On peut donc dire qu'en pareil cas, la liaison graphique comprend $3m + 1$ contacts; en outre, pour que la représentation soit intrinsèque, il faut que chaque contact associe, au plus, une ligne à une cote à un point à deux cotes, ce qui correspond à $(3m + 1)$ variables.

Si, d'ailleurs, un même plan mobile intervient successivement dans plusieurs positions pour une même liaison graphique, il doit, dans chacune de ces positions, compter, au point de vue de la structure du nomogramme, pour un plan distinct. C'est ainsi qu'un nomogramme

à double alignement (n° 19) doit être regardé comme comportant deux plans mobiles Π′ et Π″ portant chacun un index I′ et I″, et un nomogramme à points équidistants généralisé (n° 22 *in fine*), deux plans mobiles Π′ et Π″ portant respectivement les systèmes de cercles concentriques Γ′ et Γ″.

Remarquons enfin qu'un élément mobile peut être *mixte*, soit qu'il emprunte, une fois fixée la position du plan sur lequel il est marqué, les cotes d'éléments avec lesquels il est en contact sur un plan autre que le sien, soit même, s'il s'agit d'un point, qu'il provienne de la rencontre de deux lignes appartenant à des plans différents. Si l'élément E′ du plan Π′ emprunte la cote z d'un élément de Π, on exprime ce fait par la notation $E'(\overline{z})$ [1], et si un point intervenant dans l'un des contacts provient de l'intersection des lignes L, de Π, et L′, de Π′, on le désigne par la notation $\underline{L.L'}$.

Lorsqu'on y regarde de près, on s'aperçoit que ce qui distingue les uns des autres les divers types particuliers de nomogrammes à éléments mobiles, c'est la répartition, entre les divers contacts qu'ils comportent, d'éléments *constants*, c'est-à-dire non cotés, que l'on peut, pour simplifier, représenter par la notation *o*. C'est, dès lors, le mode de distribution de tels éléments constants entre les divers contacts dont se compose la liaison graphique qui nous a servi de base pour la classification des divers types de nomogrammes à plans mobiles.

24. Nomogrammes à un plan mobile. — En ce qui concerne les nomogrammes à un plan fixe Π et un plan mobile Π′, étant donné que le numérotage des contacts est quelconque (car on peut toujours les permuter entre eux, et aussi permuter à la fois les deux éléments entrant dans chacun des contacts, ce qui revient à intervertir la notation de Π et Π′), on voit que l'on peut (en excluant le type pour lequel trois des contacts seraient de la forme $o \mapsto o$, puisque alors les plans Π et Π′, invariablement fixés l'un par rapport à l'autre, n'en formeraient plus qu'un) rassembler dans le tableau suivant tous

(1) Comme on peut toujours inscrire les cotes des lignes d'un système en leurs points de rencontre avec une ligne quelconque, sur laquelle elles déterminent une certaine échelle, on peut dire que les lignes mixtes sont des lignes mobiles dont l'échelle des cotes, portée sur un certain support, est fixe.

les types distincts possibles (¹) :

(II_1)	$E_1 \vdash o$	$E_2 \vdash o$	$o \vdash o$	$o \vdash o$
(II_2)	$E_1 \vdash o$	$o \vdash E'_2$	$o \vdash o$	$o \vdash o$
(III_1)	$E_1 \vdash o$	$E_2 \vdash o$	$E_3 \vdash o$	$o \vdash o$
(III_2)	$E_1 \vdash o$	$E_2 \vdash o$	$o \vdash E'_3$	$o \vdash o$
(III_3)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash o$	$o \vdash o$	$o \vdash o$
(IV_1)	$E_1 \vdash o$	$E_2 \vdash o$	$E_3 \vdash o$	$E_4 \vdash o$
(IV_2)	$E_1 - o$	$E_2 \vdash o$	$E_3 \vdash o$	$o \vdash E'_4$
(IV_3)	$E_1 \vdash o$	$E_2 \vdash o$	$o \vdash E'_3$	$o \vdash E'_4$
(IV_4)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash o$	$E_3 \vdash o$	$o \vdash o$
(IV_5)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash o$	$o \vdash E'_3$	$o \vdash o$
(IV_6)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$o \vdash o$	$o \vdash o$
(V_1)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash o$	$E_3 \vdash o$	$E_4 \vdash o$
(V_2)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash o$	$E_3 \vdash o$	$o \vdash E'_4$
(V_3)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$E_3 \vdash o$	$o \vdash o$
(VI_1)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$E_3 \vdash o$	$E_4 \vdash o$
(VI_2)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$E_3 \vdash o$	$o \vdash E'_4$
(VI_3)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$E_3 \vdash E'_3$	$o \vdash o$
(VII)	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$E_3 \vdash E'_3$	$E_4 \vdash o$
$(VIII)$	$E_1 \vdash E'_1$	$E_2 \vdash E'_2$	$E_3 \vdash E'_3$	$E_4 \vdash E'_4$

Pour que l'un de ces types comporte une variété où ne figurent que des points cotés, il suffit que, dans chacun des contacts, intervienne une ligne non cotée, par suite que, dans la notation de chacun des contacts, entre un o. Cela donne les types (II_1), (II_2), (III_1), (III_2), (IV_1), (IV_2), (IV_3).

Il n'y aura encore que des points cotés lorsque les deux plans auront en commun une droite ou un cercle (auquel cas, leur mouvement relatif se réduira à un glissement le long de cette droite ou à une rotation autour du centre de ce cercle), cette droite ou ce cercle servant de support à une échelle ponctuelle sur chacun d'eux ; cette circonstance peut se produire pour le type (III_3).

D'autre part, il est essentiel de remarquer que, si les éléments

(¹) L'ordre dans lequel sont rangés les divers types diffère de celui que nous avions adopté dans nos précédentes publications ; c'est pourquoi nous y faisons usage d'un numérotage en chiffres romains, au lieu des chiffres arabes figurant dans ces publications.

appartenant à un même plan, qui interviennent dans trois des contacts, sont des droites parallèles Δ, ou des cercles concentriques Γ, et, *a fortiori*, une seule et même droite, ou un seul et même cercle, on peut donner aux deux plans, soit une translation dans le sens de ces droites, soit une rotation autour du centre commun de ces cercles, sans que les trois contacts ainsi établis cessent d'avoir lieu, ce qui entraîne l'indétermination du quatrième contact, lequel, par conséquent, peut être effectivement supprimé. Il faut nécessairement pour cela que la notation de ce quatrième contact soit de la forme $o \mid\!\!-\!\!\mid o$.

Les types susceptibles de cette variété sont donc (II_1), (II_2), (III_1), (III_2), (III_3), (IV_1), (IV_2), (IV_6), (V_3), (VI_3). Il va sans dire que, si les droites Δ ou les cercles Γ intervenant à la fois dans plusieurs des contacts sont cotés, c'est que les systèmes auxquels ils appartiennent sont géométriquement les mêmes, mais avec des graduations différentes pour les diverses variables qui s'y rapportent.

Afin de rappeler que le quatrième contact est indéterminé on peut le désigner (simplement pour mémoire) par la notation $\gg \mid\!\!-\!\!\mid \ll$. C'est ainsi que la notation symbolique des nomogrammes à points alignés sera, si l'on représente par Δ' une droite unique tracée sur le plan Π',

$$P_1 \mid\!\!-\!\!\mid \Delta' \quad P_2 \mid\!\!-\!\!\mid \Delta' \quad P_3 \mid\!\!-\!\!\mid \Delta' \quad \gg \mid\!\!-\!\!\mid \ll.$$

Pour avoir maintenant des types pratiquement utilisables de nomogrammes à un plan mobile, il n'y a plus qu'à particulariser la nature géométrique de certains des éléments figurant dans les notations précédentes.

C'est ce qui va être fait dans les numéros suivants. Mais, auparavant, nous définirons deux modes de transformation qui auront un rôle à jouer dans cette théorie.

Si tous les points M du plan, qui appartiennent à une même parallèle quelconque PP_0 à l'axe Δ, coupant la ligne L en P et la ligne L_0 en P_0, sont reportés, sur cette même droite PP_0, en des positions M_0 telles que tous les segments MM_0 soient égaux au segment PP_0, on dit qu'il y a *anamorphose parallèle à* Δ, *de* L *en* L_0.

Si, dans la définition précédente, on remplace les droites parallèles à Δ par des cercles de centre O, et les segments pris sur ces droites par des arcs pris sur ces cercles, on dit qu'il y a *anamorphose concentrique autour de* O, *de* L *en* L_0.

Nous allons maintenant passer en revue quelques-uns des princi-

paux types de nomogrammes à plan mobile, en les faisant systématiquement dériver des types tout à fait généraux ci-dessus définis, bien que ceux d'entre eux qui sont déjà usuels aient été tirés par leurs premiers auteurs de considérations n'ayant entre elles aucun lien apparent.

25. Systèmes cotés à un degré de liberté. Systèmes glissants et systèmes tournants. — Pour que les déplacements de Π' sur Π n'aient qu'un degré de liberté, il faut que deux points de Π' aient sur Π des trajectoires déterminées; autrement dit, que deux des quatre contacts constituant la liaison graphique sur le nomogramme aient lieu entre éléments constants, c'est-à-dire répondent à la notation $o \rightarrowtail o$; d'où il résulte que les nomogrammes correspondants appartiennent nécessairement à l'un des types (II_1), (II_2), (III_3) et (IV_6).

Parmi ces déplacements de Π' à un degré de liberté, les plus simples sont ceux qui se bornent à une translation ou à une rotation.

Dans le cas de la translation, l'axe $O'x'$ restant parallèle à Ox, on peut supposer que l'origine O' ait sur Π une trajectoire c quelconque; mais il suffit de faire subir à tout l'ensemble de la figure, aussi bien sur Π' que sur Π, une anamorphose parallèle à Oy, de c en Ox (n° 24), pour reconnaître que l'on ne porte aucune atteinte à la généralité en supposant que la trajectoire de O' se réduise à Ox, ce qui revient à définir le déplacement de Π' par rapport à Π par le simple glissement de $O'x'$ le long de Ox, qui s'exprime par $Ox \equiv O'x'$. On a alors affaire à un *système glissant*.

Dans le cas de la rotation, on peut toujours supposer qu'elle a lieu autour de O mis en coïncidence avec O', ce qui s'exprime par $O \equiv O'$. On a ainsi un *système tournant*.

On peut d'ailleurs remarquer que, pour chacun des deux contacts entre point et ligne, qui s'ajoutent à l'une ou l'autre des coïncidences $Ox \equiv O'x'$ et $O \equiv O'$, les points peuvent toujours être supposés appartenir à Π, les lignes à Π'. En effet, dans le cas d'un système glissant, si le point $x' = a$, $y' = b$ de Π' se trouve sur la ligne $f(x, y) = o$ de Π, le point $x = -a$, $y = b$ de Π se trouve sur la ligne $f(-x', y') = o$ de Π', et, dans le cas d'un système tournant, si le point $x' = a$, $y' = b$ de Π' se trouve sur la ligne $f(x, y) = o$ de Π, le point $x = -b$, $y = -a$ de Π se trouve sur la ligne $f(-y', -x') = o$ de Π'.

Remarquons encore que si les deux lignes L'_1 et L'_2 de Π' entrant dans ces deux contacts sont constantes, c'est-à-dire sans cote, elles peuvent être remplacées par une droite unique D' perpendiculaire à Ox dans le cas du système glissant, ou passant par O dans le cas du système tournant. Il suffit, en effet, d'appliquer à l'ensemble des points (P_1) et (P_2) de Π, à mettre en contact avec ces lignes, une anamorphose parallèle à Ox dans un cas, concentrique à O dans l'autre, de L'_1 en D' pour les points (P_1), de L'_2 en D' pour les points (P_2).

Si les droites L'_1, ou L'_2, appartiennent à un système à une cote engendré sur Π' par translation d'une même ligne dans le sens de $O'x'$ pour le système glissant, par rotation autour de O pour le système tournant, une anamorphose parallèle à Ox, ou concentrique à O, de l'une des lignes L'_1, ou L'_2, en une droite D' perpendiculaire à Ox dans un cas, ou passant par O dans l'autre (cette anamorphose étant pratiquée à la fois sur Π et sur Π'), transforme les systèmes (L'_1) et (L'_2) en systèmes de droites perpendiculaires à Ox ou issues de O.

Les dernières remarques montrent que, dans le cas des lignes L'_1 et L'_2 constantes, le nomogramme se réduit à l'accolement de deux nomogrammes à lignes concourantes, réalisé par un système de liaison que constituent des perpendiculaires à Ox, dans un cas (échelles binaires accolées), des droites issues de O, dans l'autre; et que, dans le cas de systèmes (L'_1) et (L'_2) engendrés par translation le long de $O'x'$, dans un cas, par rotation autour de O', dans l'autre, il y a également dissociation, d'après ce qui a été vu au n° **23**, puisque, dans ces deux cas, les lignes (L'_1) ou (L'_2) n'engendrent sur Π dans les déplacements relatifs (translation le long de $O'x'$ ou rotation autour de O) de Π' que des systèmes ∞^1.

On n'aura donc de représentation intrinsèque — et, dès lors, à six variables — avec de tels nomogrammes que si les lignes de Π' intervenant dans les contacts à éléments cotés appartiennent à des systèmes à une cote qui ne soient engendrés ni par translation d'une même ligne parallèlement à $O'x'$ dans un cas, ni par rotation autour de O' dans l'autre.

Donnons-nous donc, dans le cas des systèmes glissants, sur Π, les points P_{12} et P_{34}

$$(P_{12}) \qquad x = f_{12}, \qquad y = g_{12},$$

$$(P_{34}) \qquad x = f_{34}, \qquad y = g_{34},$$

et, sur Π', les lignes L'_5 et L'_6

$$(L'_5) \qquad F_5(x', y', z_5) = 0,$$
$$(L'_6) \qquad F_6(x', y', z_6) = 0.$$

Si α est l'abscisse de O' rapporté à Ox et Oy, les contacts $P_{12} \rightarrowtail L'_5$ et $P_{34} \rightarrowtail L'_6$ s'expriment par

$$F_5(f_{12} - \alpha, \quad g_{12}, \quad z_5) = 0,$$
$$F_6(f_{34} - \alpha, \quad g_{34}, \quad z_6) = 0,$$

d'où l'on tire

$$f_{12} - \alpha = G_5(g_{12}, z_5),$$
$$f_{34} - \alpha = G_6(g_{34}, z_6).$$

L'élimination de α entre ces équations fournit l'équation cherchée

$$(1) \qquad f_{12} - f_{34} = G_5(g_{12}, z_5) - G_6(g_{34}, z_6).$$

On peut, bien entendu, supposer plusieurs des six variables remplacées par des constantes, ce qui conduit à des types d'équations à cinq et quatre variables, également susceptibles de représentation intrinsèque.

Si les lignes L'_5 et L'_6 sont des droites perpendiculaires à Ox (dont les systèmes peuvent être engendrés au moyen d'un seul index mobile sur Π' en restant perpendiculaire à $O'x'$), les équations de ces lignes se réduisent à

$$x' = f_5, \qquad x' = f_6,$$

et l'équation finale devient

$$(2) \qquad f_{12} - f_{34} = f_5 - f_6,$$

dont, ainsi qu'on vient de le voir, la représentation n'est plus intrinsèque.

Remplaçant, dans cette équation, les variables z_2 et z_4 par des constantes (et, changeant ensuite la notation des indices), on a

$$(3) \qquad f_1 - f_2 = f_3 - f_4.$$

Les fonctions g n'entrant plus dans cette équation, on peut les remplacer par des constantes. Il reste donc finalement, sur Π, deux échelles simples $x = f_1$ et $x = f_2$, portées sur des parallèles à Ox; sur Π' deux faisceaux de perpendiculaires à $O'x'$, engendrés au moyen

d'un index unique (porté par un *curseur* glissant le long de $O'x'$) et dont les graduations $x' = f_3$, $x' = f_4$ peuvent être portées sur des parallèles à $O'x'$. On a réalisé ainsi le type de la *règle à calcul* ordinaire (1) qui, lorsque l'on prend $f_i = \log \varphi_i$ (pour $i = 1, 2, 3, 4$), fournit la représentation de l'équation

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_3}{\varphi_4}.$$

On peut aussi, dans (2), remplacer les échelles (z_5) et (z_6) par des échelles binaires (z_5, z_6) et (z_7, z_8), ce qui conduit à la représentation de

$$f_{12} - f_{34} = f_{56} - f_{78}. \tag{4}$$

Passons maintenant au cas des systèmes tournants. Si les systèmes des points P_{12} et P_{34} sont définis, sur Π, par

$$(P_{12}) \qquad x = \varphi_{12}, \quad y = \psi_{12},$$
$$(P_{34}) \qquad x = \varphi_{34}, \quad y = \psi_{34},$$

et les lignes L'_5 et L'_6, sur Π', par

$$(L'_5) \qquad F_5(x', y', z_5) = 0,$$
$$(L'_6) \qquad F_6(x', y', z_6) = 0.$$

on voit, en appelant ω l'angle que $O'x'$ fait avec Ox, que les contacts $P_{12} \vdash L'_5$, $P_{34} \vdash L'_6$ s'expriment par

$$F_5(\varphi_{12}\cos\omega + \psi_{12}\sin\omega, \varphi_{12}\cos\omega - \psi_{12}\sin\omega, z_5) = 0,$$
$$F_6(\varphi_{34}\cos\omega + \psi_{34}\sin\omega, \varphi_{34}\cos\omega - \psi_{34}\sin\omega, z_6) = 0.$$

L'élimination de ω entre ces équations ferait connaître l'équation représentée ; cette élimination ne saurait être effectivement opérée que si la forme de F_5 et F_6 était connue. Si les lignes L'_5 et L'_6 sont toutes des droites issues de O' confondu avec O, les équations $F_5 = 0$ et $F_6 = 0$ prennent la forme

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\psi_5}{\varphi_5}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{\psi_6}{\varphi_6},$$

(1) La règle à calcul classique dont l'invention, due à Oughtred, Wingate et Seth Partridge, remonte au milieu du XVII^e^ siècle, est donc un des plus anciens instruments à échelles cotées qui se trouvent rentrer *a posteriori* dans la catégorie des nomogrammes.

et les conditions de contact s'écrivent

$$\psi_5(\varphi_{12}\cos\omega + \psi_{12}\sin\omega) = \varphi_5(\psi_{12}\cos\omega - \varphi_{12}\sin\omega),$$
$$\psi_6(\psi_{34}\cos\omega + \psi_{34}\sin\omega) = \varphi_6(\psi_{34}\cos\omega - \varphi_{34}\sin\omega),$$

entre lesquelles l'élimination de ω est immédiate et donne

$$\frac{\varphi_5\psi_{12} - \varphi_{12}\psi_5}{\varphi_5\varphi_{12} + \psi_5\psi_{12}} = \frac{\varphi_6\psi_{34} - \varphi_{34}\psi_6}{\varphi_6\varphi_{34} + \psi_6\psi_{34}},$$

qui, si l'on pose, d'une manière générale,

$$\frac{\psi_i}{\varphi_i} = \operatorname{arc\,tang} f_i,$$

se transforme en

$$\operatorname{tang}(f_{12} - f_5) = \operatorname{tang}(f_{34} - f_6)$$

ou

$$f_{12} - f_5 = f_{34} - f_6.$$

On retombe ainsi sur la forme (2) ci-dessus.

Les échelles f_5 et f_6 étant ici portées sur des cercles de centre O, on peut répéter, à cette différence de disposition près, et, par suite, en remplaçant les droites parallèles à Ox par des cercles de centre O, tout ce qui a été dit ci-dessus à propos des systèmes glissants, pour aboutir au type du *cercle à calcul* ordinaire (1), équivalent, au point de vue de l'usage, à la règle à calcul.

26. Systèmes cotés à deux degrés de liberté. Systèmes orientés. — Le plan Π' aura, par rapport à Π, des déplacements à deux degrés de liberté lorsqu'un seul des quatre contacts constituant la liaison graphique du nomogramme sera de la forme $o \mapsto o$. En conséquence, tous les nomogrammes rentrant dans cette catégorie appartiennent à l'un des types (III_1), (III_2), (IV_4), (IV_5), (V_3), (VI_3).

Parmi les nomogrammes de cette espèce, les plus importants à considérer au point de vue des applications sont ceux dans lesquels le plan Π' a une orientation fixe, assurée par la condition que l'axe $O'x'$ reste parallèle à l'axe Ox, condition qui, si l'on désigne par x_∞ le point à l'infini sur Ox, se traduit par le contact

$$x_\infty \mapsto O'x'.$$

(1) La première idée de l'échelle logarithmique circulaire est due à Oughtred (1632), et a été utilisée pour la première fois dans un cercle à calcul par Biler (1696).

Les systèmes cotés portés par Π' sont, dès lors, *orientés*. M. Margoulis (**13**) s'est livré à une étude approfondie des nomogrammes de cette sorte, dont il a réalisé un très grand nombre d'applications du plus haut intérêt, notamment à l'aérodynamique et à l'aéronautique.

Ainsi que dans le cas des systèmes glissants et tournants, nous observerons qu'un contact entre point pris sur Π' et ligne prise sur Π peut toujours être remplacé par un contact entre ligne prise sur Π' et point pris sur Π, attendu que, si le point $x'=a, y'=b$ de Π' se trouve sur la ligne $f(x,y)=0$ de Π, le point $x=-a, y=-b$ de Π se trouve sur la ligne $f(-x',-y')=0$ de Π'. Cette observation, en permettant de ne considérer que des contacts entre points de Π et lignes de Π', fait rentrer tous les nomogrammes correspondants dans les types (III_4), (IV_4) (V_3) et (VI_3).

Le type le plus général de cette espèce, rentrant dans (VI_3), qui fournira une représentation intrinsèque, sera celui qui, dans chacun des trois contacts autres que $x_\infty \vdash \mathrm{O}'x'$, associera un point à deux cotes pris sur Π à une ligne à une cote prise sur Π', en vertu de la notation

$$x_\infty \vdash \mathrm{O}'x' \quad \mathrm{P}_{12} \vdash \mathrm{L}'_7 \quad \mathrm{P}_{34} \vdash \mathrm{L}'_8 \quad \mathrm{P}_{56} \vdash \mathrm{L}'_9.$$

Il s'appliquera donc à une équation à neuf variables. Pour former cette équation, si le point P_{ij} est défini sur Π par

$$(\mathrm{P}_{ij}) \qquad x=f_{ij}, \qquad y=g_{ij},$$

et la droite L'_k, sur Π', par

$$(\mathrm{L}_k) \qquad \mathrm{F}_k(x', y', z_k)=0,$$

il faudrait, — si, dans la position considérée, les coordonnées de O', rapportées aux axes $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$ sont α et β, — éliminer α et β entre les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{F}_7(f_{12}-\alpha, \quad g_{12}-\beta, \quad z_7)=0, \\ \mathrm{F}_8(f_{34}-\alpha, \quad g_{34}-\beta, \quad z_8)=0, \\ \mathrm{F}_9(f_{56}-\alpha, \quad g_{56}-\beta, \quad z_9)=0. \end{cases}$$

Cette élimination ne peut pas être explicitement opérée dans le cas général. Elle le peut si l'on particularise la nature de deux des trois fonctions $\mathrm{F}_7, \mathrm{F}_8, \mathrm{F}_9$, parce qu'on peut alors tirer α et β des deux équations correspondantes pour transporter leurs valeurs dans la troisième.

Un cas encore très étendu où cette élimination est réalisable (et qui

se rencontre, au reste, fréquemment dans les applications) est celui où deux des réseaux de points à deux cotes du plan Π se réduisent à un seul (z_1, z_2); dans ces conditions, les systèmes de lignes (z_7) et (z_8) de Π′ [qu'il nous est maintenant loisible d'appeler (z_5) et (z_6)] constituent eux-mêmes un réseau (z_5, z_6) dont les points sont mis en coïncidence avec les points du réseau (z_1, z_2), et la notation du nomogramme devient

$$x_\infty \mapsto \mathrm{O}'x' \quad \mathrm{P}_{12} \equiv \mathrm{P}'_{56} \quad \mathrm{P}_{34} \mapsto \mathrm{L}'_7.$$

Ici les équations (1) ci-dessus sont remplacées par

$$f_{12} - \alpha = f_{56},$$
$$g_{12} - \beta = g_{56},$$
$$\mathrm{F}(f_{34} - \alpha, \quad g_{34} - \beta, \quad z_7) = 0,$$

et l'élimination tout à fait immédiate de α et β entre ces équations donne

$$\mathrm{F}(f_{56} + f_{34} - f_{12}, \quad g_{56} + g_{34} - g_{12}, \quad z_7) = 0. \tag{2}$$

Pour mieux faire ressortir l'intérêt d'un tel type de nomogramme, fournissant une représentation intrinsèque de certaines équations à sept variables (d'une forme, nous le répétons, fréquente dans les applications, comme l'ont fait ressortir les intéressantes recherches de M. Margoulis), nous ferons remarquer que, par la méthode ordinaire des lignes concourantes, telle qu'elle est exposée au Chapitre II, la représentation de l'équation (2) exigerait l'intervention de deux systèmes ramifiés à six variables chacun, ce qui revient à une dissociation en onze nomogrammes partiels à trois variables, moyennant l'introduction de dix variables auxiliaires, et que, de plus, z_7 excepté, chacune des six autres variables z_i devrait donner lieu à deux systèmes cotés distincts, ce qui exclut la possibilité de prendre aucune de ces six variables comme inconnue. L'avantage résultant de l'emploi du plan mobile Π′ est ainsi, peut-on dire, rendu flagrant.

Certains types particuliers de nomogrammes, plus anciennement proposés, peuvent être rattachés *a posteriori* à ce type général, lorsqu'on y remplace plusieurs des variables par des constantes et que l'on spécialise la nature de certains éléments y intervenant.

C'est notamment le cas pour les nomogrammes à images logarithmiques de M. Mehmke (**21**, 1re éd., p. 376; 2e éd., p. 414) permettant la résolution des équations algébriques complètes jusqu'au cinquième degré.

Nous ferons enfin remarquer, par application de ce qui a été dit au n° 23, que la représentation ainsi obtenue cesse d'être intrinsèque lorsque l'un au moins des systèmes de lignes (L'_7), (L'_8), (L'_9) du cas général, dans tous les déplacements du plan Π' compatibles avec l'hypothèse faite, n'engendre sur Π qu'un système ∞^1 de lignes. Cela n'a lieu que si ce système ne comprend que des droites parallèles entre elles, ou se réduit à une seule droite constante. Quand ce dernier fait se produit à la fois pour les trois systèmes de Π' on tombe sur un cas dans lequel rentrent les abaques hexagonaux (n° 10). Et, en effet, nous avons déjà vu qu'un tel abaque pourvu de trois échelles binaires se dissocie en quatre nomogrammes à lignes concourantes (n° 14).

27. **Nomogrammes à plusieurs plans mobiles.** — Ainsi que nous l'avons vu au n° 23, nous pouvons maintenant multiplier le nombre des plans mobiles appliqués sur le plan fixe, et, tant que nous nous bornerons à ne faire entrer dans les $3m+1$ contacts constituant la liaison graphique du nomogramme que des lignes à une cote au plus et des points à deux cotes au plus, nous obtiendrons ainsi, sauf exception dans le cas de systèmes engendrés qui soient géométriquement ∞^1, des représentations intrinsèques pour des équations contenant un nombre de plus en plus grand de variables.

Si, par exemple, nous munissons la règle à calcul de plusieurs réglettes, nous obtenons la représentation d'équations de la forme

$$f_1+f_2+\ldots+f_n=f.$$

Il suffit pour cela de munir les bords de la règle des échelles des fonctions f_1 et f, et les diverses réglettes des échelles des fonctions f_2, f_3, $\ldots$, f_n et de mettre en contact, avec une même perpendiculaire à la direction commune des échelles, O_i avec z_{i-1} pour $i=2, 3, \ldots, n$, puis de lire la valeur de z qui, sur l'échelle de f, est en contact avec z_n de l'échelle de f_n, ce qui correspond (si l'on ramène les divers supports à la coïncidence) à la notation

$$\begin{aligned} z_1 &\mapsto O_2,\\ z_2 &\mapsto O_3,\\ &\cdots\cdots,\\ z_{n-1} &\mapsto O_n,\\ z_n &\mapsto z. \end{aligned}$$

Si nous remplaçons les échelles simples par des échelles binaires, nous obtenons la représentation (non intrinsèque, bien entendu, cette fois) de l'équation

$$f_{1,n}+f_{2,n+1}+\ldots+f_{n,2n-1}=f(z,z').$$

Voici maintenant un exemple de nomogramme à un nombre quelconque de plans mobiles à deux degrés de liberté, mais non orientés. Alors que, avec des règles glissant tout le long les unes des autres, on peut, comme on vient de le voir, effectuer une sommation de fonctions à une ou deux variables en nombre quelconque, M. H. Hansson a remarqué (**8**) qu'au moyen de règles s'appuyant simplement les unes sur les autres par un point, alors qu'un autre de leurs points reste sur une droite fixe, on peut effectuer la multiplication de ces fonctions.

Les axes O_1x et O_1y étant ceux du plan fixe, portons sur O_1y l'échelle de la fonction f_1 avec le module μ_1, puis considérons des axes O_2R_2, O_3R_3, ..., O_nR_n, dont les origines O_2, O_3, ..., O_n soient astreintes à rester toutes sur O_1x, et les repères $R_2, R_3, \ldots R_n$, distants de ces origines, respectivement de l_1, l_2, ..., l_n, à rester, R_2 sur O_1y, R_3 sur O_2R_2, ..., R_n sur $O_{n-1}R_{n-1}$. Dans ces conditions si les droites O_iR_i portent chacune l'échelle d'une fonction f_i, construite avec le module μ_i, et si $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ sont les cotes des points où $O_2R_2, O_3R_3, \ldots, O_nR_n$ s'appuient sur $O_1y, O_2R_2, \ldots, O_{n-1}R_{n-1}$, on voit bien aisément, par simple considération de triangles semblables, que l'ordonnée du point de O_nR_n coté z_n est donnée par

$$y=\frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{l_2\ldots l_n}f_1f_2\ldots f_n.$$

Si donc, ayant posé

$$\mu=\frac{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{l_2\ldots l_n},$$

on considère sur le plan fixe le faisceau des droites (z) définies par

$$y=\mu f(z),$$

dont la graduation pourra être marquée sur une parallèle à O_1y, on voit que l'on aura ainsi représenté l'équation

$$f_1f_2\ldots f_n=f,$$

la valeur correspondante de z étant celle qui sert de cote à la droite (z) sur laquelle tombe le point z_n.

La notation symbolique de ce nomogramme s'écrit, au reste, très simplement

$$\begin{aligned} &O_1 x \mapsto O_2 \qquad z_1 \;\; \text{II} \; R_2, \\ &O_1 x \mapsto O_3 \qquad z_2 \;\; \text{II} \; R_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots, \\ &O_1 x \mapsto O_n \qquad z_{n-1} \text{II} \; R_n. \\ &\qquad z \mapsto z_n. \end{aligned}$$

Ici encore, bien entendu, comme dans le cas des règles glissantes, on peut doubler le nombre des variables en remplaçant les échelles simples par des échelles binaires.

28. Systèmes mobiles à trois degrés de liberté. — Dans le cas où le plan Π' est doué de trois degrés de liberté, on peut chercher à former l'équation la plus générale ainsi représentée intrinsèquement, en faisant intervenir, dans chacun des quatre contacts, un point à deux cotes appartenant à Π et une ligne à une cote prise sur Π', d'où la notation

$$P_{12} \mapsto L'_9 \quad P_{34} - L'_{10} \quad P_{56} \mapsto L'_{11} \quad P_{78} \mapsto L'_{12},$$

ou, sous forme plus condensée,

$$P_{2i-1,2i} \mapsto L'_{8+i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Chaque système de points à deux cotes sera défini, sur Π, par des formules telles que

$$(P_{2i-1,2i}) \qquad x = f_{2i-1,2i}, \quad y = g_{2i-1,2i},$$

et chaque ligne a une cote, sur Π', par une équation telle que

$$(L'_{8+i}) \qquad F_{8+i}(x', y', z_{8+i}) = 0.$$

Si, d'ailleurs, α et β sont les coordonnées de O' rapporté à Ox et Oy, ω l'angle de $O'x'$ avec Ox, les formules de transformation de Π' à Π sont

$$\begin{aligned} x' &= (x - \alpha)\cos\omega + (y - \beta)\sin\omega, \\ y' &= -(x - \alpha)\sin\omega + (y - \beta)\cos\omega. \end{aligned}$$

Remplaçant x' et y' par ces valeurs dans les équations des quatre lignes L'_{8+i}, on n'a qu'à y substituer ensuite $f_{2i-1,2i}$ et $g_{2i-1,2i}$, pour

avoir quatre équations entre lesquelles il suffit d'éliminer α, β et ω pour obtenir l'équation cherchée. Cette élimination ne pourra naturellement pas s'effectuer en général, lorsque les équations des L'_{8+i} resteront quelconques. Voici toutefois un cas où, de façon analogue à ce qui a été vu pour les plans orientés, la forme de l'équation représentée peut être obtenue; c'est celui où les quatre systèmes de points à deux cotes se réduisent à deux P_{12} et P_{34}; dans ces conditions les lignes L'_9 et L'_{10}, d'une part, L'_{11} et L'_{12}, de l'autre (que nous pourrons maintenant dénoter L'_5 et L'_6, L'_7 et L'_8) devant passer, les premières par P_{12}, les secondes par P_{34}, il y aura en fait, coïncidence, d'une part, entre un point P_{12} et un point P'_{56}, d'autre part, entre un point P_{34} et un point P'_{78}. La notation du nomogramme sera devenue

$$P_{12} \equiv P'_{56}; \quad P_{34} \equiv P'_{78}.$$

Elle implique l'équidistance de P_{12} à P_{34}, d'une part, de P'_{56} à P'_{78}, de l'autre, et, par suite, l'équation représentée est de la forme

$$(f_{12} - f_{34})^2 + (g_{12} - g_{34})^2 = (f_{56} - f_{78})^2 + (g_{56} - g_{78})^2.$$

En somme, ce type de nomogramme, comme celui proposé par M. Luckey (n° 22), repose sur une constatation d'équidistance entre deux couples de points à deux cotes; il y a, au point de vue des possibilités de représentation, rigoureuse équivalence entre ces deux types.

Dans le procédé Luckey, la constatation de l'équidistance se fait au moyen de cercles de même rayon, de centres P_{12} et P_{56}, passant l'un par P_{34}, l'autre par P_{78}; ici la constatation se fait directement par la superposition de deux distances égales (1). Ce rapprochement offre l'intérêt de faire mettre, en quelque sorte, le doigt sur la distinction qui existe entre une représentation intrinsèque ou non. Celle qui vient d'être envisagée en dernier lieu est intrinsèque; celle rencontrée au n° 22 (*in fine*) ne l'est pas; la variable auxiliaire par laquelle y est pratiquée la dissociation apparaît, au reste, explicitement dans la notation; c'est le rayon r commun aux cercles Γ' et Γ''.

Ainsi, pour une même forme d'équation, la représentation, qui

(1) On se rend facilement compte du mode suivant lequel doit, en ce cas, être réalisée la liaison graphique : le point P'_{56} du plan Π' étant mis en coïncidence avec le point P_{12} du plan Π, on fait tourner Π' autour de ce point jusqu'à ce que la ligne z_7 du réseau (z_7, z_8) passe par le point P_{34}; dans cette position le point P_{78} est celui qui coïncide avec P_{34}.

n'était pas intrinsèque avec deux plans mobiles quand on se bornait à deux degrés de liberté, a pu le devenir avec un seul plan mobile quand on a ajouté un troisième degré de liberté.

Si, dans ce type de nomogramme, correspondant au plus grand nombre de variables pour lequel la représentation reste intrinsèque, on suppose les quatre systèmes de points à deux cotes réduits à quatre systèmes de points à une cote, la notation devient

$$P_1 \equiv P'_3 \quad P_2 \equiv P'_4,$$

et l'on retombe sur l'un des types mis en évidence par M. Goedseels (**6**), que nous avons retrouvés de notre côté (**20**) en déduisant, par une marche systématique de notre théorie morphologique, tous les types possibles de nomogrammes à un plan mobile, applicables à des équations à trois ou quatre variables et ne comportant comme éléments cotés que des points à une cote.

BIBLIOGRAPHIE.

[Il n'est fait mention dans cette liste que des ouvrages et mémoires auxquels renvoie le présent volume. A la fin de l'ouvrage **24** de cette liste, on trouvera un index bibliographique plus développé. Pour ce qui est des travaux personnels de l'auteur, voir ce qui est dit ci-dessous au n° **21**. Les références aux ouvrages qui comportent plusieurs éditions se rapportent, sauf avis contraire, à la dernière édition.]

1. Beghin (Maurice). — Sur une nouvelle classe d'abaques (*Génie civil*, t. 22, 1892, p. 124).

2. Blum. — Notice sur un instrument destiné au calcul rapide des terrassements (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1er semestre 1881, p. 455).

3. Boulad (Farid). — Notes et mémoires sur la disjonction des variables dans les équations d'ordre nomographique supérieur (*C. R. Acad. Sc.*, t. 150, 1910, p. 379; t. 156, 1913, p. 865; *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 39, 1911, p. 105; t. 40, 1912, p. 383; t. 41, 1913, p. 366).

L'ensemble de ces travaux est condensé dans la note annexe III de l'ouvrage **21**.

4. Clark (J.). — Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre (*Revue de Mécanique*, t. 21, 1907, p. 321 et 576).

5. Gercevanoff (N.). — Les principes du calcul nomographique (en russe), Saint-Pétersbourg, 1906.

6. Goedseels (E.). — Les procédés pour simplifier les calculs ramenés à l'emploi de deux transversales (Bruxelles, Lagaert; 1898).

7. Gronwall (F.-N.). — Sur les équations à trois variables, représentables par des nomogrammes à points alignés (*Journ. de Math. pures et appl.*, 6e série, t. 8, 1912, p. 59).

8. Hansson (H.). — Sur un procédé nouveau de multiplication des échelles fonctionnelles (*C. R. Acad. Sc.*, t. 175, 1922, p. 565).

9. Lalanne (Léon). — Mémoire sur les tables graphiques et sur la géométrie anamorphique (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1er semestre 1846, p. 1).

10. Lallemand (Ch.). — Les abaques hexagonaux. Mémoire autographié au service du N. G. F., 1885.

Le principe de la méthode n'a été publié qu'en 1886 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 102, p. 816.

11. Lecornu (Léon). — Sur le problème de l'anamorphose (*C. R. Acad. Sc.*, t. 102, 1886, p. 813).

12. Luckey (P.). Nomographische Darstellungsmöglichkeiten (*Zeitsch. f. ang. Math. u. Mech.*, t. 3, 1923, p. 49).

On doit au même auteur une étude très intéressante (*Unters. f. Math. u. Naturw.*, t. 29, 1923, p. 54), sur certains instruments anciennement imaginés à titre de solutions isolées de divers problèmes astronomiques, que l'on peut, *a posteriori*, rattacher aux principes généraux de la nomographie.

13. Margoulis (W.). — Les abaques à transparent orienté (*C. R. Acad. Sc.* t. 174, 1922, p. 1684).

14. Massau (J.). — Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, Livre III, part. 2, ch. III (*Ann. de l'Assoc. des ing. sortis des Ecoles sup. de Gand*, 1884).

15. Mehmke (R.). — Neues Verfahren zur Bestimmung der reellen wurzeln zweier numerischer algebraischer gleichungen mit zwei Unbekannten (*Zeitschr. f. Math. u. Ph.*, t. 35, 1890, p. 174).

L'extension aux racines complexes a paru dans le même recueil (t. 40, 1895, p. 15).

16. Ocagne (M. d'). — Procédé nouveau de calcul graphique (*Ann. des Ponts et Chaussées*, 2e semestre 1884, p. 531).

17. Ocagne (M. d'). — Coordonnées parallèles et axiales (*Nouv. Ann. de Math.*, 1884 et 1885).

Ce mémoire a été tiré à part sous forme d'une brochure, augmentée de la reproduction du mémoire précédent (Gauthier-Villars; 1885).

18 Ocagne (M. d'). — Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques (Paris, Gauthier-Villars; 1891).

C'est dans le titre de ce volume que le terme de « nomographie » a paru pour la première fois.

19. Ocagne (M. d'). — Sur les types les plus généraux d'équations représentables par des systèmes cotés de cercles et de droites (*Zeitsch. f. Math. u. Ph.*, t. 63, 1898, p. 269).

20. Ocagne (M. d'). — Application de la méthode nomographique la plus générale résultant de la superposition de deux plans aux équations à

trois et à quatre variables (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 26, 1898, p. 16).

21. OCAGNE (M. D'). — *Traité de Nomographie* (Paris, Gauthier-Villars; 1re édition, 1899; 2e édition, 1921).

Cet ouvrage contient la liste, comprenant 61 numéros, des publications de l'auteur relatives à la nomographie. Depuis qu'a paru la 2e édition, il y a lieu d'y ajouter :

62. Coup d'œil sur les principes fondamentaux de la nomographie (*Rev. gén. des Sc.*, t. 33, 1922, p. 230).

63. A propos de l'histoire de la nomographie (*Ibid.*, p. 620).

64. Sur les équations à quatre variables représentables à la fois par simple et par double alignement (*C. R. Acad. Sc.*, t. 177, 1923, p. 1273).

65. Le calcul nomographique avant la nomographie (sous presse dans le volume jubilaire de la *Société scientifique de Bruxelles*).

A la liste, qui figure dans la deuxième édition (p. XV et XVI), des exposés de la nomographie rédigés en diverses langues d'après la première édition, il convient d'ajouter :

En allemand, *Die Nomographie oder Fluchtlinienkunst*, par F. KRAUSS (Berlin, 1922); *Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln* (*Nomographie*), par P. WERKMEISTER (Berlin, 1923); *Die Herstellung gezeichneter Reckentafeln*, par O. LACMANN (Berlin, 1923); *Die Grundlagen der Nomographie*, par B. M. KONORSKI (Berlin, 1923); *Lehrbuch der Nomographie*, par H. SCHWERDT (Berlin, 1924).

En anglais, *The construction of graphical charts*, par J. PEDDLE (New-York, 1919); *The first Course in Nomography*, par BRODETSKY (Leeds University, 1920); *Graphical and Mechanical computation*, par J. LIPKA (New-York, 1921).

En japonais, *Nomographie*, par K. OGURA (Tokio, 1923).

22. OCAGNE (M. D'). — Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie (*Journ. de l'École Pol.*, 2e série, t. 8, 1903, p. 97).

23. OCAGNE (M. D'). — Sur les équations d'ordre Nomographique trois et quatre (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 35, 1907, p. 173).

24. OCAGNE (M. D'). — *Calcul graphique et Nomographie* (Paris, Doin; 1re édition, 1908; 2e édition, 1914; 3e édition, 1924).

25. OCAGNE (M. D'). — *Principes usuels de nomographie* (Paris, Gauthier-Villars; 1920).

26. POUCHET (L.). — *Arithmétique linéaire. Appendice* à l'ouvrage : *Échelles graphiques des nouveaux poids et mesures* (Rouen, 1795).

27. SAINT-ROBERT (P. DE). — De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen d'une règle glissante (*Mem. della R. Acad. di Sc. di Torino*, 2e série, t. 25, 1871, p. 53).

28. SOREAU (R.). — Contribution à la théorie et aux applications de la nomographie (*Mém. de la Soc. des Ing. civ.*, 2e volume de 1901, p. 191).

29. SOREAU (R.). — Nouveaux types d'abaques. La capacité et la valence en nomographie (*Ibid.*, 1er volume de 1906, p. 821).

30. SOREAU (R.). — *Nomographie. Théorie des abaques* (Paris, Chiron; 1921).

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

SYSTÈMES D'ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES COTÉS.

Pages.

1. Définitions 1
2. Échelles fonctionnelles 2
3. Systèmes de points cotés plus généraux. Emploi des coordonnées parallèles 3
4. Systèmes algébriques de points cotés. Cas des degrés un et deux 5
5. Systèmes de lignes cotées 7
6. Systèmes d'éléments doublement cotés. Éléments condensés. Réseaux de points à deux cotes 9

CHAPITRE II.

NOMOGRAMMES A LIGNES COTÉES.

7. Définitions et notations. Liaison et contact graphiques 11
8. Équations à deux variables 13
9. Équations à trois variables 14
10. Anamorphose rectiligne. Cas des faisceaux de droites parallèles. 16
11. Anamorphose circulaire. Équations quadratiques 18
12. Équations à quatre variables, dissociables en deux équations à trois variables. Échelles binaires 20
13. Équations à un nombre quelconque de variables, dissociables en une suite d'équations à trois variables. Systèmes ramifiés 23

CHAPITRE III.

NOMOGRAMMES A POINTS COTÉS.

14. Principe des points alignés 26
15. Nomogrammes de genre zéro 30
16. Nomogrammes de genre un. Équations trinomes 33
17. Nomogrammes de genre deux. Type conique 36
18. Nomogrammes de genre trois 37
19. Nomogrammes à double alignement 40
20. Nomogrammes à index parallèles ou en équerre 43

Pages

21. Nomogrammes à index circulaire 44
22. Nomogrammes à réseaux de points à deux cotes. Équation complète du troisième degré 46

CHAPITRE IV.

NOMOGRAMMES A SYSTÈMES COTÉS MOBILES.

23. Définition générale. Théorie morphologique 48
24. Nomogrammes à un plan mobile 50
25. Systèmes cotés à un degré de liberté. Systèmes glissants et systèmes tournants 53
26. Systèmes cotés à deux degrés de liberté. Systèmes orientés 57
27. Nomogrammes à plusieurs plans mobiles 60
28. Systèmes mobiles à trois degrés de liberté 62

Bibliographie 64

75249 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie quai des Grands-Augustins 55