

ÉRIC TÉROUANNE

Distorsion entre deux distributions d'une variable nominale

Mathématiques et sciences humaines, tome 131 (1995), p. 29-38

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1995__131__29_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DISTORSION ENTRE DEUX DISTRIBUTIONS D'UNE VARIABLE NOMINALE

Éric TÉROUANNE¹

RÉSUMÉ — *On montre comment les outils classiquement utilisés pour parler de concentration d'une mesure par rapport à une autre, considérée comme référence, permettent d'introduire la notion de distorsion entre deux mesures, dans laquelle ces dernières jouent des rôles symétriques. Ceci permet de résoudre divers problèmes posés par l'étude des inégalités : évolutions paradoxales de deux sous-populations complémentaires, évaluation de la contribution de chaque modalité à la distorsion ou à son évolution.*

SUMMARY — *Distortion between two distributions of a nominal variable*
The tools classically involved in analyzing the concentration of one measure with respect to another, considered as a reference, are shown to allow introducing the notion of distortion between two measures, in which both of the latter play symmetrical roles. This allows solving various problems put by the study of inequalities : paradoxical evolutions of two complementary sub-populations, evaluation of the contribution of each modality to the distortion or to its evolution.

INTRODUCTION

Pour comparer une distribution de fréquences d'une variable nominale à une distribution de référence, on utilise classiquement la courbe de concentration de la première par rapport à la seconde, et l'indice qui lui est associé (De Finetti 1972, Barbut 84b, Cifarelli *et al.* 1987). Ces outils sont la généralisation de la courbe de Lorenz (1905) et de l'indice de Gini (1914) qui en constituent le cas particulier quand la distribution de référence est uniforme.

L'analyse de la concentration à la Lorenz - Gini confère aux deux mesures confrontées des rôles fondamentalement dissymétriques. Par exemple, la première est la distribution réelle des revenus dans une population, et la seconde est la distribution uniforme sur cette même population, considérée comme le modèle d'une répartition égalitaire. Pour étudier l'évolution de l'inégalité des revenus, on compare alors la façon dont les distributions réelles des revenus à diverses dates s'éloignent plus ou moins de l'uniforme. On a encore affaire à une situation dissymétrique quand on utilise la courbe de concentration pour caractériser la dépendance entre deux variables (Scarsini 1990). En effet on compare alors la distribution conjointe de ces deux variables au produit de leurs marginales, qui sert de référence en tant que modèle de l'absence de liaison.

¹ Département de Mathématiques et Informatique Appliquées, Université Paul Valéry, Montpellier III.

Par contre une telle dissymétrie ne s'impose pas quand on étudie la différence entre deux distributions réelles, par exemple quand on veut comparer l'origine sociale de deux catégories d'étudiants. Il semble pourtant que la pratique usuelle se ramène à une vision dissymétrique du problème qui consiste à étudier les concentrations de chacune des distributions par rapport à une distribution qui sert de référence, par exemple la distribution marginale obtenue en réunissant les deux catégories d'étudiants. L'étude de ces "courbes de concentrations adjointes" amène des effets paradoxaux (Barbut 1984a, b, Combessie 1984, 85).

Or il n'y a, sur le plan strictement mathématique, aucune différence entre la concentration d'une mesure p par rapport à une mesure q et celle de la mesure q par rapport à la mesure p . C'est pourquoi dans le cas d'une comparaison symétrique de deux mesures on préférera parler de *distorsion* entre elles. On propose ici une présentation des outils de comparaison inspirés de Lorenz et Gini qui met en évidence cette symétrie et qui en outre facilite l'analyse des contributions à la distorsion de chacune des modalités. Cette présentation permet de reformuler certains problèmes soulevés par la comparaison des inégalités.

DISTORSION ENTRE DEUX MESURES

Soient p et q deux distributions de fréquences d'une variable nominale, c'est à dire deux mesures positives de masse totale 1 sur un même ensemble E (de cardinal n) dépourvu de structure a priori. Pour comparer ces deux distributions on peut représenter dans un graphique orthonormé (figure 1a) chaque modalité $x \in E$ par le couple $(p(x), q(x))$. La diagonale (en pointillés) sépare les modalités qui sont *mieux représentées dans p que dans q* (au-dessous) de celles qui sont *mieux représentées dans q que dans p* (au-dessus).

La pente du segment reliant un point x à l'origine est la densité $q(x)/p(x)$ de la mesure q par rapport à la mesure p au point x (infinie si $p(x) = 0 \neq q(x)$). Elle induit un préordre total sur E . On départage arbitrairement les ex æquo de façon à en faire un ordre. On notera $(x,y)(q/p)$ si x est plus petit que y dans l'ordre de densité correspondant (comme dans la figure 1a), soit :

$$(x,y)(q/p) \Leftrightarrow \frac{q(x)}{p(x)} \leq \frac{q(y)}{p(y)} \Leftrightarrow (y,x)(p/q)$$

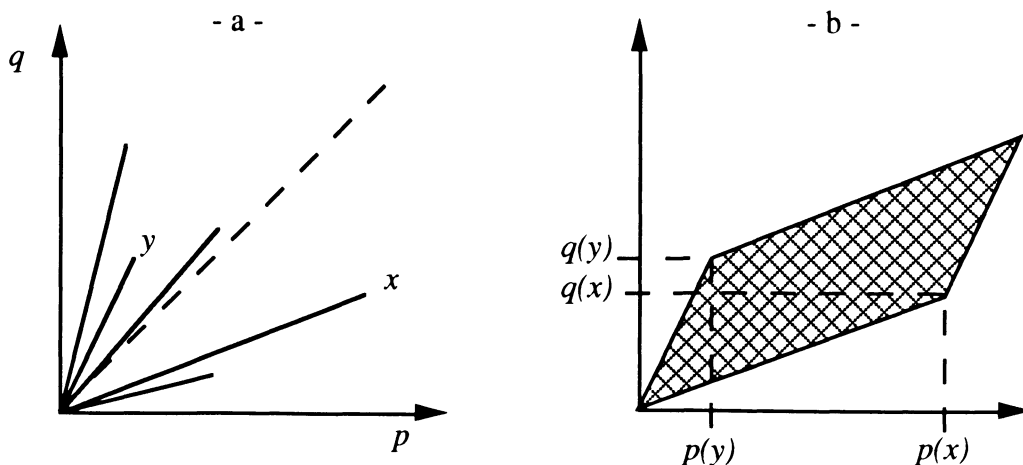


Figure 1. Comparaison de deux distributions de fréquence (a) et contribution à la distorsion des modalités x et y (b).

Intuitivement, la *distorsion* entre les deux mesures est d'autant plus forte que les modalités sont plus éloignées de la diagonale. Il n'y a pas de distorsion si $p = q$: les modalités sont alors toutes situées sur la diagonale. La distorsion est maximale si les mesures sont de support disjoint : les modalités sont alors toutes situées les unes sur un axe, les autres sur l'autre.

Pour analyser la distorsion entre p et q , on peut commencer par évaluer la *contribution* que lui apporte chaque paire de modalités. On dira que la paire de modalités $\{a,b\}$ n'apporte aucune contribution à la distorsion si l'importance relative de ces deux modalités est la même dans les deux distributions :

$$\frac{p(a)}{p(b)} = \frac{q(a)}{q(b)}$$

Dans un tel cas, les deux modalités seraient représentées dans la figure 1a par des segments colinéaires. Quand elles ne sont pas ainsi alignées, les modalités x et y forment avec l'origine la base d'un parallélogramme (figure 1b) dont la superficie est :

$$\delta_{\{x,y\}}(\{p,q\}) = |p(x)q(y) - p(y)q(x)|$$

Ce parallélogramme représente la *contribution* de la paire de modalités $\{x,y\}$ à la *distorsion* entre p et q . Il sera commode par la suite d'exprimer sa superficie comme la valeur absolue du déterminant :

$$\delta_{x,y}(p,q) = \begin{vmatrix} p(x) & p(y) \\ q(x) & q(y) \end{vmatrix} = p(x)q(y) - p(y)q(x) = -\delta_{y,x}(p,q) = \delta_{y,x}(q,p) = -\delta_{x,y}(q,p)$$

La *surface de distorsion* entre les deux mesures est la réunion des parallélogrammes associés aux $n(n-1)/2$ paires de modalités (figure 2a). On dira que la distorsion entre p et q est plus forte que la distorsion entre p' et q' si la surface de distorsion entre p et q contient entièrement la surface de distorsion entre p' et q' .

Pour quantifier cette différence, et pour éventuellement trancher au cas où les surfaces ne sont pas strictement comparables, on peut prendre pour *indice de distorsion* la superficie de la surface de distorsion. Notée $\delta(\{p,q\})$, elle est mesurée par la somme des valeurs absolues des déterminants correspondants. Cette grandeur, comprise entre 0 et 1, est symétrique en p et q :

$$\delta(\{p,q\}) = \sum_{\{x,y\}} \delta_{\{x,y\}}(\{p,q\})$$

La courbe de concentration de p par rapport à q , au sens de Lorenz, est le contour supérieur de la surface de distorsion (à une symétrie près, selon les auteurs). Le contour inférieur de la surface de distorsion est son symétrique par rapport au centre du carré. Une symétrie par rapport à la diagonale en fait, avec les mêmes conventions, la courbe de concentration de q par rapport à p .

On définit habituellement, à la suite de Gini, l'indice de concentration de la mesure p par rapport à la mesure q comme le double de la superficie comprise entre la courbe de concentration de p par rapport à q et la diagonale. Il est donc égal à la superficie $\delta(\{p,q\})$ de la surface de distorsion, et c'est également l'indice de concentration de q par rapport à p . C'est pourquoi nous parlerons, dans le contexte d'une analyse symétrique en p et q , de l'*indice de distorsion de Gini*.

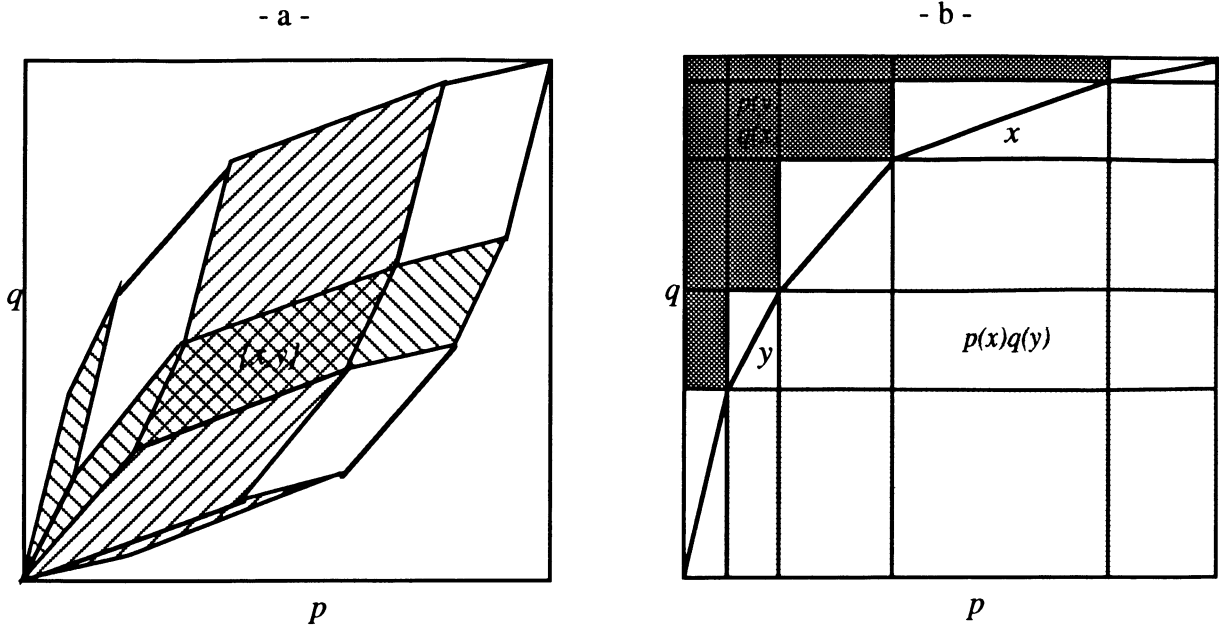


Figure 2. Surface de distorsion entre p et q , contributions de la paire $\{x,y\}$ (quadrillée), et des modalités x et y (hachurées) (a). La superficie de cette surface est la différence entre les superficies gris clair et gris foncé (b).

On peut se donner une autre représentation simple de cet indice. Dans la figure 2b, les modalités sont disposées, en abscisse comme en ordonnée, selon l'ordre (q/p) des densités. La courbe traversant les rectangles diagonaux (en blanc) est la courbe de concentration de p par rapport à q . A tout couple (x,y) de modalités différentes correspond un rectangle grisé de superficie $p(x)q(y)$. La contribution de la paire $\{x,y\}$ à la distorsion est la différence absolue entre les superficies des rectangles (x,y) et (y,x) . $\delta(\{p,q\})$ est donc une somme algébrique de superficies, dans laquelle les rectangles entièrement situés sous la courbe (en gris clair) sont comptés positivement et les rectangles entièrement situés au dessus (en gris foncé) sont comptés négativement.

On peut évaluer pour chaque modalité x sa contribution $\delta_x(\{p,q\})$ à l'indice de distorsion, en sommant les superficies des parallélogrames (ou des rectangles) qui la concernent. On assortit cette sommation d'un coefficient $1/2$ pour que la somme des contributions de toutes les modalités soit $\delta(\{p,q\})$, chaque parallélogramme (ou rectangle) étant pris en compte deux fois :

$$\delta_x(\{p,q\}) = \frac{1}{2} \sum_y \delta_{\{x,y\}}(\{p,q\})$$

On peut donc lire cette contribution de x à la distorsion comme la moitié de la superficie d'une bande de parallélogrammes (hachurés vers le haut à droite dans la figure 2a), tous construits sur des segments équipollents au segment x de la figure 1a.

La même quantité peut s'exprimer comme suit :

$$\delta_x(\{p,q\}) = \frac{1}{2} \left(p(x) \left[\sum_{(x,y)(q/p)} q(y) - \sum_{(y,x)(q/p)} q(y) \right] + q(x) \left[\sum_{(y,x)(q/p)} p(y) - \sum_{(x,y)(q/p)} p(y) \right] \right)$$

On peut donc lire $\delta_x(\{p,q\})$ dans la figure 2b comme la demi-somme algébrique (avec la même règle de signes que ci-dessus) des superficies comprises dans la ligne et la colonne correspondant à x .

LE CAS DES FONCTIONS DE CONCENTRATION ADJOINTES

On étudie une variable nominale dans une population qui est par ailleurs coupée en deux sous-populations A et B par un critère dichotomique (par exemple le sexe). On dispose donc de trois distributions de cette variable : on notera p_A et p_B les distributions dans chacune des sous-populations et p la distribution marginale, c'est-à-dire dans la population tout entière. Barbut (1984b) nomme adjointes les fonctions de concentration de p_A et p_B respectivement par rapport à p . On compare ici les distorsions entre p_A et p_B , entre p_A et p et entre p_B et p .

Si $\alpha \in [0,1]$ est la proportion d'individus de la classe A dans la population, et $1-\alpha$ la proportion d'individus de la classe B , on a pour tout x :

$$p(x) = \alpha p_A(x) + (1-\alpha)p_B(x)$$

Pour toute paire $\{x,y\}$ de modalités, on a alors :

$$(x,y)(p_A/p) \Leftrightarrow \frac{p(x)}{p_A(x)} \geq \frac{p(y)}{p_A(y)} \Leftrightarrow \alpha + (1-\alpha) \frac{p_B(x)}{p_A(x)} \geq \alpha + (1-\alpha) \frac{p_B(y)}{p_A(y)} \Leftrightarrow (y,x)(p_B/p_A)$$

et donc :

$$(x,y)(p_A/p) \Leftrightarrow (x,y)(p_A/p_B) \Leftrightarrow (y,x)(p_B/p_A) \Leftrightarrow (y,x)(p_B/p)$$

Autrement dit, l'ordre des densités de p_A par rapport à p est le même que par rapport à p_B , et c'est le dual de l'ordre des densités de p_B par rapport à p ou p_A . Il s'ensuit que pour toute paire $\{x,y\}$ de modalités on a :

$$\delta_{x,y}(p_A, p) = \alpha \delta_{x,y}(p_A, p_A) + (1-\alpha) \delta_{x,y}(p_A, p_B) = (1-\alpha) \delta_{x,y}(p_A, p_B)$$

Si l'on suppose $(x,y)(q/p)$, les quantités ci-dessus sont positives et cette relation exprime le fait que la contribution de la paire $\{x,y\}$ à l'indice de distorsion $\delta(\{p_A, p\})$ est inférieure, avec un coefficient $1-\alpha$ à sa contribution à $\delta(\{p_A, p_B\})$. Dans les mêmes conditions, la contribution de $\{x,y\}$ à l'indice de distorsion $\delta(\{p_B, p\})$ est :

$$\delta_{y,x}(p_B, p) = \alpha \delta_{y,x}(p_B, p_A) = \alpha \delta_{x,y}(p_A, p_B)$$

D'où il découle que, pour toute paire $\{x,y\}$:

$$\delta_{x,y}(p_A, p_B) = \delta_{x,y}(p_A, p) + \delta_{x,y}(p, p_B)$$

Ce qui est vrai pour chaque contribution l'est aussi pour la distorsion totale :

$$\delta(\{p_A, p\}) = (1-\alpha) \delta(\{p_A, p_B\}) \quad \text{et} \quad \delta(\{p, p_B\}) = \alpha \delta(\{p_A, p_B\})$$

et finalement :

$$\delta(\{p_A, p_B\}) = \delta(\{p_A, p\}) + \delta(\{p_B, p\})$$

Cette additivité des indices de distorsion ne s'étend pas au delà de deux catégories, car dès qu'il y en a davantage les ordres de densité de chacune des trois distributions par rapport à la marginale ne sont que rarement tous les égaux ou les deux les uns des autres.

UN EXEMPLE

Baudelot & *al.* (1981) étudient l'influence de la catégorie sociale ou professionnelle (CSP) des parents sur l'accès des jeunes Français à l'enseignement supérieur en 1960 et 1976. Ils donnent ainsi (tableau 1) pour chaque année la distribution des CSP des parents pour l'ensemble de la tranche d'âge considérée ainsi que parmi les étudiants. On en déduit la distribution parmi les non-étudiants. On notera les distributions de fréquences associées p (Ensemble), p_A (Etudiants) et p_B (Non-étudiants) pour 1960, et de même p' , p'_A et p'_B pour 1976.

CSP	1960			1976		
	Ensemble	Etudiants	Non-étudiants	Ensemble	Etudiants	Non-étudiants
Agriculteurs	475	8,784	466,22	442	35,663	406,34
Salariés agricoles	164	1,124	162,88	145	2,984	142,02
Patrons	319	31,434	287,57	381	72,238	308,76
Cadres Supérieurs	139	51,872	87,128	295	211,85	83,152
Cadres Moyens	160	32,088	127,91	337	107,62	229,38
Employés	301	20,051	280,95	458	102,69	355,31
Ouvriers, pers. de service	1138	5,878	1132,1	1946	83,864	1862,1
Autres	222	22,919	199,08	242	78,885	163,12
Total	2918	174,15	2743,9	4246	695,8	3550,2

Tableau 1. Effectifs (en milliers) des français d'âge étudiant, inscrits ou non dans l'enseignement supérieur, selon la CSP de leurs parents, en 1960 et 1970 (d'après Baudelot & *al.*).

Combessie (1985), reprenant ces données, cherche à répondre à la question : l'inégalité des chances d'accès à l'enseignement supérieur a-t-elle augmenté ou diminué entre 1960 et 1976 ? Pour ce faire, il compare la courbe de concentration de p_A par rapport à p à celle de p'_A par rapport à p' . La première montre davantage de concentration que la seconde et l'auteur en conclut naturellement que l'inégalité d'accès à l'enseignement supérieur a diminué. Il compare ensuite la courbe de concentration de p_B par rapport à p à celle de p'_B par rapport à p' : cette fois, c'est la seconde qui montre davantage de concentration que la première. L'auteur en conclut que l'inégalité d'exclusion, elle, a augmenté. Et d'exprimer ainsi le paradoxe : "un indice appliqué au groupe non-A donne à la question posée une réponse contradictoire à celle que produit le même indice appliqué au groupe A".

Barbut (1985) montre bien le "caractère inéluctable de cet effet "paradoxal", et comment il s'étend à la plupart des indicateurs de l'inégalité développés dans la littérature économique (*cf* par exemple Sen 1973).

Le paradoxe naît de l'utilisation des mesures de référence p et p' . On l'évite en comparant directement les distorsions qui existent entre p_A et p_B d'une part, entre p'_A et p'_B d'autre part. Pour ce faire on ordonne chaque année les CSP selon les densités p_A/p_B et p'_A/p'_B respectivement et on établit les fréquences cumulées de chacune des distributions dans cet ordre (tableau 2).

1960	Densité	Fréqu. cumulées		1970	Densité	Fréqu. cumulées	
CSP		Etudts-	Non-étudts	CSP		Etudts	Non-étudts
Ouvr., pers. de service	0,005	0,034	0,413	Salariés agricoles	0,021	0,004	0,040
Salariés agricoles	0,007	0,040	0,472	Ouvr., pers. de service	0,045	0,125	0,565
Agriculteurs	0,019	0,091	0,642	Agriculteurs	0,088	0,176	0,679
Employés	0,071	0,206	0,744	Patrons	0,234	0,280	0,766
Patrons	0,109	0,386	0,849	Employés	0,289	0,427	0,866
Autres	0,115	0,518	0,922	Cadres Moyens	0,469	0,582	0,931
Cadres Moyens	0,251	0,702	0,968	Autres	0,484	0,696	0,977
Cadres Supérieurs	0,595	1,000	1,000	Cadres Supérieurs	2,548	1,000	1,000

Tableau 2. Pour chaque année, les CSP sont rangées par ordre croissant de densité d'étudiants par rapport aux non-étudiants. Les fréquences cumulées définissent les points de la figure 3.

La figure 3 montre les contours supérieurs des deux surfaces de distorsion correspondantes. La courbe de 1960 domine presque entièrement celle de 1976, cette dernière la dépassant légèrement entre les abscisses 0,65 et 1. On peut en conclure que les surfaces de distorsion ne sont pas strictement comparables : il n'y en a pas une qui contienne strictement l'autre.

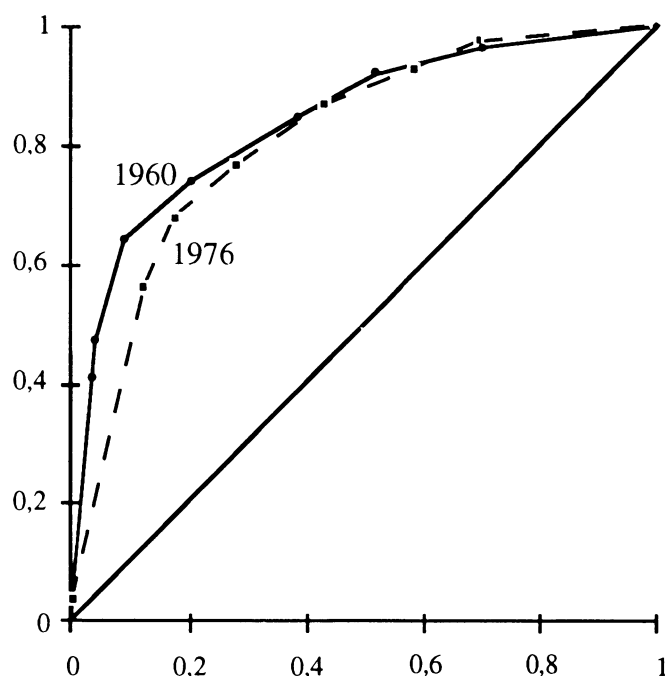


Figure 3. Comparaison de la distorsion entre les distributions des CSP parmi les étudiants et parmi les non-étudiants en 1960 et 1976.

Si l'on veut cependant trancher, il semble bien que la distorsion soit globalement plus faible en 1976 qu'en 1960, et c'est ce que confirme l'indice de distorsion de Gini (tableau 3).

1960		1976	
CSP	Contributions	CSP	Contributions
Salariés agricoles	0,054	Salariés agricoles	0,036
Autres	0,108	Autres	0,090
Employés	0,116	Agriculteurs	0,092
Patrons	0,150	Patrons	0,094
Agriculteurs	0,153	Employés	0,123
Cadres Moyens	0,154	Cadres Moyens	0,123
Cadres Supérieurs	0,266	Cadres Supérieurs	0,281
Ouvriers, pers. de service	0,379	Ouvriers, pers. de service	0,409
Indice de Gini	0,691	Indice de Gini	0,624

Tableau 3. Pour chaque année, CSP rangées par ordre croissant de leur contribution à l'indice de distorsion de Gini.

L'indice de distorsion est, pour chaque année, la somme des indices de concentration des deux courbes considérées par Combessie pour la même année. On peut donc conclure que la diminution de l'inégalité d'accès à l'enseignement supérieur l'emporte sur l'augmentation de l'inégalité d'exclusion.

On peut analyser le "paradoxe" de la façon suivante : on a vu que l'indice de distorsion entre les non-étudiants et l'ensemble, ce que Combessie appelle la concentration de l'exclusion, est égal au produit de l'indice de distorsion "totale", entre étudiants et non-étudiants, par la proportion marginale α , c'est-à-dire la proportion d'étudiants. En 1960 cette proportion est assez faible (6,0%) et elle a plus que doublé en 1976 (16,4%). Cette augmentation entraîne celle du coefficient de distorsion entre non-étudiants et l'ensemble parce qu'elle fait plus que compenser la diminution (de 9,7%) de la distorsion totale.

Baudelot & *al.* posent le problème, dans le cadre de cette étude de l'évolution de l'inégalité, de la comparaison des CSP entre elles, et recherchent "la mesure statistique qui répond réellement à la question posée : quelles sont, par CSP, les individus qui ont le plus bénéficié de l'évolution ?" (p.28). Ils écrivent un peu plus loin : "ce sont les couches sociales qui étaient déjà les plus favorisées en 1960 qui ont le plus bénéficié de l'affaiblissement des normes de sélection" (p.29). Ils appuient leur analyse sur la comparaison des différences relatives :

$$\frac{|p'_A(x) - p_A(x)|}{1 - p_A(x)}$$

Combessie (1984, p.238) se rallie à leur commentaire mais se demande légitimement en quoi ce taux est plus justifié qu'un autre. On ne tranchera pas ici entre les multiples taux alternatifs, dont l'article de Combessie fait une revue très détaillée, mais on examinera l'apport que peut représenter l'étude des contributions des CSP à la distorsion.

On peut à partir des tableaux 2 et 3 repérer les modalités selon leur fréquence dans chacune des deux populations et selon leur contribution à la distorsion entre étudiants et non-étudiants (figure 4). On distingue ainsi trois groupes de CSP :

- Des CSP qui ont vu augmenter à la fois leur importance dans la population et leur contribution à la distorsion : Ouvriers & Personnels de service, Cadres supérieurs et, dans une faible mesure, Employés.

- Des C.S.P. qui ont vu diminuer à la fois leur importance dans la population et leur contribution à la distorsion : Agriculteurs, Patrons, Salariés agricoles et Autres.

- Une C.S.P. qui a vu augmenter son importance dans la population mais diminuer sa contribution à la distorsion : Cadres moyens.

Cette classification montre que si, dans l'ensemble, la distorsion a diminué, deux CSP y font des exceptions notables, l'une (Cadres supérieurs) en renforçant sa sur-représentation dans la population étudiante et l'autre (Ouvriers et personnels de service) en y aggravant sa sous-représentation.

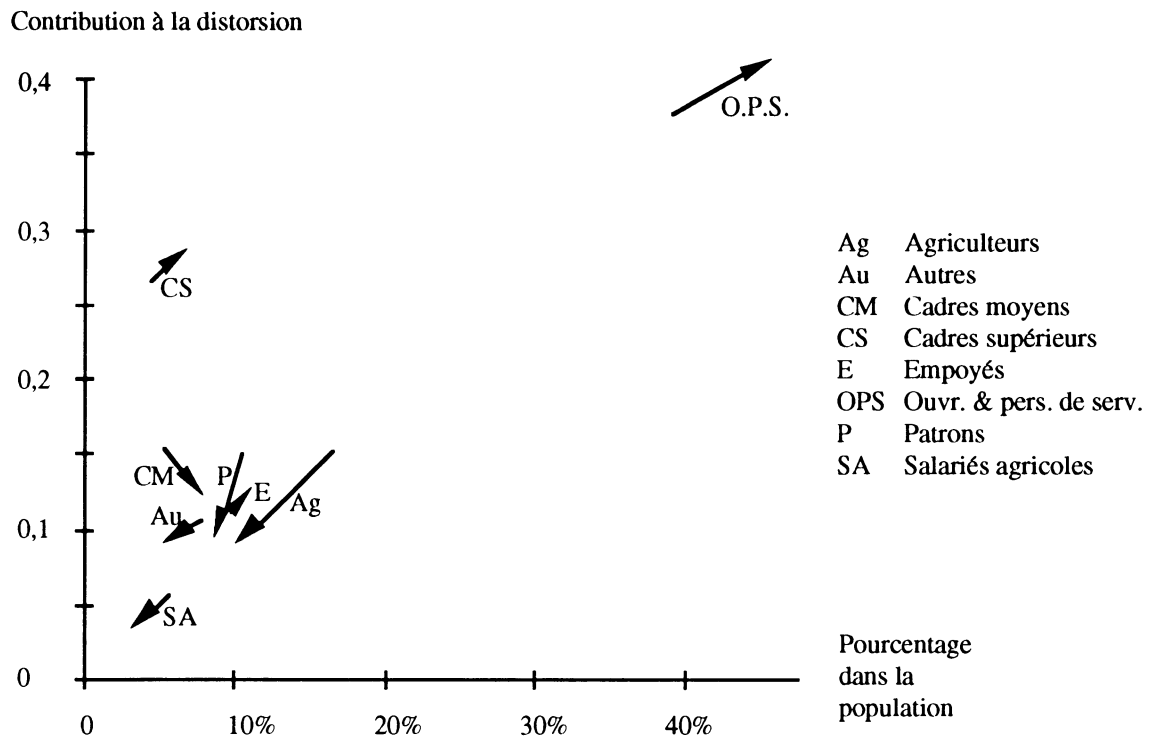


Figure 4. Évolution entre 1960 et 1976 de la part dans la population et de la contribution à la distorsion de chaque CSP.

BIBLIOGRAPHIE

BARBUT, M., "Note sur quelques indicateurs globaux de l'inégalité : C. Gini, W. Pareto, P. Levy", *Revue Française de Sociologie*, 25 (4), 1984(a).

BARBUT, M., "Sur quelques propriétés élémentaires des fonctions de concentration de C. Gini", *Mathématiques et Sciences humaines*, 88, 1984(b), 5-19.

BARBUT, M., "Sur les indicateurs de l'inégalité : croissance logistique et mesure de l'inégalité, et quelques effets "paradoxaux" dans la comparaison des inégalités", *Mathématiques et Sciences humaines*, 90, 1985, 5-17.

BAUDELLOT, C., BENOLIEL, R., CUKROWICZ, H., ESTABLET, R., *Les études et l'emploi*, Paris, Maspero, 1981.

CIFARELLI, D.M. and REGAZZINI, E., "On a general definition of concentration function", *Sankhya*, 49 (B-3), 1987, 307-319.

COMBESSIE, J.C., "L'évolution comparée des inégalités : problèmes statistiques", *Revue Française de Sociologie*, 25 (2), 1984.

COMBESSIE, J.C., "Paradoxes des fonctions de concentration de C. Gini", *Revue Française de Sociologie*, 26 (4), 1985.

DE FINETTI, B., *Probability, induction and statistics*, London, J.Wiley and Sons, 1972.

GINI, C., "Sulla misura della concentrazione della variabilità dei caratteri", *Atti del Reale Istituto Veneto di Sci. Litt. Arti*, A.A. 1913-1914, 73 (II), 1914, 1903-1942,.

LORENZ, M.O., "Methods for measuring concentration of wealth", *J. Amer. Statist. Soc.*, New series, n°70, 1905.

SCARSINI, M., "An ordering of dependence", in *Topics in statistical dependence*, Block, H.W., Sampson A.R. and Savits, T.H., eds., Inst. of Math. Statist. Lecture Notes Monograph Series 16, Hayward CA, 1990.

SEN, A., *On economic inequality*, Oxford, Clarendon Press, 1973.