

R. A. CHIAPPA

E. T. OKLANDER

**Une solution d'un problème sur les mots circulaires
et équilibrés. Suite n° 4**

Mathématiques et sciences humaines, tome 21 (1968), p. 53-55

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__21__53_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE SOLUTION D'UN PROBLÈME SUR LES MOTS CIRCULAIRES ET ÉQUILIBRES

Suite n° 4

par

R. A. CHIAPPA et E. T. OKLANDER ¹

Le travail que nous ont envoyé E. T. Ohlander et R. A. Chiappa constitue une contribution intéressante au problème des mots « circulaires et équilibrés ». Il est par ailleurs remarquable de constater que ce problème est maintenant reconnu comme l'un des thèmes classiques de la combinatoire ; Marshall Hall Jr. lui consacre en effet le chapitre 9 de son ouvrage fondamental, sur lequel nous reviendrons, Combinatorial Theory (Blaisdell Publ. Co., 1967). Ce que contient ce chapitre, ce sont surtout les résultats de Debruijn dont nous avons parlé dans M.S.H. n° 17 Marshall Hall appelle d'ailleurs séquences de Debruijn les mots circulaires équilibrés.

D'autre part S. K. Stein consacre un chapitre (Ch. 9 Les roues à mémoire) dans les Mathématiques, ce monde que créa l'homme (Dunod, 1967, traduction de Mathematics, The man-made universe, Freeman & Co) à l'histoire du problème ; on trouvera là des compléments à la bibliographie que nous avons fournie dans M.S.H. n° 19.

N.D.L.R.

Notre propos est de donner une méthode pour obtenir des solutions au problème suivant, pour lequel il y a déjà d'autres algorithmes de résolutions [1].

Dans ce qui suit, nous considérons un alphabet A de h lettres et nous notons V_l l'ensemble de tous les mots de longueur l sur A .

Problème : *Etant donné un entier $l > 1$ déterminer un mot $P = x_1, x_2 \dots x_m$ sur l'alphabet A , tel que pour chaque mot p de V_l , il existe un et un seul entier $k (1 \leq k \leq m)$ tel que si (k) représente l'entier de la suite $1, 2 \dots m$ congruent à k (modulo m), alors p est de forme $x_{(k)} x_{(k+1)} \dots x_{(k+l-1)}$.*

On voit tout de suite que le mot P doit avoir pour longueur $m = h^l$. Nous considérons maintenant les définitions et propriétés suivantes.

- A) Nous disons que le mot P de longueur $m (m \leq l > 1)$ a le l -type r/s si $r(s)$ est le sous-mot initial (final) de p , de longueur $l-1$.
- B) Nous disons que les mots p et q sont l -équivalents s'ils ont le même l -type.

Exemple : les mots aaba et aabcaba sont 4-équivalents, 3-équivalents et 2-équivalents.

- C) Nous disons que le mot q est l -compatible avec le mot p si p a le l -type r/s et q a le l type s/t .
- D) Si q est l -compatible avec p , en notant $p = p's$, $q = sq'$, nous disons que le mot $p + q = p'sq'$ est obtenu par l -juxtaposition de q à p . D'une façon analogue nous définirions $p^1 + p^2 + \dots + p^k$ si p^{j+1} est l -compatible avec $p^j (1 \leq j \leq k-1)$.

¹ Instituto de Matematica, Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina.

Exemple : Par 3 - juxtaposition de $p^1 = abc$, $p^2 = bcad$, $p^3 = adda$, on obtient

$$p^1 + p^2 + p^3 = abcadda.$$

- E) Si $p = x_1 x_2 \dots x_l$ est le mot de l lettres (qui ne sont pas nécessairement distinctes) nous écrivons $\pi_p = x_2 x_3 \dots x_l x_1$; et si j est le plus petit entier tel que $\pi^j p = p$, nous disons que p est d'ordre j .
- F) Si p est un mot d'ordre j , nous appelons *classe cyclique* de p l'ensemble (p) des mots $p, \pi p, \pi^2 p, \dots, \pi^{j-1} p$. Il est immédiat que la classe cyclique de p est identique à la classe cyclique de $\pi^i p$ (pour tout i) et que $\pi^{l+1} p$ est l -compatible avec $\pi^i p$.
- G) Si p est un mot d'ordre j , nous disons que le mot $C(p) = p + \pi p + \pi^2 p + \dots + \pi^{j-1} p$ est le *cycle* de p .
Si $p = x_1 x_2 \dots x_l$, alors $C(p)$ a pour l -type $x_1 x_2 \dots x_{l-1} / x_1 x_2 \dots x_{l-1}$.
- H) Nous disons que deux ensembles M et M' de mots de longueur au moins égale à l , sont *équivalents*, s'il y a entre M et M' une correspondance biunivoque telle que les mots correspondants soient l équivalents.
- I) Si M' est obtenu à partir de M par 1 - juxtaposition de certains mots de M , nous disons que M' est une *contraction* de M .

Théorème : Ordonnons totalement les lettres de A : $a_1 < a_2 < \dots < a_h$; V_l^k l'ensemble des mots de longueur l sur l'alphabet $a_1, a_2, \dots, a_h$ ($1 \leq k \leq h$). Alors, si $k > l$, V_{k-1}^k est équivalent à une contraction de V_l^k .

Démonstration : Si M_j est l'ensemble des mots de V_l^k dans lesquels la lettre a_k figure au plus j fois ($0 \leq j \leq l$), alors $M_0 = V_{k-1}^{k-1}$ et $M_l = V_l^k$. Donc, pour démontrer le théorème il suffira de montrer que M_{j-1} est équivalent à une contraction de M_j (pour $j > 0$).

Soit D_j l'ensemble des mots de V_l^k dans lesquels a_k figure exactement j fois, et soit (p) une classe cyclique de mots D_j . Comme $j > 0$, la lettre a_k appartient au mot p , et nous pouvons supposer que a_k est la dernière lettre de p ; dans le cas contraire nous pourrions changer p en un mot autre de la même classe cyclique ayant cette propriété.

Si $p = x_1 x_2 \dots x_{l-1} a_k$, alors $C(p)$ a pour l -type $x_1 x_2 \dots x_{l-1} / x_1 x_2 \dots x_{l-1}$, et a_k apparaît $j - 1$ fois parmi les lettres $x_1, x_2, \dots, x_{l-1}$.

Le mot $p' = a_1 x_1 x_2 \dots x_{l-1}$ appartient à D_{j-1} et $C(p)$ est l -compatible avec p' . D'ailleurs, une fois fixé, dans chaque classe cyclique de D_j , un mot ayant comme dernière lettre a_k , la correspondance $C(p) \rightarrow p'$ est biunivoque entre les classes cycliques de D_j et l'ensemble S des mots de D_{j-1} ayant a_1 comme première lettre.

Si $p' = a_1 x_1 x_2 \dots x_{l-1}$ est le mot de S , le mot $p' + C(p)$ (qui a pour l -type $a_1 x_1 x_2 \dots x_{l-2} / x_1 x_2 \dots x_{l-1}$) est l -équivalent à p' . Si dans M_{j-1} nous remplaçons chaque mot p' de S par $p' + C(p)$, nous obtenons un ensemble N qui est une contradiction de M_j équivalente à M_{j-1} .

En appliquant $h - 1$ fois le théorème, on obtient un ensemble contraction de $V_l^k = V_l$ qui est équivalent à V_l^1 . Cet ensemble est formé par le seul mot P' tel que, en éliminant ses $l - 1$ dernières lettres on obtient un mot P qui est une solution du problème.

Comme illustration de l'algorithme indiqué dans le théorème, appliquons-le au cas où $h = l = 3$ et $A = \{a, b, c\}$.

Dans le tableau I nous avons ordonné les mots de V_3 de telle manière que dans chaque ligne il y ait une classe cyclique. Dans les lignes 1-4, 5-8, 9-10, et 11, les mots ont respectivement 0, 1, 2, 3 fois la lettre c .

Si $p = ccc$, alors $p' = acc$ et $p' + C(p) = p' + p = accc$. En remplaçant acc par $accc$, nous obtenons le tableau II qui est une contraction du tableau I, équivalente à ses dix premières lignes.

Soit maintenant $p = acc$; nous aurons $p' = acc$ et $p' + C(p) = aac + acc + cca + cac$. 1)

En remplaçant chaque mot de 1) par son correspondant dans le tableau II nous obtenons le mot
 $aac + accc + cca + cac = aaccac$ 2)

D'ailleurs, si $p = bcc$, nous aurons $p' = abc$ et :

$$p' + C(p) = abc + bcc + ccb + cbc = abcbbc \quad 3)$$

En remplaçant dans le tableau II les mots aac et abc par 2) et 3) respectivement, nous obtenons le tableau III, contraction du tableau I équivalente à ses huit premières lignes.

En réitérant ce procédé, on arrive finalement au tableau VII, formé par le seul mot :

$$P' = aaaccacaabccbcabbcbbbbabacbaa.$$

Le mot $P = aaaccacaabccbcabbcbbbbabacba$, obtenu à partir de P' en éliminant ses deux dernières lettres est, donc, une solution du problème pour $h = l = 3$.

Tableau I

- 1) aaa
- 2) aab-aba-baa
- 3) abb-bba-bab
- 4) bbb
- 5) aac-aca-caa
- 6) abc-bca-cab
- 7) bac-acb-cba
- 8) bbc-bcb-cbb
- 9) acc-cca-cac
- 10) bcc-ccb-cbc
- 11) ccc

Tableau II

- 1) aaa
- 2) aab-aba-baa
- 3) abb-bba-bab
- 4) bbb
- 5) aac-aca-caa
- 6) abc-bca-cab
- 7) bac-acb-cba
- 8) bbc-bcb-cbb
- 9) acc-cca-cac
- 10) bcc-ccb-cbc

Tableau III

- 1) aaa
- 2) aab-aba-baa
- 3) abb-bba-bab
- 4) bbb
- 5) aaccac-aca-caa
- 6) abccbc-bca-cab
- 7) bac-acb-cba
- 8) bbc-bcb-cbb

Tableau IV

- 1) aaaccacaa
- 2) aabccbcabaa-abacba-baa
- 3) abbcbb-bba-bab
- 4) bbb

Tableau V

- 1) aaaccacaa
- 2) aabccbcab-abacba-baa
- 3) abbcbbb-bba-bab

Tableau VI

- 1) aaaccacaa
- 2) aabccbcabbcbbbbab-abacba-baa

Tableau VII

- 1) aaaccacaabccbcabbcbbbbabacbaa

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBUT M. — « Mots circulaires et équilibrés. Histoire du problème vue à travers la bibliographie », *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 17 (p. 59-61) 1966.