M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
- MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

P. COULLET
L. GIL
J. LEGA

Une forme de turbulence associée aux défauts topologiques

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 23, n° 3 (1989), p. 385-394

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1989__23_3_385_0>

© AFCET, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE
(Vol. 23, n° 3, 1989, p 385-394)

UNE FORME DE TURBULENCE ASSOCIÉE AUX DÉFAUTS TOPOLOGIQUES (*)

par P. COULLET (1), L. GIL (1) et J. LEGA (1)

DE L'ORDRE SPATIAL À L'ORDRE TEMPOREL

De toutes les transitions dans les systèmes en équilibre thermique, celles qui sont accompagnées de brisures spontanées de symétrie ont suscité un intérêt considérable. Lorsque l'on varie certaines grandeurs thermodynamiques imposées par le milieu extérieur, tous les états associés à une symétrie donnée deviennent instables. Cette transition s'accompagne souvent de l'apparition de défauts. Une autre catégorie de systèmes est celle des systèmes ouverts, qui sont en interaction avec différents réservoirs, ces derniers n'étant pas en équilibre entre eux. Ces systèmes, que l'on qualifie de systèmes hors d'équilibre, sont ainsi soumis à des forces ou à des flux dont l'intensité est contrôlée par des paramètres extérieurs. Leur évolution macroscopique est décrite par des équations aux dérivées partielles non linéaires, qui présentent le même degré d'universalité que les théories à la Landau des transitions de phase [1]. Sous l'action du milieu extérieur, ces systèmes donnent lieu à des transitions, ce qui se traduit mathématiquement par des bifurcations des solutions des équations [2].

Les solutions obtenues après la bifurcation sont de symétrie plus basse que l'état initial, et induisent donc un certain type d'ordre. Ainsi, une brisure spontanée de l'invariance du système physique par rapport à des translations dans le temps ou dans l'espace, introduit un ordre temporel ou spatial.

Une des expériences les plus classiques est celle de Rayleigh-Bénard où un fluide dilatable, contenu entre deux plaques horizontales, est soumis à

(*) Cet article a été publié dans le numéro de Janvier 1988 du Bulletin de la Société Française de Physique.

(1) Laboratoire de Physique Théorique, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex, France.

Mathematical Modelling and Numerical Analysis © AFCET Gauthier-Villars

une différence de température Pour un gradient suffisamment élevé, le système passe d'un état conductif où le fluide est au repos, à un état convectif dans lequel il est en mouvement Une structure en rouleaux apparaît [3], introduisant une périodicité spatiale dans le système Dans le cas de l'expérience de Rayleigh-Bénard, seules des conditions expérimentales très particulières conduisent à une structure bifurquée parfaite Un autre exemple est celui d'un cristal liquide [4] nématique soumis à un champ électrique alternatif Bien que les deux systèmes physiques soient très différents, la structure qui apparaît induit dans les deux cas un ordre spatial de même nature Cette universalité est l'analogue de celle bien connue pour les transitions de phase dans les systèmes a l'équilibre C'est en chimie que l'on rencontre des exemples où la solution bifurquée induit un ordre temporel [5] Ainsi un mélange d'acide sulfurique, d'acide malonique, de bromate de sodium et de sulfate de cérium en solution aqueuse presente, pour des valeurs données des concentrations des réactifs, des oscillations temporelles périodiques, visibles par le changement de couleur d'un indicateur coloré (ferroine) dilué dans le milieu réactionnel Citons enfin l'apparition d'ondes dans une expérience de Rayleigh-Bénard avec un fluide binaire, la convection se faisant par un système de rouleaux qui se déplacent perpendiculairement à leur axe Une telle structure induit un ordre spatio-temporel, qui brise non seulement les symétries de translation dans le temps et dans l'espace, mais aussi la parité, c'est-à-dire le renversement du sens de propagation

Dans chaque cas, le système est décrit, au voisinage du seuil de bifurcation, par un ou plusieurs paramètres d'ordre [6], [7], qui mesurent en quelque sorte « la quantité de symétrie brisée » Dans le cas ou la structure bifurquée induit un ordre spatial unidimensionnel de nombre d'onde k, une quantité typique décrivant le système, telle la température sur le plan median de la couche fluide pour la convection de Rayleigh-Bénard [8], s'écrit, au voisinage de la transition, $Q = Q_0 + R \cos(kx + \theta)$ Le premier terme Q_0 représente la partie homogène de Q, c'est-a-dire celle qui est invariante par translation d'espace R mesure l'amplitude de l'oscillation spatiale, et θ sa phase Il est naturel de définir le paramètre d'ordre associé a cette transition par le nombre complexe $A = R \exp(i\theta)$ Notons que ce paramètre d'ordre a la même nature que celui de la superfluidite Dans ce cas, R est relié à la densité superfluide, et θ est la phase de la fonction d'onde macroscopique, dont le gradient représente la vitesse superfluide De façon analogue, l'ordre temporel est décrit par un paramètre d'ordre complexe défini par $Q = Q_0 + R \cos(\omega_0 t + \theta)$, et l'ordre spatio-temporel est décrit par deux paramètres d'ordre complexes A_+ et A_-, associés aux deux sens opposés de propagation, et définis par

$$Q = Q_0 + R_+ \cos(k_0 x + \omega_0 t + \theta_+) + R_- \cos(-k_0 x + \omega_0 t + \theta_-) \quad [9]$$

LES DÉFAUTS DE L'ORDRE MACROSCOPIQUE

Naturellement, comme c'est le cas pour les systèmes à l'équilibre, il existe des défauts qui perturbent l'ordre de l'état bifurqué. Au cœur d'un défaut, le paramètre d'ordre s'annule, et l'on retrouve *ainsi la symétrie de la phase* initiale. L'analogie entre ces défauts et ceux, plus classiques, que l'on observe par exemple dans les solides, a été reconnue pour la première fois par J. M. Dreyfus et E. Guyon [10]. Cette analogie a permis une étude systématique à la fois expérimentale [11] et théorique [12], [13] de ces objets singuliers, et en particulier de leur rôle dans les mécanismes de sélection du nombre d'onde. La nature de ces singularités est liée aux symétries brisées, et leur stabilité topologique [14] peut se déduire par des arguments d'homotopie. Ce sont des dislocations (voir *fig.* 1) dans le cas de l'ordre

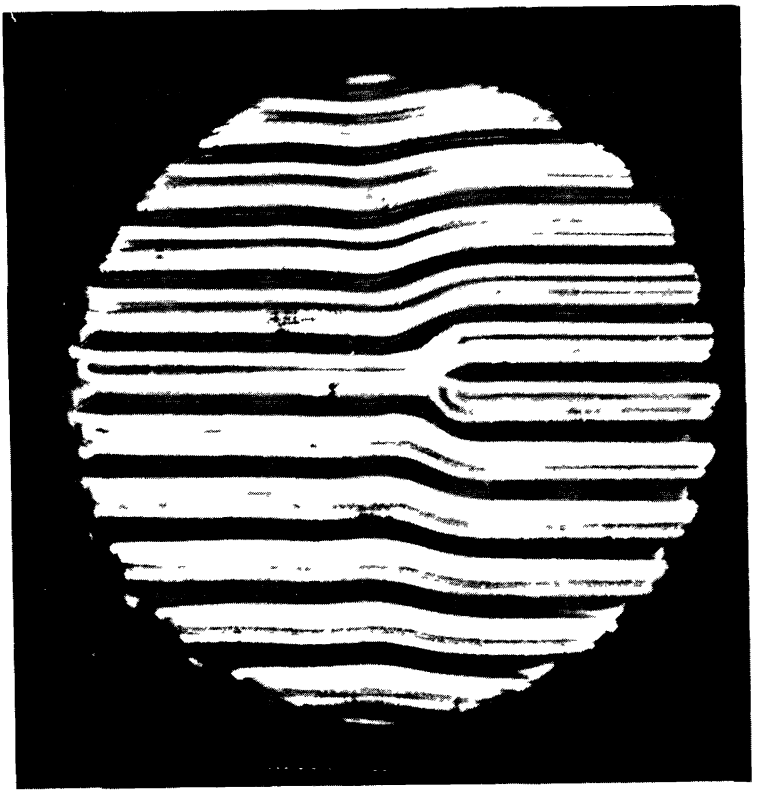


Figure 1. — Dislocation dans une expérience de Rayleigh-Bénard (d'après V. Croquette et A. Pocheau).

spatial unidimensionnel, et des ondes spirales [5] (voir *fig.* 2) dans le cas d'une structure temporelle oscillante. Le cas de l'ordre spatio-temporel est plus riche, car les défauts admissibles sont non seulement les dislocations, mais aussi des parois séparant des régions d'ondes se propageant en sens contraires [15]. L'existence de telles parois, véritables analogues des parois magnétiques, est reliée à la brisure de la symétrie de parité.

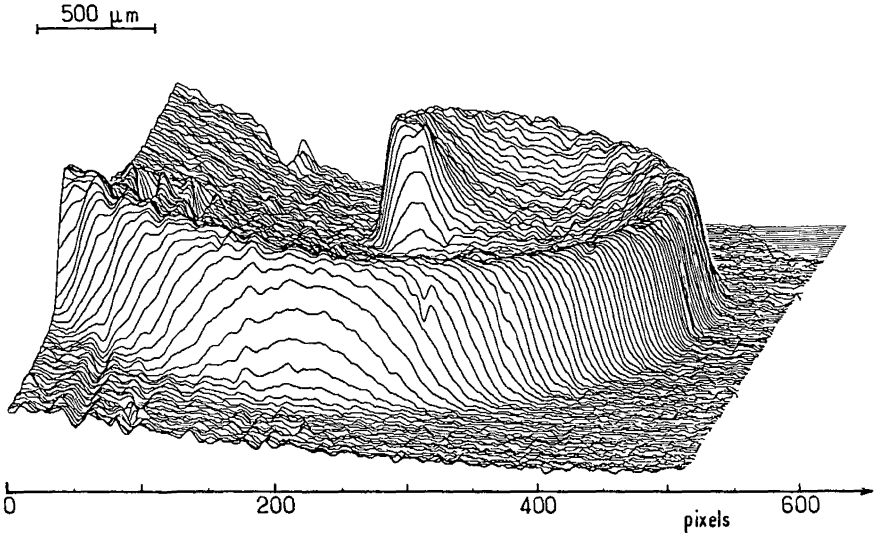


Figure 2. — Défaut spirale en chimie (d'après C. Vidal).

Au voisinage du seuil de bifurcation, la dynamique du système est décrite par une ou plusieurs équations macroscopiques régissant l'évolution du ou des paramètres d'ordre. Il est remarquable que ces équations contiennent également la forme des défauts, alors que ces derniers font intervenir des échelles plus petites que celle à laquelle les équations d'amplitude ont été établies [16]. Ceci est en partie lié au fait que la nature des défauts est déterminée par leur forme asymptotique (c'est-à-dire loin de leur cœur), qui est elle-même contenue dans les équations d'amplitude. Ainsi, la figure 3 montre un défaut spirale, obtenu par simulation numérique de l'équation d'amplitude associée à l'apparition d'un ordre temporel, et dont la forme est qualitativement très proche de celui de la figure 2 obtenu dans une expérience réelle par C. Vidal.

Puisque le paramètre d'ordre A s'annule en son cœur, un défaut est situé à la croisée des lignes de parties réelle et imaginaire de A nulles. On comprend ainsi que ces défauts soient structurellement stables, puisqu'une perturbation de A conduit à un déplacement du cœur du défaut, mais pas à

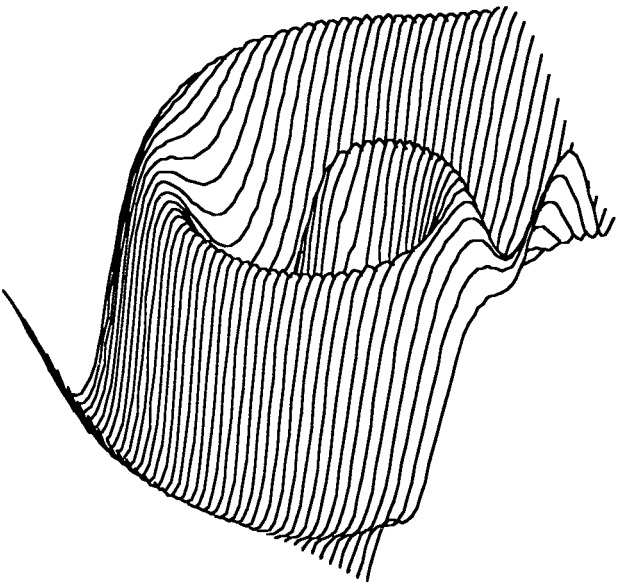


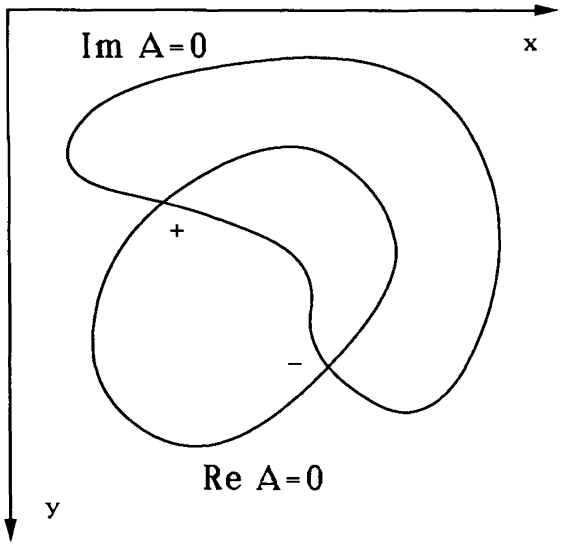
Figure 3. — Simulation numérique d'un défaut spirale.

sa destruction (voir *fig.* 4*a*). Ce n'est évidemment pas le cas à une seule dimension spatiale où l'annulation en un point de l'espace d'un champ complexe n'est pas générique et est détruite à la moindre perturbation (voir *fig.* 4*b*).

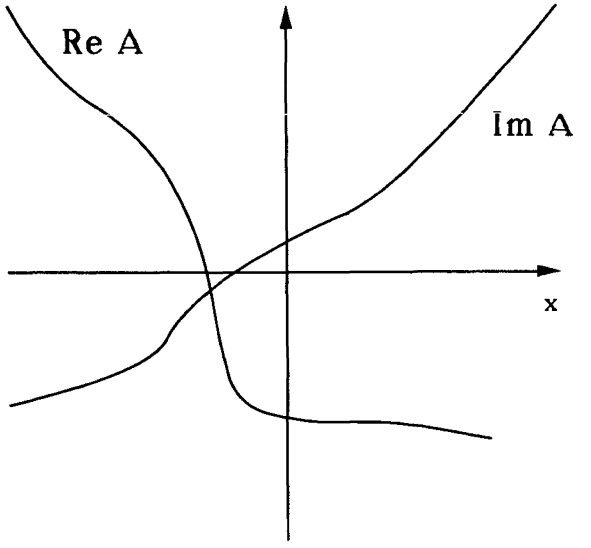
La nature du défaut dépend des symétries du système physique et du fait qu'il puisse ou non être décrit en termes d'une énergie libre. Ainsi, bien qu'un défaut spirale de l'ordre temporel soit, du point de vue des symétries, l'analogue du vortex superfluide, il possède des caractéristiques propres qui sont liées à l'absence d'une description variationnelle. Les traits particuliers de l'ordre temporel sont d'une part la dépendance de la fréquence d'oscillation avec son amplitude, et d'autre part l'existence d'effets dispersifs. Ces effets sont responsables de la forme de l'onde spirale. Dans le cas du vortex, les équiphases sont radiales et stationnaires. Dans le cas de la spirale, c'est l'effet de rotation différentielle dû à la dépendance de la fréquence en fonction de l'amplitude de l'oscillation qui est responsable de la courbure des lignes de phase au voisinage du cœur du défaut (voir *fig.* 5).

UNE FORME DE TURBULENCE ASSOCIÉE AUX DÉFAUTS TOPOLOGIQUES

De nombreuses transitions de phase font intervenir les défauts. C'est le cas des transitions « à la Kosterlitz-Thouless » [17] dans les systèmes à deux



(a)



(b)

Figure 4. — A deux dimensions d'espace (*a*), les lieux où s'annulent la partie réelle et la partie imaginaire du paramètre d'ordre sont des lignes, qui peuvent se couper. A une dimension d'espace (*b*), la partie reelle et la partie imaginaire du paramètre d'ordre ne s'annulent pas en général en un même point.

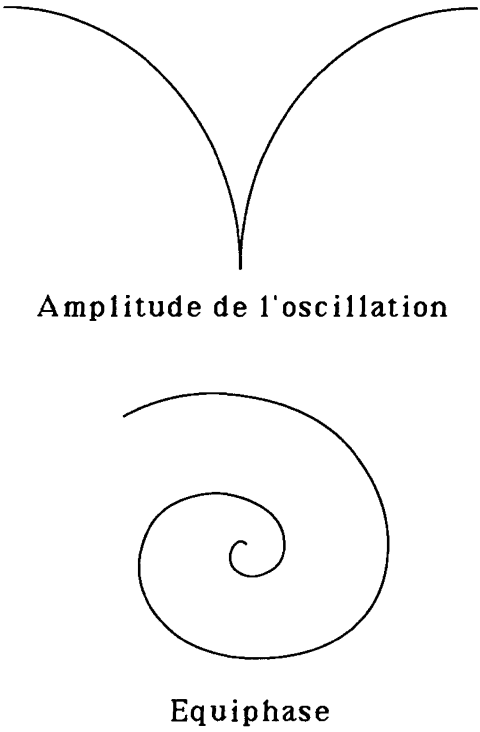
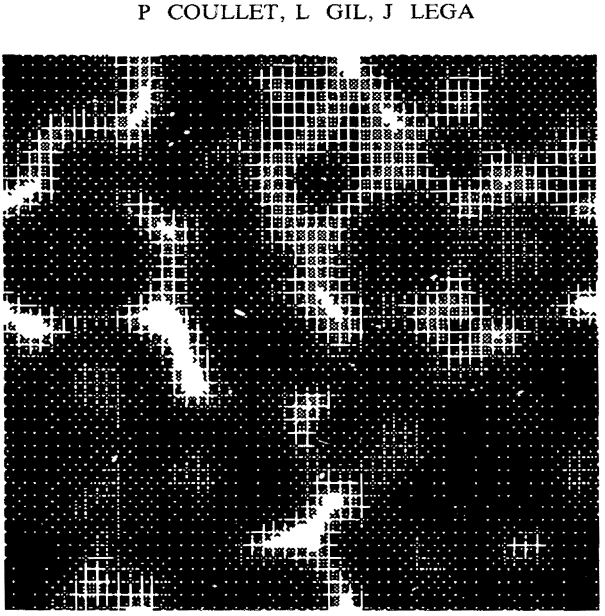
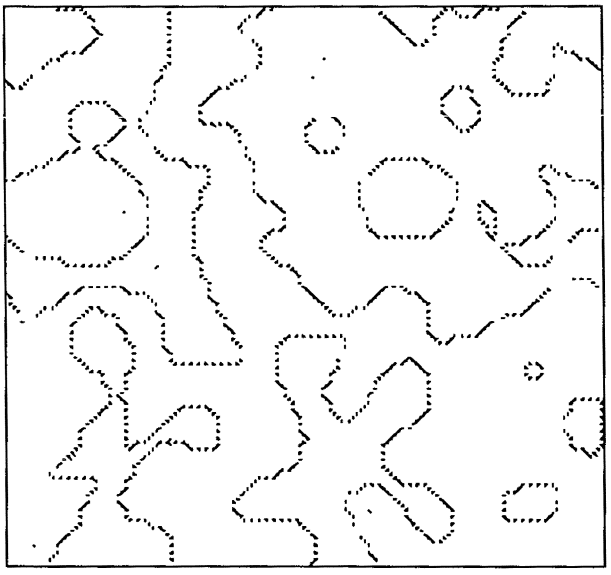


Figure 5. — L'effet de spirale au voisinage du cœur du défaut est relié à la dépendance de la fréquence de l'oscillation avec l'amplitude du paramètre d'ordre.

dimensions, telles la fusion bidimensionnelle ou les transitions dans les couches minces magnétiques et dans les films superfluides. A basse température, l'agitation thermique permet l'existence de défauts associés par paires, ce qui ne détruit pas l'ordre bidimensionnel. A plus haute température, la dissociation d'une fraction de ces paires conduit à une décroissance exponentielle des corrélations. Dans les systèmes à l'équilibre, les mécanismes de création et d'annihilation des défauts sont liés à l'agitation thermique. Par contre, il est admis que le bruit thermique peut généralement être négligé dans les systèmes macroscopiques hors d'équilibre. Mais il existe alors des mécanismes déterministes de désorganisation liés à des instabilités donnant lieu à des comportements chaotiques [18]. Dans le cas des systèmes spatialement étendus qui nous intéressent, la présence d'un grand nombre de degrés de liberté peut conduire à l'existence d'un bruit déterministe, véritable analogue hors d'équilibre d'une température. Ce bruit peut alors jouer un rôle identique à celui de l'agitation thermique dans le cas des transitions de type Kosterlitz-Thouless. Ces



a)



b)

Figure 6. — Simulation numérique représentant l'intensité en fonction de x et de y de la partie reelle du champ turbulent (*a*), et les lignes ou s'annulent la partie reelle et la partie imaginaire du paramètre d'ordre dans la boîte (*b*).

arguments permettent d'envisager l'existence d'une forme de turbulence, liée à la présence de défauts dans le système.

Des simulations numériques des équations décrivant l'apparition de l'ordre temporel, qui ont été effectuées sur CRAY-2 au CCVR, ont confirmé ces idées [19]. Dans certains domaines de paramètres, l'ordre temporel devient instable. Les défauts apparaissent alors par paires, qui se dissocient rapidement. La distribution du nombre de défauts dans la boîte est proche d'une poissonienne. La décorrélation du champ est exponentielle, et la longueur de corrélation diminue lorsque le taux d'instabilité augmente. La simulation numérique de la figure 6, montre le champ turbulent (*fig.* 6*a*), ainsi que les lignes où s'annulent sa partie réelle et sa partie imaginaire (*fig.* 6*b*). Celles-ci révèlent la présence d'un grand nombre de défauts. Ces défauts se déplacent rapidement dans la boîte, avant de s'annihiler deux à deux, tandis que d'autres paires sont créées.

Il est remarquable que les observations expérimentales [10], [20] de telles transitions dans les systèmes hors d'équilibre aient été effectuées simultanément avec celles dans les systèmes à l'équilibre. Bien que les textures spatiales, apparaissant dans ces expériences sous forme de carrés ou d'hexagones, soient plus complexes que celles que nous avons décrites, il serait cependant intéressant de reconsidérer l'analyse théorique [21] de ces résultats expérimentaux à la lumière du mécanisme de création et d'annihilation des défauts que nous avons proposé. Plus récemment, des expériences

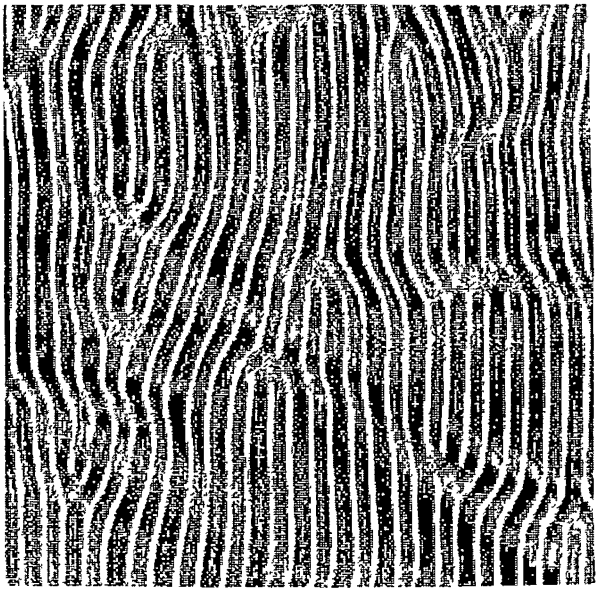


Figure 7. — Turbulence topologique d'un système d'ondes non linéaires dans un nématique soumis à un champ électrique (d'après V. Steinberg).

de Rayleigh-Benard avec des fluides à bas nombre de Prandtl [22] ont également mis en évidence une forme de turbulence faisant intervenir des dislocations et des joints de grains. Dans ce cas, les ecoulements à grande échelle semblent jouer un rôle essentiel dans la dynamique observée Enfin, plus proches des considérations développées ici, sont les expériences faites actuellement sur la destruction de l'ordre spatio-temporel unidimensionnel dans un nématique soumis à un champ électrique, d'une part par A Joets et R Ribotta au Laboratoire de Physique des Solides d'Orsay, d'autre part par V Steinberg (voir *fig* 7) au Département de Physique Nucléaire de l'Institut Weizmann.

RÉFERENCES

[1] L LANDAU et E LIFCHITZ, *Physique Statistique,* Mir, Moscou (1967)

[2] A titre d'exemple, nous renvoyons a l'article de B CAROLI, C CAROLI et B ROULET (*Bull SFP 61,* 14 (juillet 1986)), ou la notion de bifurcation est illustree dans le cas de la solidification dirigee

[3] C NORMAND, Y POMEAU et M G VELARDE, *Rev Mod Phys 49,* 581 (1977)

[4] P G DE GENNES, *The Physics of Liquid Crystals,* Clarendon Oxford (1974)

[5] A T WINFREE, *The Geometry of Biological Time,* Springer, Berlin (1980)

[6] L A SEGEL, *J Fluid Mech 38,* 203 (1969)

[7] A NEWELL et J WHITEHEAD, *J Fluid Mech 38,* 279 (1969)

[8] J WESFREID, Y POMEAU, M DUBOIS, C NORMAND et P BERGE, *J Phys Lett 39,* 725 (1978)

[9] P COULLET, S FAUVE and E TIRAPEGUI, *J Phys Lett 46,* 787 (1985)

[10] J M DREYFUS et E GUYON, *J Physique 42,* 283 (1981)

[11] E GUAZZELLI, E GUYON et J E WESFREID, *Phil Mag* A *27,* 709 (1983)

[12] J TONER et D R NELSON, *Phys Rev B 23,* 316 (1981)

[13] Y POMEAU, P MANNEVILLE et S ZALESKI, *Phys Rev* A *27,* 2710 (1983)

[14] G TOULOUSE, *Bull SFP 24,* 19 (octobre 1976)

[15] P COULLET, C ELPHICK, L GIL et J LEGA, *Phys Rev Lett 59,* 884 (1987)

[16] Y POMEAU, dans *Cellular Structures in Instabilities,* Eds J E Wesfreid et S Zaleski, Springer Verlag (1984)

[17] D R NELSON, dans *Phase Transitions and Critical Phenomena,* Eds C Domb et M S Green, Vol 7, Academic Press, London (1983)

[18] P BERGE, Y POMEAU et C VIDAL, *L'Ordre dans le Chaos,* Hermann (1984)

[19] P COULLET, L GIL et J LEGA, *Defect-mediated Turbulence,* preprint Physique Theorique Nice 1987, soumis a Physical Review Letters

[20] E GUAZELLI et E GUYON, *C R Hebd Sean Acad Sci 292 II,* 141 (1981)

[21] D WALGRAEF, G DEWEL et P BORCKMANS, *Z Phys B 48,* 167 (1982), et D WALGRAEF, G DEWEL et P BORCKMANS, *J Chem Phys 78,* 3043 (1983)

[22] A POCHEAU, V CROQUETTE et P LE GAL, *Phys Rev Lett 55,* 1094 (1985)