

ALEXEI PANCHISHKIN

**Sur une condition suffisante pour l'existence de
mesures p -adiques admissibles**

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 15, n° 3 (2003),
p. 805-829

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2003__15_3_805_0

© Université Bordeaux 1, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur une condition suffisante pour l'existence de mesures p -adiques admissibles

par ALEXEI PANCHISHKIN

RÉSUMÉ. On donne une nouvelle condition suffisante pour l'existence des mesures p -adiques admissibles μ obtenues à partir de suites de distributions Φ_j ($j \geq 0$) à valeurs dans les espaces de formes modulaires. On utilise la projection caractéristique sur le sous-espace primaire associé à une valeur propre non nulle α de l'opérateur U d'Atkin. Notre condition est exprimée en termes des congruences entre les coefficients de Fourier des formes modulaires Φ_j . On montre comment vérifier ces congruences, et on traite plusieurs applications. On obtient donc une *explication conceptuelle* des formules de Yu.Manin pour les distributions attachées à la fonction $L_f(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) a_n n^{-s}$ d'une forme parabolique primitive $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ de poids $k \geq 2$.

ABSTRACT. We give a new sufficient condition for the existence of admissible p -adic measures μ obtained from sequences of distributions Φ_j ($j \geq 0$) with values in spaces of modular forms. We use the characteristic projection on the primary subspace associated to a non zero eigenvalue α of the Atkin operator U . Our condition is expressed in terms of congruences between the Fourier coefficients of the modular forms Φ_j . We show how to verify these congruences and we give several applications. So we get a *conceptual explanation* for the Yu.Manin's formulas for the distributions attached to the L -function, $L_f(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) a_n n^{-s}$, of a primitive cuspform $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \psi)$ of weight $k \geq 2$.

1. Introduction.

Soit p un nombre premier, et soit $\mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p}$ la complétion d'une clôture algébrique du corps des nombres p -adiques. On fixe un plongement

$$(1.1) \quad i_p : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}_p,$$

et on identifie $\overline{\mathbb{Q}}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}_p$. Pour un nombre naturel M fixé on considère le groupe *profini*

$$Y = Y_{M,p} = \varprojlim_v Y_{Mp^v}, \quad Y_{Mp^v} = (\mathbb{Z}/Mp^v\mathbb{Z})^\times,$$

muni de la projection canonique $y_p : Y \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$.

UNE FONCTION L p -ADIQUE $L : X \rightarrow \mathbb{C}_p$ est en général une fonction *méromorphe* sur le groupe $X = \text{Hom}_{\text{cont}}(Y, \mathbb{C}_p^\times)$ des caractères p -adiques continus définie à partir de la transformation de Mellin p -adique (voir section 2) L_μ d'une mesure μ sur Y :

$$L_\mu : X \rightarrow \mathbb{C}_p, \quad \mu(x) = \int_Y x(y) d\mu(y).$$

Soit, par exemple

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi), \quad \text{où } q = e(z) = \exp(2\pi iz), \quad \text{Im}(z) > 0,$$

une forme parabolique primitive (de poids $k \geq 2$, et de caractère $\psi \pmod{N}$). On étudie les valeurs spéciales en $s = 1, \dots, k-1$ des fonctions L suivantes :

$$L_f(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) a_n n^{-s},$$

où $\chi : (\mathbb{Z}/Mp^v)^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ parcourt les caractères de Dirichlet.

Selon un théorème connu de Manin [Ma73], il existe deux constantes complexes non-nulles $c^+(f), c^-(f) \in \mathbb{C}^\times$ (*périodes* de f) telles que pour tout $s = 1, \dots, k-1$ et pour tout caractère de Dirichlet χ avec la parité fixée, $(-1)^{k-s} \chi(-1) = \pm 1$, les valeurs spéciales L normalisées suivantes sont des *nombre algébriques* :

$$(1.2) \quad L_f^*(s, \chi) = \frac{(-2i\pi)^{-s} \Gamma(s) L_f(s, \chi)}{c^\pm(f)} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Pour décrire les *congruences de type de Kummer* pour ces nombres algébriques on utilise une racine *non-nulle* α du p -polynôme de Hecke

$$1 - a_p X + \psi(p) p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha X)(1 - \alpha' X).$$

Soit $\chi \pmod{p^v}$ ($v \geq 1$) un caractère de Dirichlet *primitif*, et $j = 0, \dots, k-2$. Alors, il existe une méthode, basée sur les symboles modulaires et les fractions continues (voir [AV], [Ma73], [Vi76], [MTT])), pour décrire les valeurs normalisées ci-dessus comme les intégrales d'une mesure p -adique h -admissible $\mu_{f,\alpha}$, (avec $h = [\text{ord}_p(\alpha)] + 1$) :

$$(1.3) \quad \mathcal{L}_{j,\chi} = \frac{G(\chi) p^{jv} L_f^*(1+j, \bar{\chi})}{\alpha^v} = \int_Y \chi y_p^j d\mu := \mu(\chi y_p^j),$$

où $G(\chi)$ est la somme de Gauss de $\chi \bmod p^v$ avec $(v \geq 1)$. La condition de h -admissibilité signifie que pour tout $j = 0, \dots, h-1$,

$$(1.4) \quad \left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a)^j d\mu \right|_p = o(p^{(h-j)v}) \text{ lorsque } v \rightarrow \infty.$$

Une mesure admissible n'est pas une mesure : la donnée de $\tilde{\Phi}$ est équivalente à la donnée d'une *suite finie* convenable des distributions p -adiques,

$$\mu_j(a + (Mp^v)) := \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\mu \quad (j = 0, \dots, h-1).$$

Le présent travail donne, en particulier, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, une décomposition des distributions p -adiques (de Manin, Amice-Vélu, Mazur-Tate-Teitelbaum, Vishik, ...), sous la forme :

$$\mu_{f,\alpha,j} = \ell^\alpha(\pi_\alpha(\Phi_j)), \quad (j = 0, 1, \dots, k-2)$$

où

– Φ_j est une suite finie des distributions p -adiques sur Y à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ (de *dimension infinie*) de formes modulaires,

$$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi, \overline{\mathbb{Q}}),$$

– π_α est un $\overline{\mathbb{Q}}$ -projecteur canonique sur un sous-espace $\mathcal{M}^\alpha = \mathcal{M}^\alpha(\overline{\mathbb{Q}})$ de *dimension finie* (le sous-espace *primaire* de l'opérateur d'Atkin :

$$U \left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n \right) = \sum_{n \geq 0} b_{pn} q^n,$$

– $\ell^\alpha \in (\mathcal{M}^\alpha)^*$ est une $\overline{\mathbb{Q}}$ -forme linéaire (provenant de la *méthode de Rankin-Selberg*, et du produit scalaire de Petersson). Cette forme linéaire joue le rôle du *terme constante* dans la méthode de Klingen-Siegel [KL] (pour $\alpha = 1$). En particulier, on obtient les distributions $\mu_{f,\alpha,j}$ aux valeurs *algébriques* (dans $\overline{\mathbb{Q}}$, identifié via (1.1) avec un sous-corps de $\mathbb{C}_p$).

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction.	805
2. Méthode traditionnelle	808
3. Distributions à valeurs dans les formes modulaires	809
4. Première étape : projecteurs sur des sous-espaces	813
5. Une nouvelle construction : projecteur canonique α -primaire	813
6. Distributions à valeurs dans les formes modulaires p -adiques	815
7. Théorème principal	816

8. Deuxième étape : application d'une forme linéaire convenable	819
9. Lien avec les fonctions L : convolutions des séries d'Eisenstein	822
10. Application aux produits triples : cas admissible	827
Bibliographie	828

Je remercie chaleureusement Gilles Robert pour son aide dans la préparation de cet article.

2. Méthode traditionnelle

La méthode traditionnelle de construction de fonctions L p -adiques est à partir des valeurs spéciales de fonctions L complexes (qui sont souvent des nombres algébriques (à une normalisation convenable près)), et on utilise mesures p -adiques, construites à partir de l'*interpolation p -adique* de leurs valeurs.

Dans cette section on note par A le corps de Tate $\mathbb{C}_p$, et on note par V un A -espace vectoriel normé (mais plus tard on utilise la notation A pour $\mathbb{Q}$, pour $\mathbb{C}$, et pour d'autres anneaux de scalaires).

Définition 2.1.

a) Soit h un entier positif et soit $C^h(Y, A)$ le sous-espace vectoriel sur A des fonctions localement polynomiales de degré $< h$ sur Y en la variable $y_p : Y \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ (la projection canonique); en particulier $C^1(Y, A)$ est le sous-espace vectoriel sur A des fonctions localement constantes sur Y à valeurs dans A , et pour $h \geq 1$ on a les inclusions

$$C^1(Y, A) \subset C^h(Y, A) \subset C^{\text{loc-an}}(Y, A) \subset C(Y, A), \text{ où}$$

$$C^1(Y, A) = \{\varphi : Y \rightarrow A \mid \varphi \text{ localement constante}\},$$

$$C^{\text{loc-an}}(Y, A) = \{\varphi : Y \rightarrow A \mid \varphi \text{ localement analytique}\},$$

$$C(Y, A) = \{\varphi : Y \rightarrow A \mid \varphi \text{ continue}\}.$$

b) Une distribution Φ sur Y à valeurs dans un A -module normé V est une application linéaire $\Phi : C^1(Y, A) \rightarrow V$, notée par $\varphi \mapsto \int_Y \varphi d\Phi$.

c) Une mesure $\Phi : C^1(Y, A) \rightarrow V$ est une distribution bornée : $|\Phi(\varphi)|_p < C|\varphi|_p$ où C ne dépend pas de φ .

d) Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Une mesure h -admissible $\tilde{\Phi}$ sur Y à valeurs dans V est une application A -linéaire $\tilde{\Phi} : C^h(Y, A) \rightarrow V$ avec la condition de croissance suivante (voir [AV, Vi76]) : pour $t = 0, 1, \dots, h-1$,

$$(2.1) \quad \left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}(y) \right|_p = o\left(p^{v(h-t)}\right) \text{ lorsque } v \rightarrow \infty.$$

REMARQUE : Une mesure h -admissible $\tilde{\Phi}$ n'est ni une mesure, ni une distribution ; la donnée de $\tilde{\Phi}$ est équivalente à la donnée d'une suite finie convenable Φ_j des distributions p -adiques, notées par

$$\Phi_j(a + (Mp^v)) := \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\tilde{\Phi} \quad (j = 0, \dots, h-1).$$

Cependant, si le A -espace vectoriel normé V est *complet*, une telle $\tilde{\Phi}$ se prolonge de façon unique sur le A -espace vectoriel $\mathcal{C}^{\text{loc-an}}(Y, A)$, voir [AV], [Vi76] (donc on peut considérer $\tilde{\Phi}$ comme une intégrale d'une fonction localement analytique) :

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{C}^{\text{loc-an}}(Y, A) \rightarrow V, \quad \varphi \mapsto \int_Y \varphi(y) d\tilde{\Phi}(y) \quad (\varphi \in \mathcal{C}^{\text{loc-an}}(Y, A)).$$

En fait, une mesure h -admissible $\tilde{\Phi}$ n'est une mesure que si $h = 1$ (dans ce cas l'intégrale existe pour toute fonction continue $\varphi \in \mathcal{C}(Y, A)$).

LA NOUVELLE CONSTRUCTION des fonctions L p -adiques associées aux différentes classes des formes modulaires (de poids entier ou demi-entier, ...), proposée ici, permet d'associer à certaines suites de distributions Φ_j sur Y à valeurs dans un $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel convenable

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(Np^v)$$

de formes modulaires, une famille μ de mesures p -adiques à valeurs scalaires dans $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}_p$.

On fixe une forme parabolique primitive

$$f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}), \quad \text{avec } e(nz) = \exp(2\pi i n z),$$

de poids $k \geq 2$ et de caractère de Dirichlet $\psi \bmod N$, et on considère le p -polynôme de Hecke :

$$1 - a_p X + \psi(p) p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha X)(1 - \alpha' X).$$

avec une racine (non nulle) α .

3. Distributions à valeurs dans les formes modulaires

Dans cette section on note par A soit $\overline{\mathbb{Q}}$, soit $\mathbb{C}$, soit $\mathbb{C}_p$, et on considère un caractère de Dirichlet $\psi \bmod N$ comme une fonction sur Y à valeurs dans $A^\times$ (on identifie $\overline{\mathbb{Q}}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, et de $\mathbb{C}_p$, via un plongement fixé (1.1), $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}_p$).

Soient

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_1(N); A), \quad \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \psi; A)$$

les sous-espaces vectoriels sur A de $A[[q]]$, engendrés par les q -développements

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^v), \overline{\mathbb{Q}})$$

de formes modulaires classiques à coefficients de Fourier algébriques $a_n(f) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

On fixe un entier N' divisible par N , et on définit l'espace vectoriel des formes modulaires

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(N'p^v)$$

où

$$\mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; A) \text{ ou } \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'); A), \text{ et } \mathcal{S} := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{S}(N'p^v)$$

est le sous-espace vectoriel sur A des formes paraboliques, et on note par

$$\mathcal{M}^\infty = \mathcal{M}^\infty(\mathbb{C}) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}^\infty(N'p^v, \mathbb{C})$$

les formes modulaires de type C^∞ .

a) *Distributions d'Eisenstein analytiques réelles* de poids $\ell > 0$ (voir [Ka76]). Pour $s \in \mathbb{C}$ et $a, b \bmod N$ on pose (par prolongement analytique, si nécessaire) : pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $y > 0$,

$$E_{\ell, N}(z, s; a, b) = \sum (cz + d)^{-\ell} |cz + d|^{-2s} \quad (0 \neq (c, d) \equiv (a, b) \bmod N).$$

A partir de cette série, on obtient les *distributions d'Eisenstein* : on pose $s = -r$, $0 \leq r \leq \ell - 1$,

$$\begin{aligned} E_{r, \ell, N}(a, b) &:= \frac{N^{\ell-2r-1} \Gamma(\ell-r)}{(-2\pi i)^{\ell-2r} (-4\pi y)^r} \sum_{a \bmod N} e(-ax/N) E_{\ell, N}(Nz, -r; x, b) \\ (3.1) \quad &= \varepsilon_{r, \ell, N}(a, b) + (4\pi y)^{-r} \times \\ &\sum_{\substack{0 < dd' \\ d \equiv a, d' \equiv b \bmod N}} \operatorname{sgn} d \cdot d^{\ell-2r-1} W(4\pi dd' y, \ell-r, -r) q^{dd'} \in \mathcal{M}_\ell^\infty(N^2), \end{aligned}$$

où $W(y, \ell-r, -r) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)} y^{r-j}$ est la fonction de Whittaker,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r, \ell, N}(a, b) &= \frac{(-4\pi y)^s \Gamma(\ell+s)}{\Gamma(\ell+2s)} \delta\left(\frac{b}{N}\right) \zeta(1-\ell-2s; a, N) \Big|_{s=-r} \\ &+ \frac{\Gamma(\ell+2s-1)}{(4\pi y)^{\ell+s-1} \Gamma(s)} \delta\left(\frac{a}{N}\right) \\ &\times \left[\zeta(\ell+2s-1; b, N) + (-1)^{\ell+2s} \zeta(\ell+2s-1; -b, N) \right] \Big|_{s=-r} \end{aligned}$$

est le *terme constant*, et

$$\zeta(s; a, N) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \equiv a \pmod{N}}} n^{-s}$$

désigne la *fonction zêta partielle*.

Ces séries sont des formes modulaires de type C^∞ de poids $\ell > 0$ (voir [Ka76]) dans $\mathcal{M}_\ell^\infty(\Gamma_1(N^2))$, mais dans certains cas on obtient des formes modulaires *holomorphes* (si, par exemple, $\ell \geq 3$, $r = 0$ ou $r = l - 1$) qui donnent des distributions sur $Y \times Y$ à valeurs dans $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$:

$$E_{r,\ell}((a + (Mp^v)) \times (b + (Mp^v))) := E_{r,\ell,Mp^v}(a, b) \in \mathcal{M}_l(\Gamma_1(M^2p^{2v}))$$

puisque, si $r = 0$ ou $r = l - 1$,

$$y^{-r}W(y, \ell - r, -r) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\ell - r)}{\Gamma(\ell - r - j)} y^{-j} = 1,$$

à cause du facteur $\frac{\Gamma(l - r)}{\Gamma(l - r - j)} = 0$ pour $j \geq l - r$.

b) *Formes modulaires partielles*.

Pour tout $f = \sum_{n \geq 0} a_n(f)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N))$ on pose

$$\Phi_f(a + (Mp^v)) := \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \equiv a \pmod{p^v}}} a_n(f)q^n \in \mathcal{M}_k(N'p^{2v}), \quad N' = NM^2,$$

de telle façon que pour tout caractère de Dirichlet $\chi \bmod Mp^v$ vu comme une fonction sur Y à valeurs dans $A \subset \mathbb{C}_p$, l'intégrale

$$\int_Y \chi(y) d\Phi_f = \Phi_f(\chi) = \sum_{n \geq 0} \chi(n) a_n(f) q^n \in$$

$$\mathcal{M}_k(NM^2p^{2v}) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_1(NM^2p^{2v}))$$

coïncide donc avec la forme modulaire *tordue* f_χ .

c) *Séries thêta partielles* (aussi avec un polynôme sphérique).

Elles déterminent des distributions décrites dans [Hi85], §1.

REMARQUES.

i) Les distributions b), c) sont *bornées* par rapport à la norme p -adique sur

$$\mathcal{M} = \bigcup_v \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'p^v), A) \subset A[[q]]$$

définie pour toute série $g = \sum_{n \geq 0} a(n, g)q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N), A)$ par $|g|_p = \sup_n |a(n, g)|_p$. Les distributions (a) sont bornées (dans le cas *holomorphe*) seulement après une *régularisation* du terme constant.

ii) A partir des distributions a), b), c) on peut en construire beaucoup d'autres en utilisant les opérations de convolution sur Y (comme dans [Hi85], où la convolution d'une distribution thêta avec une distribution d'Eisenstein a été considérée).

iii) *Formes modulaires presque holomorphes de type $r \geq 0$* . Soient r un entier non-négatif et q, R deux variables indépendantes (pour les nombres complexes cette notation correspond à $q = e(z) = e^{2\pi iz}$, $R = 4\pi y = \frac{1}{4\pi \text{Im}(z)}$, $z \in \mathbb{C}$). Dans l'anneau $A[[q]][R]$ considérons les sous- $A[[q]]$ -modules

$$P_r(A) = \left\{ g = \sum_{j=0}^r R^j g_j \text{ avec } g_j = \sum_{n \geq 0} a(j, n, g) q^n \in A[[q]] \right\}.$$

On considère aussi pour tout entier positif a les espaces complexes des fonctions presque-holomorphes (voir [Hi85])

$$Q_{r,a} = \left\{ \sum_{j=0}^r \text{Im}(4\pi z)^{-j} g_j(z) \text{ avec } g_j = \sum_{n \geq 0} a(j, n, g) e(nz/a) \right\},$$

et on pose $Q_r = \bigcup_{a \geq 1} Q_{r,a}$.

Alors on définit le sous- A -module $\mathcal{M}_{r,k}(\Gamma_1(N), A) \subset A[[q]][R]$ des formes modulaires de type $r \geq 0$ et de poids $k \geq 1$ pour $\Gamma_1(N)$, comme le sous- A -module engendré par toutes les séries $g \in \mathcal{M}_{r,k}$ à coefficients algébriques $a(j, n, g) \in \overline{\mathbb{Q}} \subset A$ telles que les fonctions complexes correspondantes (notées aussi par g),

$$g = \sum_{j=0}^r \text{Im}(4\pi z)^{-j} \sum_{n \geq 0} a(j, n, g) e(nz) \in Q_{r,1}$$

satisfont les deux conditions suivantes :

$$\forall \gamma \in \Gamma_1(N), g|_k \gamma = g \text{ et } \forall \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), g|_k \gamma \in Q_r.$$

Alors, une construction des distributions analogue reste valable pour les valeurs dans le A -module

$$\mathcal{M}_{r,k} = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_{r,k}(Np^v), \text{ où } \mathcal{M}_{r,k}(Np^v) = \mathcal{M}_{r,k}(\Gamma_1(Np^v), A).$$

Cependant, notre but est d'obtenir des distributions μ à valeurs *scalaires* (dans $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}_p$) à partir d'une suite des distributions Φ_j *modulaires* (à valeurs dans $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$). Cela se fait en deux temps :

LA PREMIÈRE ÉTAPE est le passage de $\mathcal{M}$ à une partie $\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{M}$ de dimension finie fixe ; on utilise un projecteur convenable $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\circ$ de telle façon qu'on puisse contrôler les dénominateurs.

LA DEUXIÈME ÉTAPE est l'application d'une forme linéaire ℓ convenable à la suite des distributions $\pi(\Phi_j)$.

4. Première étape : projecteurs sur des sous-espaces de dimension finie

TRACE NORMALISÉE. La première idée est d'utiliser l'opérateur de la trace

$$\mathrm{Tr}_N^{Np^v} f = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(Np^v) \setminus \Gamma_0(N)} f|_k \gamma.$$

On obtient après une normalisation le projecteur suivant

$$\pi(f) = [\Gamma_0(N) : \Gamma_0(Np^v)]^{-1} \mathrm{Tr}_N^{Np^v} f$$

(il est bien défini mais il introduit des dénominateurs inacceptables).

PROJECTEUR DE HIDA. La deuxième idée est d'utiliser l'opérateur $U = U_p$ d'Atkin qui agit sur $\mathcal{M}$ et sur $\mathcal{S}$ par $U(g) = \sum_{n \geq 0} a(pn, g)q^n$, où $g = \sum_{n \geq 0} a(n, g)q^n \in \mathcal{M} \subset A[[q]]$, $a(n, g) \in A$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}_p$ une valeur propre non nulle de l'opérateur $U = U_p$ d'Atkin sur $\mathcal{M}$ (associée à une forme parabolique primitive $f = \sum_{n \geq 1} a(n, f)e(nz) \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi) \subset \mathcal{M}$).

Dans le cas ordinaire, où $|\alpha|_p = 1$, une construction du projecteur π provient de l'opérateur idempotent $e = \lim_{r \rightarrow \infty} U_p^{r!}$ de Hida [Hi93] qui agit sur les formes modulaires p -adiques et dont l'image se trouve dans un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}} \subset \mathcal{M}$ de rang finie ("la partie ordinaire de $\mathcal{M}$ "). Puis on obtient une distribution p -adique $\mu_{\alpha, \Phi} = \ell_f(e\Phi)$ à l'aide d'une forme linéaire convenable $\ell_f \in \mathcal{M}^{\mathrm{ord}*}$.

5. Une nouvelle construction : projecteur canonique α -primaire

On propose maintenant une méthode pour associer à une distribution Φ sur Y à valeurs dans un espace vectoriel convenable

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_k(\psi, \overline{\mathbb{Q}}) = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(Np^v, \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p) = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(Np^v, \psi, \mathbb{C}_p)$$

de formes modulaires, une famille $\mu_{\alpha, \Phi}$ de mesures p -adiques sur Y attachées à une valeur propre non nulle α de l'opérateur U_p sur $\mathcal{M}$. On montrera de plus que cette construction ne nécessite pas de *passage à la limite* p -adique. Ici on utilise la notation

$$\mathcal{M}_k(Np^v, \psi, A) = \mathcal{M}_k(Np^v, \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} A.$$

pour toute $\overline{\mathbb{Q}}$ -algèbre A .

Définition 5.1. Soit $A = \mathbb{C}_p$, $A = \overline{\mathbb{Q}}$, ou $A = \mathbb{C}$, et $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$.

a) Pour un $\alpha \in A$ on pose $\mathcal{M}^{(\alpha)} = \mathrm{Ker}(U - \alpha I)$ le sous-espace vectoriel sur A de $\mathcal{M}$ des fonctions propres (de valeur propre α).

b) On pose

$$\mathcal{M}^\alpha = \bigcup_{n \geq 1} \text{Ker}(U - \alpha I)^n$$

(le sous-espace vectoriel α -primaire de $\mathcal{M}$).

c) On pose pour tout $v \geq 0$

$$\mathcal{M}^\alpha(Np^v) = \mathcal{M}^\alpha \cap \mathcal{M}(Np^v), \quad \mathcal{M}^{(\alpha)}(Np^v) = \mathcal{M}^{(\alpha)} \cap \mathcal{M}(Np^v).$$

Proposition 5.2. Soit $\psi \bmod N$ un caractère de Dirichlet fixé. On pose $N_0 = Np$, alors $U^v(\mathcal{M}(N_0p^v, \psi)) \subset \mathcal{M}(N_0, \psi)$.

PREUVE. Elle découle de la formule connue [Se73] :

$$U^v = p^{v(k/2-1)} W_{N_0p^v} \text{Tr}_{N_0}^{N_0p^v} W_{N_0},$$

où $g|_k W_N(z) = (\sqrt{N}z)^{-k} g(-1/Nz) : \mathcal{M}(N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(N, \mathbb{C})$ l'involution (sur $\mathbb{C}$) de niveau N .

Proposition 5.3. Soit $A = \mathbb{C}_p$ ou $A = \overline{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$, $\alpha \in A^*$, et soit U^α la restriction de U sur $\mathcal{M}^\alpha$, alors

a) $(U^\alpha)^v : \mathcal{M}^\alpha(N_0p^v) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)$ est un opérateur A -linéaire inversible, où $U^\alpha = U|_{\mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)}$, $N_0 = Np$.

b) Le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}^\alpha(N_0p^v) = \mathcal{M}^\alpha(N_0)$ ne dépend pas de v .

c) Soit $\pi_{\alpha,v} : \mathcal{M}(N_0p^v) \rightarrow \mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)$ le projecteur sur le sous-espace α -primaire de U (de noyau

$$\text{Ker}(\pi_{\alpha,v}) = \bigcap_{n \geq 1} \text{Im}(U - \alpha I)^n = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} \mathcal{M}^\beta(N_0p^v),$$

alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(N_0p^v) & \xrightarrow{\pi_{\alpha,v}} & \mathcal{M}^\alpha(N_0p^v) \\ U^v \downarrow & & \downarrow \wr U^v \\ \mathcal{M}(N_0) & \xrightarrow{\pi_{\alpha,0}} & \mathcal{M}^\alpha(N_0). \end{array}$$

On utilise la notation

$$\pi_\alpha(g) = (U^\alpha)^{-v} \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \in \mathcal{M}^\alpha(\Gamma_0(Np), \psi, \mathbb{C})$$

pour la projection canonique α -primaire de $g \in \mathcal{M}(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \mathbb{C})$.

PREUVE de (a). L'opérateur linéaire $(U^\alpha)^v$ agit sur un A -espace vectoriel $\mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)$ de dimension finie, et son déterminant est dans A^* , donc $(U^\alpha)^v$ est *inversible*.

PREUVE de (b). D'une part, $\mathcal{M}^\alpha(N_0) \subset \mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)$, d'autre part les A -espaces vectoriels $\mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)$ et $\mathcal{M}^\alpha(N_0)$ sont isomorphes par (a), donc il coïncident :

$$\mathcal{M}^\alpha(N_0) \subset \mathcal{M}^\alpha(N_0p^v) = U^v(\mathcal{M}^\alpha(N_0p^v)) \subset \mathcal{M}^\alpha(N_0).$$

PREUVE de (c). Selon la théorie de réduction des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps K , le projecteur canonique $\pi_{\alpha,v}$ sur le sous-espace α -primaire

$$\bigcup_{n \geq 1} \text{Ker}(U - \alpha I)^n$$

de noyau $\bigcap_{n \geq 1} \text{Im}(U - \alpha I)^n$ s'exprime, d'une part, comme un polynôme de U à coefficients dans K , donc $\pi_{\alpha,v}$ commute avec U . D'autre part, la restriction de $\pi_{\alpha,v}$ sur $\mathcal{M}(N_0)$ coïncide avec $\pi_{\alpha,0} : \mathcal{M}(N_0) \rightarrow \mathcal{M}^\alpha(N_0)$, car son image est

$$\bigcup_{n \geq 1} \text{Ker}(U - \alpha I)^n \cap \mathcal{M}(N_0) = \bigcup_{n \geq 1} \text{Ker}(U|_{\mathcal{M}(N_0)} - \alpha I)^n,$$

et son noyau est

$$\bigcap_{n \geq 1} \text{Im}(U - \alpha I)^n \cap \mathcal{M}(N_0) = \bigcap_{n \geq 1} \text{Im}(U|_{\mathcal{M}(N_0)} - \alpha I)^n.$$

6. Distributions à valeurs dans les formes modulaires p -adiques

Soit $g = \sum_{n \geq 0} a(n, g) q^n \in \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N), A)$, alors $|g|_p = \sup_n |a(n, g)|_p$ est bien défini et donne une norme p -adique sur $\mathcal{M} = \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(N'p^v), A) \subset A[[q]]$. Soit V un A -module normé.

Définition 6.1. Soit $\alpha \neq 0$ une valeur propre non nulle de l'opérateur U sur l'espace $\mathcal{M}$. La partie α -primaire $\Phi^\alpha = \pi_\alpha(\Phi)$ d'une distribution Φ sur Y à valeurs dans $\mathcal{M}$ est donnée par l'égalité

$$\int_Y \varphi d\Phi^\alpha = \pi_\alpha(\Phi(\varphi)) = (U^\alpha)^{-v} \pi_{\alpha,0} \left(\left(\int_Y \varphi d\Phi \right) | U^v \right) \in \mathcal{M}^\alpha$$

pour toute fonction localement constante $\varphi \in \mathcal{C}^1(Y, A)$ et tout p^v assez grand (tel que $\int_Y \varphi d\Phi$ est une combinaison linéaire finie dans $\mathcal{M}(N_0 p^v)$).

On pose $\Phi(a + (Mp^v)) = \int_Y \delta_{a+(Mp^v)} d\Phi$ où $\delta_{a+(Mp^v)}$ désigne la fonction caractéristique d'un ouvert $a + (Mp^v) \subset Y$; alors il existe $v' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Phi(a + (Mp^v)) = \Phi(\delta_{a+(Mp^v)}) \in \mathcal{M}(N'p^{v'+1}),$$

et pour tout tel v' , la projection α -primaire $\Phi^\alpha = \pi_\alpha(\Phi)$ de Φ est donnée par

$$(6.1) \quad \Phi^\alpha(a + (Mp^v)) = (U^\alpha)^{-v'} \left[\pi_{\alpha,0}(\Phi(a + (Mp^v))) | U^{v'} \right].$$

7. Théorème principal

Dans cette section on note par A un sous-corps de $\mathbb{C}_p$ contenant $\overline{\mathbb{Q}}$, ($\overline{\mathbb{Q}} \subset A \subset \mathbb{C}_p$), on fixe un caractère de Dirichlet $\psi \bmod N$, on utilise toujours le plongement (1.1), et on fixe un entier N' divisible par N . On utilise l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(A) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(N'p^v) \text{ où } \mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; A).$$

Pour un nombre entier convenable $r^* \geq 0$, on considère une suite finie de distributions (non nécessairement bornées)

$$\Phi_j : \mathcal{C}^1(Y, \overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p),$$

($j = 0, 1, \dots, r^*$) sur le groupe profini

$$Y = Y_{M,p} = \varprojlim_v Y_{Mp^v}, \quad Y_{Mp^v} = (\mathbb{Z}/Mp^v\mathbb{Z})^\times$$

à valeurs dans l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(N'p^v) \text{ où } \mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; \overline{\mathbb{Q}}).$$

On note par $\delta_{a+(Mp^v)}$ la *fonction indicatrice* de la partie $a + (Mp^v) \subset Y$. On considère $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$ comme un $\mathbb{C}_p$ -espace vectoriel normé avec la norme

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n \right|_p = \max_n |b_n|_p.$$

Théorème 1. Soit $0 < |\alpha|_p < 1$ et $h = [\text{ord}_p \alpha] + 1$. On fixe un nombre entier positif N' , et on pose $N'_0 = N'p$. Supposons qu'il existe $\kappa \in \mathbb{N}^*$ tel que $\kappa h \leq r^*$.

(a) Si les deux conditions suivantes sont satisfaites : pour tous les $j = 0, 1, \dots, \kappa h - 1$ et pour tout $v \geq 1$,

$$(7.1) \quad \Phi_j(a + (Mp^v)) \in \mathcal{M}(N'_0 p^{\kappa v})$$

(la condition de niveau). Pour $t = 0, 1, \dots, \kappa h - 1$ l'estimation suivante soit satisfaite :

$$(7.2) \quad \left| U^{\kappa v} \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \right|_p \leq Cp^{-vt}$$

(la condition de divisibilité) pour une constante $C > 0$. Alors l'application linéaire

$$(7.3) \quad \tilde{\Phi}^\alpha : \mathcal{C}^{h\kappa}(Y, \overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}$$

définie par

$$(7.4) \quad \tilde{\Phi}^\alpha(\delta_{a+(Mp^v)} y_p^j) = \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}^\alpha := \pi_\alpha(\Phi_j(a + (Mp^v)))$$

(pour tout $j = 0, 1, \dots, h\kappa - 1$), est une mesure $h\kappa$ -admissible.

(b) Supposons qu'il existe $v_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $v \geq v_0$ et pour $j = 0, 1, \dots, \kappa h - 1$ les distributions $U^{\kappa v}(\Phi_j)$ sont bornées et que l'estimation soit satisfaite :

$$(7.5) \quad \left| (U^{\kappa v} \Phi_j)(a + (Mp^v)) - \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\kappa v}(\Phi_0(y))) \right|_p < Cp^{-v h \kappa}$$

où on pose $C = \max_{a,v} |U^{\kappa v_0}(\Phi_0)(a + (Mp^v))|_p$. Alors l'application linéaire

$$\tilde{\Phi}^\alpha : \mathcal{C}^{h\kappa}(Y, A) \rightarrow \mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}$$

définie par

$$\int_{a+(Mp^v)} y_p^j d\tilde{\Phi}^\alpha = \Phi_j^\alpha(a + (Mp^v)) := \pi_\alpha(\Phi_j(a + (Mp^v)))$$

(pour tout $j = 0, 1, \dots, h\kappa - 1$), est une mesure $h\kappa$ -admissible.

PREUVE de (a). Il suffit de vérifier pour $\tilde{\Phi}^\alpha$ la condition de croissance de la définition 2.1 d) : pour tous les $t = 0, 1, \dots, \kappa h - 1$,

$$(7.6) \quad \left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha \right|_p = o(p^{v(h\kappa-t)}) \text{ lorsque } v \rightarrow \infty$$

D'une part, sur le sous-espace $\mathcal{M}^\alpha(N'_0)$, on a $U = \alpha I + Z$ pour un opérateur nilpotent Z , où $Z^n = 0$ pour $n = rk_A \mathcal{M}^\alpha(N'_0 p^v) = rk_A \mathcal{M}^\alpha(N'_0)$. D'autre part, par les conditions du théorème 1,

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha &= \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \pi_\alpha(\Phi_j(a + (Mp^v))) \\ &= \alpha^{-v\kappa} \alpha^{v\kappa} U^{-v\kappa} \left[\pi_{\alpha,0} U^{v\kappa} \left(\sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \right) \right]. \end{aligned}$$

Les opérateurs

$$\alpha^{v\kappa} U^{-v\kappa} = (\alpha^{-1} U)^{-v\kappa} = (Id + \alpha^{-1} Z)^{-v\kappa} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-v\kappa}{i} (\alpha^{-1} Z)^i$$

sont *uniformément* bornés par une constante $C_1 > 0$ donc la condition (7.2), appliquée à l'égalité (7.7), donne

$$\left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha \right|_p \leq C \cdot C_1 |\alpha|_p^{-m\kappa} |p^v|_p^t = o(p^{v(h\kappa-t)})$$

lorsque $v \rightarrow \infty$ car $|\alpha|_p = |p|^{\text{ord}_p \alpha}$, $\text{ord}_p \alpha < h$,

$$|p^v|_p^{-\kappa \text{ord}_p \alpha} = o(p^{v\kappa h}) \text{ (lorsque } v \rightarrow \infty \text{)}.$$

PREUVE de (b). On vérifie d'abord l'estimation suivante : pour tous les $t = 0, 1, \dots, \kappa h - 1$ et pour tous les ouverts $a + (Mp^v)$ on a

$$(7.8) \quad \left| U^{\kappa v} \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \right|_p \leq C |p^v|_p^t = Cp^{-vt}$$

pour une constante $C > 0$. En effet, on peut supposer $v \geq v_0$ donc par l'hypothèse (7.5)

$$\left| (U^{\kappa v} \Phi_j)(a + (Mp^v)) - \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\kappa v}(\Phi_0(y))) \right|_p < Cp^{-v h \kappa}.$$

On pose

$$\Psi_j(a + (Mp^v)) = (U^{\kappa v} \Phi_j)(a + (Mp^v)) - \int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\kappa v}(\Phi_0(y))),$$

donc

$$\int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\kappa v}(\Phi_0(y))) = (U^{\kappa v} \Phi_j)(a + (Mp^v)) - \Psi_j(a + (Mp^v))$$

et $|\Psi_j(a + (Mp^v))|_p < Cp^{-v h \kappa}$. La substitution dans la partie gauche de l'inégalité (7.8) donne

$$\begin{aligned} (7.9) \quad & U^{\kappa v} \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \\ &= \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \left(\int_{a+(Mp^v)} y_p^j d(U^{\kappa v}(\Phi_0(y))) - \Psi_j(a + (Mp^v)) \right) \\ &= \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d(U^{\kappa v}(\Phi_0(y))) - \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Psi_j(a + (Mp^v)) \end{aligned}$$

et $|(y_p - a_p)^t|_p \leq p^{-vt}$ sur $a + (Mp^v)$ donne l'estimation cherchée de la partie droite de (7.8).

Puis, on vérifie de même façon la condition de croissance de la définition 2.1 d) pour la forme linéaire

$$\tilde{\Phi}^\alpha : \mathcal{C}^{h\kappa}(Y, A) \rightarrow \mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}$$

définie dans le Théorème principal (théorème 1). Par l'estimation (7.8) on a

$$(7.10) \quad \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha = \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \tilde{\Phi}_j^\alpha(a + (Mp^v)) \\ = \alpha^{-v\kappa} \alpha^{v\kappa} U^{-v\kappa} \left[\pi_{\alpha,0} U^{v\kappa} \left(\sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \tilde{\Phi}_j(a + (Mp^v)) \right) \right].$$

Les opérateurs

$$\alpha^{v\kappa} U^{-v\kappa} = (\alpha^{-1} U)^{-v\kappa} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-v\kappa}{i} (\alpha^{-1} Z)^i$$

sont uniformément bornés par une constante $C_1 > 0$ donc la condition 7.8 appliquée à 7.10 donne de nouveau

$$\left| \int_{a+(Mp^v)} (y_p - a_p)^t d\tilde{\Phi}^\alpha \right|_p \leq C \cdot C_1 |\alpha|_p^{-m\kappa} |p^v|_p^t = o(p^{v(h\kappa-t)})$$

lorsque $v \rightarrow \infty$ car $|\alpha|_p = |p|^{\text{ord}_p \alpha}$, $\text{ord}_p \alpha < h$,

$$|p^v|_p^{-\kappa \text{ord}_p \alpha} = o(p^{v\kappa h}) \text{ (lorsque } v \rightarrow \infty)$$

et on peut préciser la constante :

$$C = \max_{a,v} |U^{\kappa v_0}(\Phi_0)(a + (Mp^v))|_p.$$

8. Deuxième étape : application d'une forme linéaire convenable

Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ une valeur propre non nulle de U sur $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ attachée à une forme parabolique primitive $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N), \psi)$ et soit

$$(8.1) \quad f_0 = f_{0,\alpha} = f - \alpha' V(f), \quad V \left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n \right) = \sum_{n \geq 0} b_n q^{pn}$$

une fonction propre de U , telle que $f_0|U = \alpha f_0$. On pose

$$(8.2) \quad f^0 = f_0^\rho|W_{N_0}, \quad f_0^\rho = \sum_{n \geq 1} \overline{a_n(f_0)} q^n, \quad W_{N_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0 = Np.$$

Proposition 8.1.

a) L'opérateur $U^* = W_{N_0}^{-1} U W_{N_0}$ dans $S_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ est l'opérateur de U par rapport au produit scalaire de Petersson.

b) $f^0|U^* = \bar{\alpha}f^0$, et pour tous les "bons" nombres premiers $l \nmid Np$, on a

$$T_l f^0 = a_l(f) f^0.$$

c) Pour tout $g \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ on a

$$\langle f^0, g \rangle = \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) \rangle,$$

c'est à dire, la forme linéaire $g \mapsto \langle f^0, g \rangle$ sur $\mathcal{M}(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ s'annule sur $\text{Ker}(\pi_{\alpha,0})$, où

$$\pi_{\alpha,0} : \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}^\alpha(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$$

est le projecteur sur le sous-espace α -primaire, de noyau

$$\text{Ker}(\pi_{\alpha,0}) = \text{Im}((U - \alpha I)^n) = \bigoplus_{\beta \neq \alpha} \mathcal{M}^\beta(N_0),$$

(comme dans Proposition 5.3, mais sur $\mathbb{C}$), où $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$.

d) On pose $N_0 = Np$. Si $g \in \mathcal{M}(Np^{v+1}, \overline{\mathbb{Q}}) = \mathcal{M}((\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{Q}), \overline{\mathbb{Q}})$, et si $\alpha \neq 0$, on a

$$\langle f^0, \pi_\alpha(g) \rangle = \alpha^{-v} \langle f^0, U^v(g) \rangle$$

où

$$\pi_\alpha(g) = (U^\alpha)^{-v} \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \in \mathcal{M}^\alpha(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \mathbb{C}) = \mathcal{M}^\alpha(\Gamma_0(Np), \psi, \mathbb{C})$$

est la projection canonique α -primaire de $g \in \mathcal{M}(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \mathbb{C})$.

e) On pose

$$\mathcal{L}_{f,\alpha}(g) = \frac{\langle f^0, \alpha^{-v} U^v(g) \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle f^0, \pi_\alpha(g) \rangle}{\langle f, f \rangle},$$

alors on obtient une forme linéaire

$$\mathcal{L}_{f,\alpha} : \mathcal{M}(\Gamma_0(Np^{v+1}), \psi, \overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}},$$

définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et il existe une unique forme $\mathbb{C}_p$ -linéaire $\ell_{f,\alpha} \in \mathcal{M}^\alpha(N_0, \psi, \mathbb{C}_p)^*$ donnée sur les $\mathbb{C}_p$ -générateurs de l'espace vectoriel

$$\mathcal{M}^\alpha(N_0 p^v, \psi, \mathbb{C}_p) = \mathcal{M}^\alpha(Np^{v+1}, \overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}_p$$

par l'égalité

$$\ell_{f,\alpha}(g^\alpha) = i_p(\mathcal{L}_{f,\alpha}(g)) = i_p \left(\frac{\langle f^0, \alpha^{-v} U^v(g) \rangle}{\langle f, f \rangle} \right).$$

PREUVE DE PROPOSITION 8.1

a) Voir [Miy], Th. 4.5.5.

b) On a :

$$f^0|U^* = f_0^\rho \mid W_{Np}W_{Np}^{-1}UW_{Np} = \bar{\alpha}f_0^\rho \mid W_{Np} = \bar{\alpha}f^0.$$

c) Pour toute fonction

$$g_1 = (U - \alpha I)^n g \in \text{Ker}(\pi_{\alpha,0}) = \text{Im}(U - \alpha I)^n$$

on a

$$\langle f^0, g_1 \rangle = \langle f^0, (U - \alpha I)^n g \rangle = \langle (U^* - \bar{\alpha} I) f^0, (U - \alpha I)^{n-1} g \rangle = 0$$

donc pour $g_1 = g - \pi_{\alpha,0}(g)$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle f^0, g \rangle &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) + (g - \pi_{\alpha,0}(g)) \rangle \\ &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) \rangle + \langle f^0, g_1 \rangle \\ &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(g) \rangle. \end{aligned}$$

d) Utilisons directement l'égalité $(U^*)^v f^0 = \bar{\alpha}^v f^0$ de b) :

$$\begin{aligned} \alpha^v \cdot \langle f^0, \pi_{\alpha}(g) \rangle &= \langle (U^*)^v f^0, U^{-v} \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \rangle \\ &= \langle f^0, \pi_{\alpha,0}(U^v(g)) \rangle \\ &= \langle f^0, U^v(g) \rangle \end{aligned}$$

par c), puisque $U^v(g) \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$.

e) On remarque que $f^0 \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0), \psi, \mathbb{C})$ donc

$$\mathcal{L}_{f,\alpha}(f_0) = \frac{\langle f^0, \pi_{\alpha}(f^0) \rangle}{\langle f, f \rangle} = \frac{\langle f^0, f^0 \rangle}{\langle f, f \rangle} \in \overline{\mathbb{Q}};$$

considérons l'espace vectoriel complexe

$$\begin{aligned} &\text{Ker}(\mathcal{L}_{f,\alpha}) \cap \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C}). \\ (8.3) \quad &= \pi_{\alpha}^{-1}(\langle f^0 \rangle^{\perp}) \\ &= \{g \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C}) \mid \langle f^0, g \rangle = 0\} \\ &\subset \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

qui admet une base $\overline{\mathbb{Q}}$ -rationnelle car il est stable par tous les "bons" opérateurs de Hecke T_l ($l \nmid Np$) :

$$\langle f^0, g \rangle = 0 \implies \langle f^0, T_l g \rangle = \langle T_l^* f^0, g \rangle = 0$$

et on obtient une telle base par la diagonalisation de l'action de tous les T_l (une famille commutative d'opérateurs normaux) ce qui entraîne e). On a utilisé le fait apparent que le projecteur π_{α} est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sur tout espace vectoriel $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N_0 p^v), \psi, \mathbb{C})$, puisque $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$.

9. Lien avec les fonctions L : convolutions des séries d'Eisenstein

On fixe dans cette section un caractère de Dirichlet auxiliaire $\xi \bmod p$, $\xi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}^*$, (soit paire soit impaire), et on utilise la méthode de Rankin-Selberg pour la convolution

$$D(s, f, g) = L_N(2s + 2 - k - l, \psi \bar{\xi} \chi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s},$$

où les nombres

$$b_n = \sigma_{l-1, \bar{\chi}, \bar{\xi}}(n) = \sum_{d|n, d>0} \bar{\chi}(d) \bar{\xi}(n/d) d^{l-1}, \quad n \geq 1$$

sont les coefficients de Fourier d'une certaine série d'Eisenstein $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(2\pi i n z)$ de poids l (et de caractère de Dirichlet $\bar{\chi} \bar{\xi}$) dès que $\chi \xi(-1) = (-1)^l$. On a donc

$$L_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = L(s - l + 1, \bar{\chi}) L(s, \bar{\xi}),$$

et on sait par le lemme de Rankin ([Ra52], voir aussi [Hi85], [Man-Pa]) que $D(s, f, g)$ s'exprime par la fonction

$$(9.1) \quad L_f(s - l + 1, \bar{\chi}) L_f(s, \bar{\xi}).$$

Considérons deux *distributions d'Eisenstein* définies par les égalités suivantes :

$$(9.2) \quad \begin{aligned} E_{0, \ell, Mp^v}(\xi, b) &:= \sum_{a \in Y_{Mp^v}} \xi(a) E_{0, \ell}(a, b; Mp^v) \in \mathcal{M}_{\ell}^{\infty}(\Gamma_1(Mp^v)), \\ E_{r, \ell, Mp^v}(a) &:= \sum_{b \in Y_{Mp^v}} E_{r, \ell, Mp^v}(a, b) \in \mathcal{M}_{\ell}^{\infty}(\Gamma_1(Mp^v)), \end{aligned}$$

à partir des séries (3.1)

$$\begin{aligned} E_{r, \ell, N}(a, b) &:= \frac{N^{\ell-2r-1} \Gamma(\ell-r)}{(-2\pi i)^{\ell-2r} (-4\pi y)^r} \sum_{a \bmod N} e(-ax/N) E_{\ell, N}(Nz, -r; x, b) \\ &= \varepsilon_{r, \ell, N}(a, b) + (4\pi y)^{-r} \times \\ &\quad \sum_{\substack{0 < dd' \\ d \equiv a, d' \equiv b \bmod N}} \operatorname{sgn} d \cdot d^{\ell-2r-1} W(4\pi dd' y, \ell-r, -r) q^{dd'} \in \mathcal{M}_{\ell}^{\infty}(N^2), \end{aligned}$$

où $W(y, \ell-r, -r) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)} y^{r-j}$. De plus, on utilise la notation suivante pour les sommes :

$$E_{0,k-1-j}(\xi, \chi) = \frac{1}{2} \sum_{a \in Y_{Mp^v}} \chi(a) E_{0,k-1-j, Mp^v}(\xi, a) \in \mathcal{M}_{k-1-j}(\Gamma_0(Mp^v), \xi\chi),$$

$$E_{j,1+j}(\psi\overline{\chi\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{b \in Y_{Mp^v}} (\psi\overline{\chi\xi})(b) E_{j,1+j, Mp^v}(b) \in \mathcal{M}_{1+j}(\Gamma_0(Mp^v), \psi\overline{\chi\xi}),$$

La fonction

$$(9.3) \quad \Phi_j(\chi) = (-1)^j E_{0,k-1-j}(\xi, \chi) E_{j,1+j}(\psi\overline{\chi\xi})$$

est alors une forme modulaire *holomorphe* dans

$$\mathcal{M}_k(\Gamma_0(Mp^v), \psi; \mathbb{Q}^{\text{ab}}) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^v); \mathbb{Q}^{\text{ab}})$$

puisque si $r = 0$ ou $r = l - 1$,

$$y^{-r} W(y, \ell-r, -r) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} \frac{\Gamma(\ell-r)}{\Gamma(\ell-r-j)} y^{-j} = 1,$$

à cause du facteur $\frac{\Gamma(l-r)}{\Gamma(l-r-j)} = 0$ pour $j \geq l-r$.

FORME LINÉAIRE $\mathcal{L}_{f,\alpha}$ ET LA CONVOLUTION DE RANKIN-SELBERG.

Ensuite, on calcule la valeur $\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi))$ de la $\mathbb{Q}$ -forme linéaire $\mathcal{L}_{f,\alpha}$.

Proposition 9.1. Soient $\chi, \psi : Y \rightarrow \mathbb{Q}^{\text{ab}\times}$ deux caractères de Dirichlet mod Mp^v ,

a) Soit $f \in \mathcal{S}_k(N, \psi)$, $k \geq 2$, alors l'égalité suivante

$$(9.4) \quad \Phi_j(a + (Mp^v)) = (-1)^j \sum_{y \in Y_{Mp^v}} \psi\overline{\xi}(y) E_{0,k-1-j}(\xi, ya) E_{j,1+j}(y)$$

définie une distribution (dite la convolution tordue par le caractère $\psi\overline{\xi}$), pour tout $j = 0, \dots, k-2$ à valeurs dans l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}) := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}(N'p^v) \text{ où } \mathcal{M}(N'p^v) = \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N'p^v), \psi; A).$$

(la définition dépend de choix du caractère auxiliaire ξ). Alors la valeur sur χ de cette distribution est égale à

$$\Phi_j(\chi) = (-1)^j E_{0,k-1-j}(\xi, \chi) E_{j,1+j}(\psi\overline{\chi\xi}).$$

b) Pour tout caractère χ primitif mod p^v ($v \geq 1$), les valeurs spéciales de la fonction $L_f(s, \chi) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) a_n(f) n^{-s}$ sont liées avec les nombres

algébriques $\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi))$ pour $0 \leq j \leq k-2$ par la formule

$$(9.5) \quad \mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi)) = \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot L_f^*(j+1, \bar{\chi}) \cdot t,$$

(où $G(\chi)$ est la somme de Gauss)

$$\begin{aligned} L_f^*(1+j, \bar{\chi}) &:= \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \bar{\chi})}{(-2i\pi)^{j+1}c^\pm(f)} \\ &= \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \bar{\chi})L_f(k-1, \bar{\xi})}{(-2\pi i)^{j+k}\langle f, f \rangle} \in \overline{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

pour un choix des deux constantes complexes non-nulles

$$c^+(f) = c^+(f, \xi), \quad c^-(f) = c^-(f, \xi) \in \mathbb{C}^\times$$

("périodes" de f) avec $(-1)^{k-j-1}\chi(-1) = \pm 1$, et pour une constante élémentaire $t \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, comparer avec l'égalité (1.2)).

c) La suite Φ_j définie (via Théorème 1 ci-dessus) une mesure h -admissible $\mu_{f,\alpha}$ qui interpole les valeurs critiques

$$\frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \bar{\chi})L_f(k-1, \bar{\xi})}{(-2\pi i)^{j+k}\langle f, f \rangle}$$

pour les caractères de Dirichlet χ primitifs mod p^v (comparer avec [Vi76]).

PREUVE DE PROPOSITION 9.1. a) C'est une propriété générale des convolutions multiplicatives (voir [Hi85]). Plus explicitement, l'égalité (9.4) montre que le développement de Fourier des distributions Φ_j (pour $j = 0, \dots, k-2$) est donnée par

$$(9.6) \quad \Phi_j(a + Mp^v) = (-1)^j \sum_{b \in Y_{Mp^v}} \psi_{\bar{\xi}}(b) \sum_{n \geq 0} \sum_{n_1+n_2=n} A_j(n_1, ab)_v B_j(n_2, b)_v q^n,$$

où

$$(9.7) \quad \begin{aligned} A_j(n_1, ab)_v &= \sum_{\substack{d_1 | n_1 \\ (n_1/d_1) \equiv ab \pmod{Mp^v}}} \xi(d_1) \operatorname{sgn}(d_1) d_1^{k-2-j} \\ B_j(n_2, b)_v &= \sum_{\substack{d_2 | n_2 \\ d_2 \equiv b \pmod{Mp^v}}} \operatorname{sgn}(d_2) (n_2/d_2)^j \quad \text{pour } n_2 > 0. \end{aligned}$$

b) Impliquée par la méthode de Rankin-Selberg pour la convolution

$$D(s, f, g) = L_N(2s + 2 - k - l, \psi \bar{\xi} \chi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s},$$

où ξ est un caractère de Dirichlet ξ non trivial auxiliaire et les nombres

$$b_n = \sigma_{l-1, \bar{\chi}, \bar{\xi}}(n) = \sum_{d|n, d>0} \bar{\chi}(d) \bar{\xi}(n/d) d^{l-1}, \quad n \geq 1$$

sont les coefficients de Fourier d'une certaine série d'Eisenstein $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp(2\pi i n z)$ de poids l (et de caractère de Dirichlet $\bar{\chi}\bar{\xi}$) dès que $\chi\xi(-1) = (-1)^l$. On a donc

$$L_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = L(s-l+1, \bar{\chi}) L(s, \bar{\xi}),$$

et un calcul de l'intégrale de Rankin-Selberg (voir par exemple proposition 7.7 dans [PaTV]) montre que

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle_{Np} \mathcal{L}_{f, \alpha}(\Phi_j(\chi)) &= R \cdot \alpha^{-v} p^{vj} A(f, \xi) G(\chi) \Gamma(1+j) \Gamma(k-1) \\ &\quad \times \frac{L_f(1+j, \bar{\chi}) L_f(k-1, \bar{\xi})}{(-2i\pi)^{k+j}} \\ &= \frac{G(\chi) p^{jv}}{\alpha^v} \cdot L_f^*(j+1, \bar{\chi}) \cdot t, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} L_f^*(1+j, \bar{\chi}) &= \frac{\Gamma(j+1) L_f(j+1, \bar{\chi})}{(-2i\pi)^{j+1} c^{\pm}(f)} \\ &= \frac{\Gamma(j+1) L_f(j+1, \bar{\chi}) L_f(k-1, \bar{\xi})}{(-2i\pi)^{j+k} \langle f, f \rangle} \in \overline{\mathbb{Q}}, \end{aligned}$$

pour le choix suivant des deux constantes complexes non-nulles :

$$c^{\pm}(f) = \frac{(-2i\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle}{\Gamma(k-1) L_f(k-1, \bar{\xi})}, \quad c^{\mp}(f) = \frac{\Gamma(k-1) L_f(k-1, \bar{\xi})}{(-2i\pi)^{k-1}},$$

déterminé par la règle $\xi(-1) = \pm 1$, $-\xi(-1) = \mp 1$ (on remarque ici que pour tout $k \geq 4$, $L_f^*(k-1, \bar{\xi}) \neq 0$, à cause de la convergence absolue du produit d'Euler correspondant, mais même pour $k = 2, 3$ on peut choisir ξ avec cette propriété, voir [Shi77]).

Ceci démontre (b) et on retrouve le résultat de Yu.I. Manin sur l'algébricité de (1.2).

c) On vérifie coefficient-par-coefficient que les distributions Φ_j satisfont les conditions de niveau et de divisibilité (7.1), (7.2).

Puis on applique directement le théorème 1 et la proposition 8.1 c), d) pour obtenir les mesures h -admissibles cherchées $\mu_{f, \alpha}$ sous la forme $\mu_{f, \alpha} = \ell_{f, \alpha}(\tilde{\Phi}^{\alpha})$.

En effet, on vérifie tout d'abord que les conditions de niveau et de divisibilité du théorème 1 sont satisfaites pour les distributions (9.6) :

$$\begin{aligned}\Phi_j(a + (Mp^v)) &= (-1)^j \sum_{y \in Y_{Mp^v}} \psi_{\xi}(y) E_{0,k-1-j}(\xi, ya) E_{j,1+j}(y) \\ &= \sum_{b \in Y_{Mp^v}} \psi_{\xi}(b) \sum_{n \geq 0} \sum_{n_1+n_2=n}^{\infty} (-1)^j A_j(n_1, ab)_v B_j(n_2, b)_v q^n,\end{aligned}$$

La condition de niveau des distributions Φ_j est satisfaite avec $\kappa = 1$ par la définition des séries d'Eisenstein (9.3) (on pose $N' = NM^2$).

Il reste donc à montrer la divisibilité par p^{tv} de tous les coefficients de Fourier de la forme modulaire suivante :

$$\begin{aligned}(9.8) \quad U^{\kappa v} \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \Phi_j(a + (Mp^v)) \\ = \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a_p)^{t-j} \sum_{n \geq 0} \sum_{n_1+n_2=p^{\kappa v} n}^{\infty} (-1)^j A_j(n_1, ab)_v B_j(n_2, b)_v q^n,\end{aligned}$$

(où $A_j(n_1, ab)_v$ et $B_j(n_2, b)_v$ sont donnés par les égalités (9.7) :

$$\begin{aligned}A_j(n_1, ab)_v &= \sum_{\substack{d_1 | n_1 \\ (n_1/d_1) \equiv ab \pmod{Mp^v}}} \xi(d_1) \operatorname{sgn}(d_1) d_1^{k-2-j} \\ B_j(n_2, b)_v &= \sum_{\substack{d_2 | n_2 \\ d_2 \equiv b \pmod{Mp^v}}} \operatorname{sgn}(d_2) (n_2/d_2)^j \text{ pour } n_2 > 0.\end{aligned}$$

On fixe n_1 et n_2 avec $n_1 + n_2 = p^{\kappa v} n$, $d_1 | n_1$ et $d_2 | n_2$ avec $(n_1/d_1) \equiv ab \pmod{Mp^v}$ et $d_2 \equiv b \pmod{Mp^v}$, et on écrit que les termes dépendant de j (on mis les autres termes en facteur) :

$$\begin{aligned}(9.9) \quad \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} (-a)^{t-j} (-1)^j d_1^{k-2-j} \left(\frac{n_2}{d_2} \right)^j &= d_1^{k-2} \left(-a - \left(\frac{n_2}{d_1 d_2} \right) \right)^t \\ &\equiv d_1^{k-2} d_2^{-t} \left(-ad_2 + \left(\frac{n_1}{d_1} \right) \right)^t \\ &\equiv 0 \pmod{p^{vt}}\end{aligned}$$

La congruence (9.9) est donc satisfaite puisque $n_2 \equiv -n_1 \pmod{p^v}$, $p \nmid d_2$ et

$$ad_2 \equiv ab \equiv \frac{n_1}{d_1} \pmod{p^v}.$$

La suite Φ_j définie donc (via Théorème 1 ci-dessus) une mesure h -admissible $\mu_{f,\alpha}$ donnée par la suite des distributions $\mu_{f,\alpha,j}(a + (Mp^v)) =$

$\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(a + (Mp^v)))$. L'identité (9.5) montre que cette suite interpole les valeurs critiques :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{f,\alpha}(\Phi_j(\chi)) &= \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot L_f^*(j+1, \bar{\chi}) \cdot t \\ &= \frac{G(\chi)p^{jv}}{\alpha^v} \cdot \frac{\Gamma(j+1)L_f(j+1, \bar{\chi})L_f(k-1, \bar{\xi})}{(-2\pi i)^{j+k}\langle f, f \rangle}\end{aligned}$$

pour les caractères de Dirichlet χ primitifs mod p^v (comparer avec [Vi76]).

10. Application aux produits triples : cas admissible

Considérons l'espace vectoriel

$$\mathcal{M} := \bigcup_{v \geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma_1(Np^v))^{\otimes 3}$$

et soit $L(f \otimes g \otimes h, s)$ la fonction L triple associée à $f \otimes g \otimes h \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(N))^{\otimes 3}$ avec une valeur propre *non nulle* $\alpha\beta\gamma$, alors

$$f_0 \otimes g_0 \otimes h_0 \in \mathcal{S}_k(\Gamma_1(Np))^{\otimes 3}$$

est une fonction propre de $U^{\otimes 3}$ sur $\mathcal{M}$, et $f^0 \otimes g^0 \otimes h^0$ est une fonction propre de $(U^*)^{\otimes 3}$. Utilisons la restriction sur la diagonale $\Phi = E_k^3(z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{M}$ de la distribution de Siegel-Eisenstein (voir [Plsr]) vue comme une série formelle de Fourier. On obtient une suite des distributions Φ_j sur Y^3 à valeurs dans $\mathcal{M}$ en utilisant l'action de certains opérateurs différentiels sur Φ (voir [PTr]).

On considère la forme linéaire suivante :

$$l_{f \otimes g \otimes h, \alpha\beta\gamma}(\Phi_j) := i_p \left(\frac{\langle f^0 \otimes g^0 \otimes h^0, \Phi_j^{\alpha\beta\gamma} \rangle}{\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \langle h, h \rangle} \right)$$

Théorème 2. *On pose $h = [2\text{ord}_p(\alpha\beta\gamma)] + 1$. Il existe une suite μ_j de distributions $\mu_j = l_{f \otimes g \otimes h, \alpha\beta\gamma}(\Phi_j)$ sur Y^3 à valeurs dans $\mathcal{M}^\alpha \subset \mathcal{M}$ qui détermine (via le théorème 1 ci-dessus) une mesure h -admissible*

$$\tilde{\mu} = l_{f \otimes g \otimes h, \alpha\beta\gamma}(\tilde{\Phi}^{\alpha\beta\gamma})$$

telle que les intégrales

$$\tilde{\mu}(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3) = l_{f \otimes g \otimes h, \alpha\beta\gamma}(\tilde{\Phi})(\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3)$$

(des produits des caractères de Dirichlet $\chi_1 \otimes \chi_2 \otimes \chi_3$) coïncident avec les valeurs spéciales

$$L^*(f_{\chi_1} \otimes g_{\chi_2} \otimes h_{\chi_3}, k+j), \quad (j = 0, \dots, k-2),$$

pourvue que la normalisation de L^* inclut à la fois sommes de Gauss, produits scalaires de Petersson, puissances de π et de $\alpha\beta\gamma$.

PREUVE (abrégée). L'existence de la mesure h -admissible $l_{f \otimes g \otimes h, \alpha\beta\gamma}(\tilde{\Phi}^{\alpha\beta\gamma})$ découle de la suite Φ_j ci-dessus à l'aide du Théorème 1 avec $\kappa = 2$, $j = 0, \dots, k-2$, et l'égalité pour les valeurs spéciales est impliquée par une version explicite de la formule intégrale de Garrett-Harris [GaHa], voir aussi [LBP], [PTr], [B-SchP]. Les détails apparaîtront dans un autre article (un travail en cours conjoint avec S.Böcherer).

Bibliographie

- [AV] YVETTE AMICE, JACQUES VÉLU, *Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke*. Astérisque **24–25** (1975), 119–131.
- [B-SchP] S.BOECHERER, R.SCHULZE-PILLOT, *On the central critical value of the triple product L -function*. Séminaire de théorie des nombres, Paris (1993–94), Birkhäuser, 1996, 3–46.
- [Co] JOHN COATES, *On p -adic L -functions*. Séminaire Bourbaki, 40^{ème} année, 1987–88, no. **701** (1989), 177–178.
- [Co-PeRi] JOHN COATES, BERNADETTE PERRIN-RIOU, *On p -adic L -functions attached to motives over $\mathbb{Q}$* . Advanced Studies in Pure Math. **17** (1989), 23–54.
- [Colm98] PIERRE COLMEZ, *Fonctions L p -adiques*. Séminaire Bourbaki, 51^{ème} année, 1998–99, no. **851**.
- [De-Ri] P.DELIGNE, K.A.RIBET., *Values of Abelian L -functions at negative integers over totally real fields*. Invent. Math. **59** (1980) 227–286.
- [Jo] FABIENNE JORY, *Familles de symboles modulaires et fonctions L p -adiques*. Thèse de Doctorat, Institut Fourier (Grenoble), 18 décembre 1998. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/t92.ps.gz>
- [Hi85] HARUZO HIDA, *A p -adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic cusp forms I*. Invent. Math. **79** (1985), 159–195.
- [Hi93] HARUZO HIDA, *Elementary theory of L -functions and Eisenstein series*. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [GaHa] PAUL B. GARRETT, MICHAEL HARRIS, *Special values of triple product L -functions*. Am. J. Math. **115** (1993), 161–240.
- [Ka76] N. M. KATZ, *p -adic interpolation of real analytic Eisenstein series*. Ann. of Math. **104** (1976), 459–571.
- [Ka78] KATZ, N.M., *p -adic L -functions for CM -fields*. Invent. Math. **48** (1978), 199–297.
- [KI] KLINGEN H., *Über die Werte Dedekindscher Zetafunktionen*. Math. Ann. **145** (1962), 265–272.
- [LBP] YANN-HENRI LE BRAS, A.A.PANCHISHKIN, *Sur les produits triples Λ -adiques*. Communications in Algebra **29** no. **9** (2001), 3727–3740.
- [Ma73] YU.I. MANIN, *Periods of cusp forms and p -adic Hecke series*. Mat. Sbornik **92** (1973), 378–401.
- [Man-Pa] YU.I.MANIN, A.A. PANCHISHKIN, *Convolutions of Hecke series and their values at integral points*. Mat. Sbornik **104** (1977), 617–651.
- [Miy] TOSHITSUNE MIYAKE, *Modular forms*. Transl. from the Japanese by Yoshitaka Maeda. Berlin etc. Springer-Verlag. viii, 1989.
- [MTT] B.MAZUR, J.TATE, J. TEITELBAUM, *On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*. Invent. Math. **84** (1986), 1–48.
- [PLNM] A.A. PANCHISHKIN, *Non-Archimedean L -functions of Siegel and Hilbert modular forms*. Lecture Notes in Math. **1471**, Springer-Verlag, 2nd augmented edition 2003.
- [PTr] A.A. PANCHISHKIN, *Produits triples des formes modulaires et leur interpolation p -adique par la méthode d'Amice-Vélu*. Manuscript de l'exposé au Colloque à la mémoire d'Yvette Amice, (mars 1994), 1–27.

- [PIsr] A.A. PANCHISHKIN, *On the Siegel–Eisenstein measure*. Israel Journal of Mathematics **120** (2000), 467–509.
- [PaTV] A.A.PANCHISHKIN, *Two variable p -adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope*. Inventiones Math. **154** no. 3 (2003), 551 - 615.
- [PaB1] A.A.PANCHISHKIN, *Arithmetical differential operators on nearly holomorphic Siegel modular forms*. Preprint MPI **41** (2002), 1–52.
- [PaB1] A.A.PANCHISHKIN, *Admissible measures for standard L -functions and nearly holomorphic Siegel modular forms*. Preprint MPI **42** (2002), 1–65.
- [PIAS] A.A. PANCHISHKIN, *On p -adic integration in spaces of modular forms and its applications*. J. Math. Sci. New York **115** no. 3 (2003), 2357–2377.
- [PNM] A.A. PANCHISHKIN, *A new method of constructing p -adic L -functions associated with modular forms*. Moscow Mathematical Journal **2** (2002), 1–16.
- [Ra52] R.A. RANKIN, *The scalar product of modular forms*, Proc. London math. Soc. **3** (1952), 198–217.
- [Se73] JEAN-PIERRE SERRE, *Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques*. Lecture Notes in Math. **350** (1973), 191–286.
- [Shi71] GORO SHIMURA, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Princeton Univ. Press, 1971.
- [Shi77] GORO SHIMURA, *On the periods of modular forms*. Math. Annalen **229** (1977), 211–221.
- [Vi76] M. M. VIŠIK, *Non-archimedean measures connected with Dirichlet series*. Math. USSR Sb. **28** (1976), 216–228.

Alexei PANCHISHKIN

Institut Fourier

B.P.74

38402 St.–Martin d'Hères, France

E-mail : panchish@mozart.ujf-grenoble.fr