

TANGUY RIVOAL

Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 15, n° 2 (2003),
p. 551-559

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2003__15_2_551_0

© Université Bordeaux 1, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes

par TANGUY RIVOAL

RÉSUMÉ. Nous montrons que pour tout rationnel α de $[-1, 1]$, l'ensemble des valeurs des polylogarithmes $\{\text{Li}_s(\alpha), s \in \mathbb{N}, s \geq 1\}$ contient une infinité de nombres \mathbb{Q} -linéairement indépendants.

ABSTRACT. We prove that for any rational $\alpha \in [-1, 1]$, the set of the values of polylogarithms $\{\text{Li}_s(\alpha), s \in \mathbb{N}, s \geq 1\}$ contains infinitely many \mathbb{Q} -linearly independent numbers.

1. Introduction

L'étude diophantienne des valeurs des fonctions polylogarithmes $\text{Li}_s(z)$, définies pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$ et $s \geq 1$ (et $z \neq 1$ si $s = 1$) par

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s},$$

en des points rationnels a été abordée dans [Ni] et [Ha], entre autres. Nikishin [Ni] montre par exemple que, pour tout entier $a \geq 1$, si $p \in \mathbb{N}$, $q \in -\mathbb{N}$ et $|q| > p^a(4a)^{a(a-1)}$, alors les nombres $1, \text{Li}_1(p/q), \text{Li}_2(p/q), \dots, \text{Li}_a(p/q)$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Hata [Ha] établit les résultats correspondants lorsque $p/q > 0$. Dans cet article, nous abordons ce problème sous un angle différent en minorant la dimension

$$\delta_\alpha(a) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\text{Li}_1(\alpha) + \mathbb{Q}\text{Li}_2(\alpha) + \dots + \mathbb{Q}\text{Li}_a(\alpha))$$

pour tout rationnel $\alpha = p/q$, et non pas soumis à des restrictions portant sur p et q , comme dans [Ni] et [Ha].

Théorème 1. *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel, $0 < |\alpha| < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon, p, q)$ tel que si $a \geq A(\varepsilon, p, q) \geq 1$,*

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{1 - \varepsilon}{1 + \log(2)} \log(a).$$

Une conséquence immédiate est le

Corollaire 1. Pour tout rationnel α , $0 < |\alpha| < 1$, l'ensemble $\{\text{Li}_s(\alpha), s \geq 1\}$ contient une infinité de nombres irrationnels.

Remarques.

1. La constante $A(\varepsilon, p, q)$ est effectivement calculable : on peut d'ailleurs la remplacer par 1, au prix d'une constante ⁽¹⁾ moins bonne à la place de $(1 - \varepsilon)/(1 + \log(2))$.

2. On peut démontrer un résultat similaire dans le cas des *fonctions de Lerch* définies pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ et $s \geq 1$ par

$$\Phi_s(z, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k + \omega)^s},$$

lorsque $\omega = u/v$ est un rationnel positif. Avec des notations évidentes, on montre facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A = A(\varepsilon, p, q) \geq 1$ et un réel $c = c(\varepsilon, v) > 0$ tel que si $a \geq A$, $\delta_{\alpha, \omega}(a) \geq c \log(a)$.

3. La restriction aux nombres rationnels n'est pas essentielle : on étend facilement le Théorème 1 aux nombres algébriques réels α : la minoration devient alors

$$\delta_{\alpha}(a) \geq \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{1 + \log(2)} \log(a).$$

Dans le cas des algébriques complexes, la démonstration du Lemme 3 n'est en revanche plus valide. Il faudrait utiliser la *méthode du col* (cf. [Ri2, chapitre 4] pour un exemple où elle est mise en œuvre) pour espérer minorer $\delta_{\alpha}(a)$, ce qui est un problème difficile en général.

4. Si $s > 1$, $\text{Li}_s(1) = \zeta(s)$, $\text{Li}_s(-1) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$ et $\text{Li}_1(-1) = -\log(2)$. Comme $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$, on sait qu'*a priori* ⁽²⁾ $\delta_{-1}(a) \geq \delta_1(a) \geq [a/2]$. Le Théorème 1 est donc encore vrai mais trivial lorsque $z = \pm 1$.

5. Dans [Ri1] (cf. également [BR]), une méthode est introduite pour éliminer les "parasites" $\zeta(2n)$ lorsque $z = \pm 1$, ce qui permet de montrer qu'une infinité des nombres $\zeta(2n + 1)$ sont irrationnels.

2. Notations

La démonstration repose sur la série suivante ⁽³⁾

$$N_{n,a,r}(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2) \cdots (k-rn)}{k^a(k+1)^a \cdots (k+n)^a} z^{-k}$$

¹cette constante est elle-aussi effectivement calculable en fonction de p et q .

²en omettant la valeur divergente $\text{Li}_1(1) = \infty$ qui disparaît naturellement des estimations.

³On retrouve des résultats similaires à ceux de [Ni] et [Ha] en faisant $r = a$.

où $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, a et r entiers tels $1 \leq r < a$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour simplifier l'exposé, nous noterons $N_n(z)$ cette série et nous l'écrivons sous la forme

$$N_n(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a} z^{-k}$$

où $(\alpha)_k$ est le symbole de Pochhammer

$$(\alpha)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \quad \text{si} \quad k = 1, 2, \dots$$

Cette série est une fonction hypergéométrique généralisée :

$$N_n(z) = z^{-rn-1} n!^{a-r} \frac{\Gamma(rn+1)\Gamma(rn+2)}{\Gamma((r+1)n+1)^a} \times {}_{a+1}F_a \left(\begin{matrix} rn+1, rn+1, \dots, rn+1 \\ (r+1)n+2, \dots, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1} \right).$$

Elle est dite *nearly-poised* ⁽⁴⁾ ([Sl, p. 42, 2.1.1.10]) : la somme d'un paramètre supérieur avec le paramètre inférieur correspondant est constante, sauf pour l'un des paramètres supérieurs. Par ailleurs, ces paramètres sont tels que l'on obtient la représentation suivante de $N_n(z)$ en itérant l'identité intégrale d'Euler ([Sl, p. 108, 4.1.2]) :

Lemme 1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$,

$$(1) \quad N_n(z) = \frac{(rn)!}{n!^r} \int_{[0,1]^a} \left(\frac{\prod_{l=1}^a x_l^r (1-x_l)}{(z-x_1x_2\cdots x_a)^r} \right)^n \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_a}{z-x_1x_2\cdots x_a}.$$

Nous aurons besoin du critère d'indépendance linéaire suivant, dû à Nesterenko [Ne1] :

Théorème 2 (Critère de Nesterenko). Soit N réels $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ et supposons qu'il existe N suites $(p_{l,n})_{n \geq 0}$ tels que :

- i) $\forall i = 1, \dots, N, p_{l,n} \in \mathbb{Z}$;
- ii) $\alpha_1^{n+o(n)} \leq \left| \sum_{l=1}^N p_{l,n} \theta_l \right| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ avec $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$;
- iii) $\forall l = 1, \dots, N, |p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ avec $\beta > 1$.

Dans ces conditions,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \theta_1 + \mathbb{Q} \theta_2 + \cdots + \mathbb{Q} \theta_N) \geq \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)}.$$

⁴La disparition, évoquée dans la Remarque 5. ci-dessus, des valeurs parasites $\zeta(2n)$ nécessite d'utiliser une fonction hypergéométrique *well-poised* (cf.[RZ] pour quelques développements à ce sujet).

Enfin, dans toute la suite, on posera $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}$ et

$$R_n(t) = n!^{a-r} \frac{(t - rn)_{rn}}{(t)_{n+1}^a}.$$

Pour $l \in \{1, \dots, a\}$ et $j \in \{0, \dots, n\}$, on notera également

$$(2) \quad c_{l,j,n} = D_{a-l} (R_n(t)(t + j)^a)|_{t=-j} \in \mathbb{Q},$$

$$(3) \quad P_{0,n}(z) = - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^l} z^{j-k} \text{ et } P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j.$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels.

3. Quelques lemmes préparatoires

Lemme 2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, on a

$$(4) \quad N_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^a P_{l,n}(z) \text{Li}_l(1/z).$$

Démonstration. En décomposant $R_n(t)$ en fractions partielles, on obtient :

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n \frac{c_{l,j,n}}{(t + j)^l}.$$

D'où si $|z| > 1$

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} \frac{1}{(k + j)^l} \\ &= \sum_{l=1}^a \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} \frac{1}{k^l} - \sum_{k=1}^j \frac{1}{z^k} \frac{1}{k^l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^a \text{Li}_l(1/z) \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^l} z^{j-k} \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que (4).

Lemme 3. Pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| > 1$, la suite $|N_n(z)|^{1/n}$ admet une limite, que l'on note $\varphi_{r,a}(z)$, qui vérifie

$$(5) \quad 0 < \varphi_{r,a}(z) \leq \frac{1}{|z| r^{a-r}}.$$

Démonstration. La formule de Stirling implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(rn)!}{n!^r} \right)^{1/n} = r^r.$$

Pour z réel, $|z| > 1$, l'existence et la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |N_n(z)|^{1/n} = r^r \max_{x \in [0,1]^a} \left| \frac{\prod_{l=1}^a x_l^r (1-x_l)}{(z-x_1 x_2 \cdots x_a)^r} \right| \neq 0$$

résulte de la représentation intégrale (1). Insistons sur le fait que l'on ne peut pas conclure aussi facilement dans le cas z complexe, et qu'il faudrait alors utiliser la méthode du col.

Majorons maintenant $N_n(z)$. Si $k \in \{0, \dots, rn\}$ alors $R_n(k) = 0$. Supposons $k \geq rn + 1$; on a alors

$$\begin{aligned} R_n(k)|z|^{-k} &= n!^{a-r} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a} |z|^{-k} \leq n^{(a-r)n} \frac{k^{rn}}{k^{a(n+1)}} |z|^{-rn} \\ &= \left(\frac{n}{k}\right)^{(a-r)n} |z|^{-rn} \frac{1}{k^a} \leq \left(\frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\right)^n \frac{1}{k^a}. \end{aligned}$$

Donc

$$|N_n(z)| \leq \sum_{k=rn+1}^{\infty} R_n(k)|z|^{-k} \leq \left(\frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\right)^n \sum_{k=rn+1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

et

$$\varphi_{r,a}(z) \leq \frac{1}{|z|^r r^{a-r}}.$$

Lemme 4. Pour tout $l \in \{0, \dots, a\}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$,

$$(6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |P_{l,n}(z)|^{1/n} \leq r^r 2^{a+r+1} |z|.$$

Démonstration. On majore d'abord les coefficients $c_{l,j,n}$ donnés par (2). Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z+j|=1/2} R_n(z)(z+j)^{l-1} dz$$

où $|z+j| = 1/2$ désigne le cercle de centre $-j$ et de rayon $1/2$. Sur ce cercle, on a

$$|(z-rn)_{rn}| \leq (j+2)_{rn} \quad \text{et} \quad |(z)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!.$$

Donc

$$\begin{aligned} |c_{l,j,n}| &\leq n!^{a-r} \frac{(rn+j)!}{j!^{a+1}(n-j)!^a} \cdot \frac{j^a(n-j)^a(rn+j+1)}{j+1} \cdot 8^a \\ &\leq \binom{rn+j}{j} \binom{n}{j}^a \frac{(rn)!}{n!^r} (rn+1)2^a. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\binom{rn+j}{j} \leq 2^{rn+j}, \quad \binom{n}{j}^a \leq 2^{na}, \quad \frac{(rn)!}{n!^r} \leq r^{rn},$$

on obtient $|c_{l,j,n}| \leq (r^r 2^{a+r+1})^n (rn+1)2^a$, d'où

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{l,j,n}|^{1/n} \leq r^r 2^{a+r+1}.$$

Si $l \in \{1, \dots, a\}$, on a $P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j$ et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P_{l,n}(z)|^{1/n} \leq r^r 2^{a+r+1} |z|.$$

Il nous reste à majorer $P_{0,n}(z)$, dont on a déterminé l'expression (3) :

$$P_{0,n}(z) = - \sum_{l=1}^a \sum_{j=1}^n c_{l,j,n} \sum_{k=1}^j \frac{z^{j-l}}{k^l}.$$

Comme

$$\left| \sum_{k=1}^j \frac{z^{j-l}}{k^l} \right| \leq |z|^n \sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \leq n |z|^n,$$

on a là aussi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P_{0,n}(z)|^{1/n} \leq r^r 2^{a+r+1} |z|.$$

Lemme 5. Pour tout $l \in \{0, \dots, a\}$

$$(7) \quad d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$$

où $d_n = \text{ppcm}(1, 2, \dots, n)$.

Démonstration. Fixons les entiers n et j . L'évaluation du dénominateur des coefficients $c_{l,j,n}$ repose sur la décomposition du numérateur de $R_n(t)$ en r produits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j)^a = \prod_{l=1}^r F_l(t) \times H(t)^{a-r}$$

où pour $l \in \{1, \dots, r\}$

$$F_l(t) = \frac{(t-nl)_n}{(t)_{n+1}} (t+j), \quad H(t) = \frac{n!}{(t)_{n+1}} (t+j).$$

Décomposons $F_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p}, \quad H(t) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n \frac{(j-p)h_p}{t+p}$$

où

$$f_{p,l} = \frac{(-p - nl)_n}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^n (-p + h)} = \frac{(-1)^n ((l-1)n + p + 1)_n}{(-1)^p p! (n-p)!} = (-1)^{n-p} \binom{nl+p}{n} \binom{n}{p}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod_{\substack{h=0 \\ h \neq p}}^n (-p + h)} = \frac{(-1)^p n!}{p! (n-p)!} = (-1)^p \binom{n}{p}$$

sont des entiers. On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F_l(t))|_{t=-j} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{(j-p) f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$(D_\lambda H(t))|_{t=-j} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq j}}^n (-1)^\lambda \frac{(j-p) h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que $d_n^\lambda (D_\lambda F_l)|_{t=-j}$ et $d_n^\lambda (D_\lambda H)|_{t=-j}$ sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j)^a) = \sum_{\mu} (D_{\mu_1} F_1) \cdots (D_{\mu_r} F_r) (D_{\mu_{r+1}} H) \cdots (D_{\mu_a} H)$$

(où la somme est sur les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^a$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a-l$), on en déduit alors que $d_n^{a-l} c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc que $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

4. Démonstration du Théorème 1

Le Théorème 1 découle de la

Proposition 1. *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel tel que $0 < |\alpha| < 1$. Pour tout entier r tel que $1 \leq r < a$, on a la minoration*

$$(8) \quad \delta_\alpha(a) \geq \frac{a \log(r) + (a+r+1) \log(2) - (r+1) \log|\alpha|}{a + (a+r+1) \log(2) + r \log(r) + \log|q|}.$$

Démonstration. Le Théorème des nombres premiers implique que

$$(9) \quad d_n = e^{n+o(n)}.$$

Fixons $\alpha = p/q$ avec $0 < |\alpha| < 1$ et définissons pour tout entier $n \geq 0$

$$p_{l,n} = d_n^a p^n P_{l,n}(q/p) \text{ pour } l \in \{1, \dots, a\} \text{ et } \ell_n = d_n^a p^n S_n(q/p).$$

(4) montre que pour tout $n \geq 0$

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^a p_{l,n} \text{Li}_l(\alpha).$$

(7) montre que pour tout $l \in \{0, \dots, a\}$ et pour tout $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$.

(5) et (9) montrent que

$$\log |\ell_n| = n \log(\kappa) + o(n) \quad \text{avec} \quad \kappa = e^a |p| \varphi_{r,a}(1/\alpha).$$

Enfin, (6) et (9) impliquent que pour tout $l = 0, \dots, a$:

$$\log |p_{l,n}| \leq n \log(\tau) + o(n) \quad \text{avec} \quad \tau = e^a |q| 2^{a+r+1} r^r.$$

En appliquant le critère de Nesterenko, on obtient donc la minoration

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{(a+r+1) \log(2) + r \log(r) - \log|\alpha| - \log(\varphi_{r,a}(1/\alpha))}{a + (a+r+1) \log(2) + r \log(r) + \log|q|}.$$

En utilisant la majoration de $\varphi_{r,a}(1/\alpha)$ donnée au Lemme 3, on en déduit la minoration (8).

Démonstration du Théorème 1. Dans les conditions de la Proposition 1, choisissons $r = r(a)$ comme l'entier $< a$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$a \log(r) + (a+r+1) \log(2) - (r+1) \log|\alpha| = (1+o(1))a \log(a)$$

et

$$a + (a+r+1) \log(2) + r \log(r) + \log|q| = (1+\log(2))a + o(a).$$

D'où

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{(1+o(1)) \log(a)}{1+\log(2)+o(1)},$$

ce qui prouve le Théorème 1.

Bibliographie

- [BR] K. BALL, T. RIVOAL, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*. Invent. Math. **146** (2001), 193-207.
- [Ha] M. HATA, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*. J. Math. pures et appl **69** (1990), 133-173.
- [Ne1] YU. V. NESTERENKO, *On the linear independence of numbers*. Mosc. Univ. Math. Bull. **40** (1985), 69-74, traduction de Vest. Mosk. Univ. Ser. I (1985), 46-54.
- [Ni] E. M. NIKISHIN, *On the irrationality of the values of the functions $F(x, s)$* . Mat. Sbornik **37** (1979), no. 3, 381-388.
- [Ri1] T. RIVOAL, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*. C. R. Acad. Sci. Paris **331** (2000), 267-270.
- [Ri3] T. RIVOAL, *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*. Thèse de doctorat, Université de Caen, 2001.
- [RZ] T. RIVOAL, W. ZUDILIN, *Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant*, à paraître à Math. Ann. (2003).

[SI] L. J. SLATER, *Generalized Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, 1966.

Tanguy RIVOAL
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
CNRS UMR 6139,
Université de Caen
BP 5186
14032 Caen cedex
France
E-mail : rivoal@math.unicaen.fr