Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Marjory Godin
Bouchaïb Sodaïgui

Classes de Steinitz d'extensions à groupe de Galois A_4

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 14, n° 1 (2002), p. 241-248
<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2002__14_1_241_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 241–248

Classes de Steinitz d'extensions à groupe de Galois A_4

par Marjory GODIN et Bouchaïb SODAÏGUI

RÉSUMÉ. Soient k un corps de nombres et $Cl(k)$ son groupe des classes. Une extension de k à groupe de Galois isomorphe au groupe alterné A_4 est dite alternée. Soit E/k une extension cyclique de degré 3. On calcule la classe de Steinitz, dans $Cl(k)$, de toute extension alternée contenant E. Sous l'hypothèse que le nombre des classes de k est impair, on détermine l'ensemble de telles classes et on montre que c'est un sous-groupe de $Cl(k)$ lorsque l'anneau des entiers de E est libre sur celui de k ou 3 ne divise pas l'ordre de $Cl(k)$. Ensuite, on montre que l'ensemble des éléments de $Cl(k)$ qui sont réalisables par des classes de Steinitz d'extensions alternées (resp. alternées et modérées) est le groupe $Cl(k)$ tout entier.

ABSTRACT. Let k be a number field and $Cl(k)$ its class group. A Galois extension of k is called alternating if its Galois group is isomorphic to the alternating group A_4. Let E/k be a cyclic extension of degree 3. We calculate the Steinitz class, in $Cl(k)$, of every alternating extension containing E. Under the assumption that the class number of k is odd, we determine the set of such classes and we prove that it is a subgroup of $Cl(k)$ when the ring of integers of E is free over that for k or the order of $Cl(k)$ is not divisible by 3. Next, we prove that the subset of $Cl(k)$ consisting of those classes which are realizable as the Steinitz classes of alternating (resp. tame alternating) extensions is the full group $Cl(k)$.

1. Introduction

Pour tout corps de nombres K, O_K désigne l'anneau des entiers de K et $Cl(K)$ le groupe des classes de K.

Soient K/k une extension finie de corps de nombres de degré n. L'anneau O_K est un O_k-module sans torsion de rang n, donc il existe un idéal I de O_k tel que $O_K \cong O_k^{n-1} \oplus I$ en tant que O_k-module. La classe de I dans $Cl(k)$

Manuscrit reçu le 26 février 2001.

est appelée la classe de Steinitz de l'anneau O_K ou de l'extension K/k, et on la note $Cl_k(O_K)$ (voir [FT,Théorème 13, p. 95]).

Maintenant, soient Γ un groupe fini et Δ un sous-groupe normal de Γ. On a donc la suite exacte de groupes suivante :

$$\Sigma : 1 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta \longrightarrow 1.$$

Fixons E/k une extension galoisienne dont le groupe de Galois est isomorphe à Γ/Δ. On désigne par $R(E/k, \Sigma)$ (resp. $R_m(E/k, \Sigma)$) l'ensemble des classes (réalisables) $c \in Cl(k)$ telles qu'il existe une extension galoisienne (resp. galoisienne et modérément ramifiée) N/k, contenant E, avec un isomorphisme π de $Gal(N/k)$ dans Γ tel que E est le sous-corps de N fixe par $\pi^{-1}(\Delta)$, dont la classe de Steinitz est c.

Lorsque $\Delta = \Gamma$, $R(E/k, \Sigma)$ (resp. $R_m(E/k, \Sigma)$) est tout simplement l'ensemble des classes de Steinitz des extensions galoisiennes (resp. galoisiennes et modérées) de k, dont le groupe de Galois est isomorphe à Γ ; on note $R(k, \Gamma)$ et $R_m(k, \Gamma)$ au lieu de $R(E/k, \Sigma)$ et $R_m(E/k, \Sigma)$.

Soient p, q deux nombres premiers impairs. Dans [C1], sous l'hypothèse que k contient les racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité, on détermine $R_m(E/k, \Sigma)$ lorsque Γ est un groupe non abélien d'ordre p^3 d'exposant p et Δ un sous-groupe de Γ d'ordre p^2, et on montre que si O_E est un O_k-module libre alors $R_m(E/k, \Sigma)$ est un sous-groupe de $Cl(k)$. Dans [C2] on montre des résultats analogues à ceux de [C1] dans la situation où k contient les racines $pq^{\text{ième}}$ de l'unité, Γ est un groupe métacylique d'ordre pq, et Δ est le sous-groupe de Γ d'ordre p.

Lorsque Γ est abélien, une conséquence des travaux de McCulloh (voir [Mc]) est : $R_m(k, \Gamma)$ est un sous-groupe de $Cl(k)$. Dans [C3], on montre que $R_m(k, \Gamma)$ est un sous-groupe de $Cl(k)$ dans le cas où Γ est un groupe non abélien d'ordre p^3 (p premier impair), et k contient les racines $m^{\text{ième}}$ de l'unité, où m est l'exposant de Γ. Lorsque Γ est le groupe quaternionien (resp. diédral) d'ordre 8, on montre dans [So1] (resp. [So2]) que si le nombre des classes de k est impair alors $R_m(k, \Gamma) = Cl(k)$.

Dans cet article, on s'intéresse à la situation où Γ est le groupe alterné A_4 défini par la présentation :

$$A_4 = \langle \sigma, \tau, \nu : \sigma^3 = \tau^2 = \nu^2 = 1,\ \tau\nu = \nu\tau,\ \sigma\tau\sigma^{-1} = \nu \rangle,$$

et

$$\Delta = \langle \tau, \nu \rangle.$$

On a $Gal(E/k) \cong \langle \sigma \rangle$, donc E/k est une extension cyclique de degré 3.

Dans la section 3, nous démontrerons les principaux résultats suivants :

Théorème 1.1. *Soit k un corps de nombres. Soit E/k une extension cyclique de degré 3. Supposons le nombre de classes de k impair. Alors*

(i) $$R(E/k, \Sigma) = Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3,$$

où $N_{E/k}$ est la norme dans E/k et $(N_{E/k}(Cl(E)))^3$ est le sous-groupe des puissances $3^{ième}$ des éléments du groupe $N_{E/k}(Cl(E))$.

De plus, si E/k est modérée alors

$$R_m(E/k,\Sigma) = R(E/k,\Sigma).$$

(ii)
$$R(k,A_4) = R_m(k,A_4) = Cl(k).$$

Remarque. L'hypothèse "le nombre des classes de k est impair" provient d'un problème de plongement et sera utile pour prouver l'inclusion

$$R(E/k,\Sigma) \supset Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3,$$

l'autre inclusion est vraie sans cette hypothèse.

Corollaire 1.2. *Sous les hypothèses et notations du théorème 1.1 on a les assertions suivantes :*

(1) *Si 3 ne divise pas le nombre des classes de k alors $R(E/k,\Sigma) = Cl(k)$ ($= R_m(E/k,\Sigma)$ si E/k est modérée).*

(2) *Si O_E est un O_k-module libre alors $R(E/k,\Sigma)$ est un sous-groupe de $Cl(k)$ égal à $(N_{E/k}(Cl(E)))^3$ ($= R_m(E/k,\Sigma)$ si E/k est modérée) ; de plus si E/k est ramifiée alors il est égal à $Cl(k)^3$.*

Pour terminer cette section, signalons qu'une autre motivation de cet article est l'étude de l'ensemble des éléments du groupe des classes de l'algèbre de groupe $O_k[\Gamma]$, qui sont réalisables par des classes d'anneaux d'entiers d'extensions galoisiennes de k, modérées et à groupe de Galois isomorphe à Γ, dans la situation où Γ n'est pas abélien (dans cette direction voir [So2] et la bibliographie) ; le cas abélien étant résolu par McCulloh dans [Mc]). On montre qu'il y a un lien étroit entre l'étude de l'ensemble des classes réalisables et le problème de l'étude des classes de Steinitz.

2. Classes de Steinitz

Dans cette section, N/k désigne une extension galoisienne dont le groupe de Galois est isomorphe à A_4. Si π est un isomorphisme de $Gal(N/k)$ dans A_4 et $\gamma \in A_4$, on identifiera $\pi^{-1}(\gamma)$ et γ. Soit E/k la sous-extension de N fixe par $\langle \tau, \nu \rangle$: c'est l'unique sous-extension cyclique de degré 3, et on a $Gal(E/k) \cong \langle \sigma \rangle$. L'extension N/E est biquadratique, elle contient donc trois sous-extensions quadratiques de E ; si L/E est l'une d'entre elles alors les deux autres sont $\sigma(L)$ et $\sigma^2(L)$.

Proposition 2.1. *On a*

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4(N_{E/k}(Cl_E(O_L)))^3.$$

Le lemme suivant sera utile pour la preuve de la proposition précédente.

Lemme 2.2. *Soient K un corps de nombres, M/K une extension biquadratique, K_i/K, $1 \leq i \leq 3$, les trois sous-corps quadratiques de M. Alors*

$$Cl_K(O_M) = Cl_K(O_{K_1})Cl_K(O_{K_2})Cl_K(O_{K_3}).$$

Preuve du lemme. Notons Δ le discriminant de M/K et Δ_i les discriminants des K_i/K. Une conséquence immédiate de la décomposition d'Artin et Hasse du discriminant en un produit de conducteurs et la propriété de ces derniers relative au passage au quotient (voir [Se, Chap. VI, Section 3, Cor. 2 et Prop. 6, p. 111–112]) est $\Delta = \Delta_1\Delta_2\Delta_3$. Soient m_i, $1 \leq i \leq 2$, des éléments de K tels que $K_i = K(\sqrt{m_i})$. Posons $m_3 = m_1m_2$, il est clair que $K_3 = K(\sqrt{m_3})$. Les familles $(1, \sqrt{m_1}), (1, \sqrt{m_2}), (1, \sqrt{m_3}), (1, \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ sont des bases respectives des K-espaces vectoriels K_i et M, dont les discriminants respectifs d_i et d sont : $4m_i$ et $(16m_3)^2$. On en déduit que

$$\Delta/d = (\Delta_1/d_1)(\Delta_2/d_2)(\Delta_3/d_3)2^{-2}.$$

On a alors le lemme car d'après Artin (voir [A]), $Cl_K(O_M) = Cl(\sqrt{\Delta/d})$ et $Cl_K(O_{K_i}) = Cl(\sqrt{\Delta_i/d_i})$. □

Preuve de la proposition 2.1. Par la transitivité de la classe de Steinitz dans une tour de corps de nombres (voir [F, Theorem 4.1]) on a :

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4 N_{E/k}(Cl_E(O_N)).$$

Soient $\sigma^i(L)/E$, $0 \leq i \leq 2$, les trois sous-corps quadratiques de N/E. Le lemme 2.2 nous affirme que :

$$Cl_E(O_N) = Cl_E(O_L)Cl_E(O_{\sigma(L)})Cl_E(O_{\sigma^2(L)}).$$

Ecrivons $L = E(\sqrt{m})$. Comme $\sigma^i(L) = E(\sqrt{\sigma^i(m)})$, et $\sigma^i(\Delta(L/E)) = \Delta(\sigma^i(L)/E)$, on a (par Artin [A])

$$Cl_E(O_{\sigma^i(L)}) = \sigma^i(Cl_E(O_L)).$$

D'où

$$N_{E/k}(Cl_E(O_N)) = (N_{E/k}(Cl_E(O_L)))^3.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. □

3. Preuve des résultats principaux

Pour la démonstration du théorème 1.1, nous avons besoin du lemme suivant qui est un critère de plongement d'une extension cubique cyclique dans une extension à groupe de Galois A_4 . Ce lemme est bien connu, il est cité dans ([K] p. 21 de la thèse) mais sans démonstration complète (on peut voir aussi [Ma] p. 365).

Lemme 3.1. *Soient k un corps de nombres, K/k une extension cyclique de degré 3, $L = K(\sqrt{a})/K$ une extension quadratique de K. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La clôture galoisienne de L/k est une extension N/k à groupe de Galois isomorphe à A_4.*

(2) *$N_{K/k}(a)$ est un carré dans k, où $N_{K/k}$ est la norme dans K/k.*

De plus si (2) *est vérifiée, on peut choisir $N = K(\sqrt{a}, \sqrt{\sigma(a)})$.*

Preuve. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) résulte immédiatement de la théorie de Kummer. Montrons maintenant que (2) $\Rightarrow$ (1). Notons par σ un générateur de $Gal(K/k)$. Puisque a n'est pas un carré dans K, il en est de même pour $\sigma(a)$. Soient N l'extension biquadratique $K(\sqrt{a}, \sqrt{\sigma(a)})/K$, σ_1 et σ_2 les générateurs de $Gal(N/K)$ définis par $\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$, et $\sigma_2(\sqrt{\sigma(a)}) = -\sqrt{\sigma(a)}$. Notons $\overline{\sigma}$ un prolongement de σ à N. On a $(\sqrt{a})^2 = a$, d'où $(\overline{\sigma}(\sqrt{a}))^2 = \overline{\sigma}(a) = \sigma(a)$; par suite $\overline{\sigma}(\sqrt{a}) = \pm\sqrt{\sigma(a)}$. De $(\sqrt{\sigma(a)})^2 = \sigma(a)$ on déduit que $(\overline{\sigma}(\sqrt{\sigma(a)}))^2 = \sigma^2(a)$. Soit $x \in k$ tel que $N_{K/k}(a) = x^2$, alors $\sigma^2(a) = (x/\sqrt{a} \cdot \sqrt{\sigma(a)})^2$, i.e. $\sigma^2(a)$ admet une racine carrée dans N, d'où $\overline{\sigma}(\sqrt{\sigma(a)}) = \pm\sqrt{\sigma^2(a)}$. Donc $\overline{\sigma}(N) \subset N$, par suite N/k est galoisienne de degré 12.

On vérifie facilement que $Gal(N/k) = \langle\overline{\sigma}, \sigma_1, \sigma_2\rangle$, où, par exemple, $\overline{\sigma}$ est défini par $\overline{\sigma}(\sqrt{a}) = \sqrt{\sigma(a)}$ et $\overline{\sigma}(\sqrt{\sigma(a)} = \sqrt{\sigma^2(a)}$, et que $Gal(N/k) \cong A_4$. □

Preuve de (i) *du théorème 1.1* Nous commençons par montrer (pour k quelconque) l'égalité

$$Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3 = (Cl_k(O_E))^4(N_{E/k}(Cl(E)))^3. \tag{3.1}$$

Pour cela il suffit de montrer que $Cl_k(O_E) \in N_{E/k}(Cl(E))$. Soit $\Delta(E/k)$ (resp. $\mathcal{D}(E/k)$) le discriminant (resp. la différente) de E/k. Comme E/k est normale de degré impair, il découle d'un théorème d'Artin (voir [A]) que

$$Cl_k(O_E) = Cl((\Delta(E/k))^{1/2}).$$

La différente de E/k étant un carré (on le voit facilement par la formule de Hilbert, voir [Se, Chap. IV, Prop. 4, p. 72]), on en déduit que

$$Cl_k(O_E) = N_{E/k}(Cl(\mathcal{D}(E/k)^{1/2}).$$

(Notons que puisque la classe de la différente d'une extension est toujours un carré (voir [H, Theorem 176]), si le nombre de classes de k est impair on en déduit l'égalité précédente sans utiliser une expression explicite de la différente).

L'inclusion (pour k quelconque) :

$$R(E/k, \Sigma) \subset Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3, \tag{3.2}$$

est donc une conséquence de (3.1) et la proposition 2.1. Montrons maintenant qu'on a :

$$(3.3) \qquad (Cl_k(O_E))^4(N_{E/k}(Cl(E)))^3 \subset R(E/k,\Sigma).$$

On suppose que le nombre des classes de k est impair. Soit $c \in N_{E/k}(Cl(E))$. $N_{E/k}(Cl(E))$ étant un sous-groupe de $Cl(k)$, son ordre est impair. Par suite il existe $c' \in N_{E/k}(Cl(E)$ telle que $c = c'^2$. Soit $C \in Cl(E)$ telle que $c' = N_{E/k}(C)$.

Notons $Cl(E, 4O_E)$ le groupe des classes de rayon modulo $4O_E$. D'après la surjection canonique de $Cl(E, 4O_E)$ sur $Cl(E)$ et le théorème de densité de Tchebotarev (voir [N, Chap.V, Theorem 6.4, p.132]) : il existe $m \in E^\times$, un idéal fractionnaire I de O_E et un idéal premier $\mathfrak{P}$ de O_E satisfaisant $\mathfrak{P} \cap O_k$ totalement décomposé dans E/k tels que :

$$mO_E = I^2\mathfrak{P}, \quad m \equiv 1 \mod {}^* \ 4O_E, \quad \text{et } Cl(I^{-1}) = C,$$

où mod * est la notation usuelle de la théorie du corps de classes (voir [N]). On a :

$$m\sigma(m)O_E = (I\sigma(I))^2\mathfrak{P}\sigma(\mathfrak{P}).$$

Il est clair que $m\sigma(m)$ n'est pas un carré dans E ($v_{\mathfrak{P}}(m\sigma(m)) \equiv 1 \mod 2$). On considère l'extension quadratique $L = E(\sqrt{m\sigma(m)})/E$. On a

$$N_{E/k}(m\sigma(m)) = (N_{E/k}(m))^2.$$

D'après le lemme 3.1, E/k est plongeable dans l'extension

$$N = E(\sqrt{m\sigma(m)}, \sqrt{\sigma(m\sigma(m)})/k$$

qui a un groupe de Galois isomorphe à A_4. De $m \equiv 1 \mod {}^* \ 4O_E$ on déduit $\sigma(m) \equiv 1 \mod {}^* \ 4O_E$, par suite $m\sigma(m) \equiv 1 \mod {}^* \ 4O_E$. Par la théorie de Kummer (voir [H, Section 39]) $\Delta(L/E) = \mathfrak{P}\sigma(\mathfrak{P})$. D'après Artin, $Cl_E(O_L) = Cl(I\sigma(I))^{-1}$, d'où

$$Cl_E(O_L) = C\sigma(C).$$

La proposition 2.1 nous donne :

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4(N_{E/k}(C\sigma(C)))^3.$$

Par suite

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4(c'^2)^3 = (Cl_k(O_E))^4c^3.$$

On conclut qu'on a (3.3). On a donc la première partie de (i) du théorème 1.1 grâce à (3.1), (3.2) et (3.3).

Il est clair que $E(\sqrt{m\sigma(m)})/E$ et $E(\sqrt{\sigma(m\sigma(m))})/E$ sont modérées . Il s'ensuit que N/E est modérée. Si E/k est modérée alors N/k l'est aussi et donc

$$(Cl_k(O_E))^4(N_{E/k}(Cl(E)))^3 \subset R_m(E/k,\Sigma).$$

D'où $R(E/k,\Sigma) = R_m(E/k,\Sigma)$. Ce qui termine la preuve de (i) du théorème 1.1. □

Preuve de (ii) *du théorème 1.1.* Soient C_3 un groupe cyclique d'ordre 3, j une racine primitive $3^{\text{ième}}$ de l'unité. Alors $R(k,C_3)$ ([L, Theorem 4.7, p. 97]) est le sous-groupe de $Cl(k)$ engendré par $N_{k(j)/k}(Cl(k(j))$ et les classes des idéaux premiers de O_k au dessus de 3. Sous l'hypothèse que le nombre des classes de k est impair on a $N_{k(j)/k}(Cl(k(j)) = Cl(k)$ grâce à [W, Theorem 10.1, p.400], en effet : si j n'appartient pas à k, $k(j)/k$ est de degré 2, donc elle est ramifiée au moins en une place de k. Par suite

$$R(k,C_3) = Cl(k).$$

Soit $c \in Cl(k)$, il existe donc une extension E/k cyclique de degré 3 telle que $c = Cl_k(O_E)$. D'autre part, d'après (i) du théorème 1.1, $Cl_k(O_E) \in R(E/k,\Sigma)$ donc appartient à $R(k,A_4)$, d'où $R(k,A_4) = Cl(k)$. L'égalité $R(k,A_4) = R_m(k,A_4)$ provient du fait qu'on a ([L, Theorem 2.6, p. 90]) : $R_m(k,C_3) = N_{k(j)/k}(Cl(k(j))$, donc égal à $Cl(k)$. □

Preuve du corollaire 1.2. (1) Si 3 ne divise pas le nombre des classes de k alors $(N_{E/k}(Cl(E))^3 = N_{E/k}(Cl(E))$. D'autre part E/k est nécessairement ramifiée au moins en une place de k ; comme E est la seule sous-extension abélienne non triviale de E/k, $N_{E/k} : Cl(E) \longrightarrow Cl(k)$ est surjective (voir [W, Theorem 10.1, p. 400]), et donc $N_{E/k}(Cl(E)) = Cl(k)$.

(2) Par définition de la classe de Steinitz, on a O_E est un O_k-module libre si et seulement si $Cl_k(O_E) = 1$. Si E/k est ramifiée, comme ci-dessus on a $N_{E/k}(Cl(E)) = Cl(k)$. Donc on a (2). □

Bibliographie

[A] E. ARTIN *Questions de base minimale dans la théorie des nombres algébriques.* Dans : Colloq. Internat. CNRS 24, Paris, 1950, 19–20.

[C1] J. E. CARTER, *Steinitz classes of a nonabelian extension of degree p^3.* Colloq. Math. **71** (1996), 297–303

[C2] J. E. CARTER, *Module structure of integers in metacyclic extensions.* Colloq. Math. **76** (1998), 191–199.

[C3] J. E. CARTER, *Steinitz classes of nonabelian extensions of degree p^3.* Acta Arith. **78** (1997), 297–303.

[F] A. FRÖHLICH, *The discriminant of relative extensions and the existence of integral bases.* Mathematika **7** (1960), 15–22.

[FT] A. FRÖHLICH, M. J. TAYLOR, *Algebraic number theory.* Cambridge University Press, 1991.

[H] E. HECKE *Lectures on the theory of algebraic numbers.* Graduate Texts Math. **77**, Springer-Verlag, New York, 1981.

[K] S.-H. KWON, *Extensions à groupes de Galois A_4.* Thèse, Université de Bordeaux I, 1984. *Corps de nombres de degré* 4 *de type alterné.* C.R.Acad.Sci. **299** (2) (1984), 41–43.

[L] R. LONG, *Steinitz classes of cyclic extensions of prime degree.* J. Reine Angew. Math. **250** (1971), 87–98.

[Ma] J. MARTINET, *Discriminants and permutation groups.* Number Theory, Walter de Gruyter (Richard A. Molin, ed.), Berlin - New York, 1990, 359–385

[Mc] L. R. MCCULLOH, *Galois module structure of abelian extensions*. J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 259–306.

[N] J. NEUKIRCH *Class field theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[Se] J.-P. SERRE, *Corps Locaux*, 3ème édition. Hermann, Paris, 1980

[So1] B. SODAÏGUI, *Classes de Steinitz d'extensions galoisiennes relatives de degré une puissance de 2 et problème de plongement*. Illinois J. Math. **43** (1999), 47–60.

[So2] B. SODAÏGUI, *Relative Galois module structure and Steinitz classes of dihedral extensions of degree 8*. J. Algebra **223** (1999), 367–378.

[So3] B. SODAÏGUI, *Realizables Classes of quaternion extensions of degree 4l*. J. Number Theory **80** (2000), 304–315.

[W] L. C. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Marjory GODIN, Bouchaïb SODAÏGUI
Département de Mathématiques
Le Mont Houy
59313 Valenciennes cedex 9, France
E-mail : marjory.godin@univ-valenciennes.fr
Bouchaib.Sodaigui@univ-valenciennes.fr