JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

GILLES DAMAMME

Étude de $L(s,\chi)/\pi^s$ pour des fonctions L relatives à $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ et associées à des caractères de degré 1

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 11, n° 2 (1999), p. 369-385

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1999__11_2_369_0>

© Université Bordeaux 1, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (http://jtnb.cedram.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **11** (1999), 369–385

Etude de $L(s,\chi)/\pi^s$ pour des fonctions L relatives à $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ et associées à des caractères de degré 1

par GILLES DAMAMME

RÉSUMÉ. Carlitz a défini pour les corps de fonctions l'analogue du réel π et Goss l'analogue des fonctions L de Dirichlet. Nous prouvons dans un cas particulier qu'il existe des valeurs entières s et des caractères χ pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ peut être rationnel, algébrique ou bien transcendant.

ABSTRACT. For functions fields, Carlitz defined an analogue of the real π and Goss defined the analogue of Dirichlet L-functions. We prove in a particular case that there exist integer values s and characters χ such that $L(s,\chi)/\pi^s$ is rational, algebraic or transcendent.

1. INTRODUCTION

Soit $q = p^n$ (p premier) et $\mathbb{F}_q$ un corps fini.
On pose :

$$\begin{aligned} Z = A &= \mathbb{F}_q[T] \\ Q = k &= \mathbb{F}_q(T) \\ R = k_\infty &= \mathbb{F}_q((T^{-1})) \end{aligned}$$

(k_∞ est le complété de k pour la valeur absolue à l'infini).
Soit C le complété d'une clôture algébrique de k_∞.
Soit $X \in R$ ($X \neq 0$) :

$$X = a_n T^n + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{T} + \cdots (a_n \neq 0)$$

On pose :

$$\deg X = n,\ \operatorname{sgn} X = a_n,\ |X| = q^n$$

X sera dit *unitaire* si $\operatorname{sgn} X = 1$.

Manuscrit reçu le 2 février 1995.

On pose aussi, pour $k \geq 1$:

$$[k] = T^{q^k} - T$$
$$L_k = [k]\dots[1]\ , \qquad L_0 = 1$$

On vérifie que $[k]$ est le produit des polynômes unitaires irréductibles dont le degré divise k et que L_k est le ppcm des polynômes unitaires de degré k. La fonction zêta de Carlitz est définie de la façon suivante : pour $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(s) = \sum_{N \in Z}{}' \frac{1}{N^s} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{deg N = k}{}' \frac{1}{N^s} \Big)$$

Σ' signifie que la somme est restreinte aux polynômes unitaires.

Définissons enfin π par :

$$\pi = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\Big)$$

On sait que π est transcendant sur $Q([W])$ et aussi que pour les valeurs s divisibles par $(q-1)$, $\zeta(s)/\pi^s$ est rationnel et que par conséquent $\zeta(s)$ est transcendant dans ce cas. De plus, on a montré que pour les valeurs s non divisibles par $(q-1)$, $\zeta(s)$ et $\zeta(s)/\pi^s$ sont transcendants ([Y], [D.H]).

Dans le cas réel, Euler a prouvé que $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ est rationnel, mais on ignore en général la nature de $\zeta(2n+1)$ et de $\zeta(2n+1)/\pi^{2n+1}$. De même pour les fonctions L de Dirichlet, on sait démontrer dans certains cas liés à la parité de s que $L(s,\chi)/\pi^s$ est rationnel ou algébrique, mais quand il n'existe pas de formule reliant $L(x,\chi)$ et π^s, on ignore la nature de $L(s,\chi)/\pi^s$. Aussi, on peut naturellement se poser la question suivante : pour les fonctions L prolongeant la fonction zêta de Carlitz, a-t-on certains cas pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ est rationnel ? algébrique ? transcendant ?

En 1983, D. Goss a défini des fonctions L sur des corps de fonctions correspondant au prolongement ci-dessus dans le cas particulier où $A = \mathbb{F}_q[T]$ ([G]). Je redonne cette définition ci-dessous (dans ce cas particulier) et prouve dans les paragraphes suivants qu'il existe des valeurs de s et des caractères χ pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ est rationnel ou algébrique, mais aussi d'autres cas où $L(s,\chi)/\pi^s$ est transcendant.

2. Caractères et fonctions L relatifs au module de Carlitz

Soit G un groupe abélien fini. On appelle caractère χ à valeurs dans C tout homomorphisme de G vers $(C^*,.)$:

$$\chi : G \longrightarrow (C^*,.)$$

Exemple.

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{F}_q^* \subset C^*$$
$$g \longmapsto 1$$

est le caractère principal de G.

Définition. Soit $M \in Z$, unitaire, sans facteur carré, et de degré m. Un caractère

$$\chi : ((Z/(M))^*, .) \longrightarrow (C^*, .)$$

est appelé *caractère modulo* M. Un tel caractère sera dit *de degré* m.

On prolonge χ à tout élément N de Z en posant :

$$\chi(N) = \begin{cases} \chi(\overline{N}) & \text{si } (N,M) = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

($\overline{N}$ désignant la classe de N modulo M).

Propriétés. Soit χ un caractère modulo M. On a :

$$\sum_{\overline{N} \in (Z/(M))^*} \chi(\overline{N}) \equiv \begin{cases} \text{Card}((Z/(M))^*) \pmod{p} & \text{si } \chi = 1 \\ 0 \pmod{p} & \text{si } \chi \neq 1. \end{cases}$$

Définition. Soit χ un caractère modulo M. On pose :

$$L(s,\chi) = \sum_{N \in Z}{}' \frac{\chi(N)}{N^s} \qquad (s \in \mathbb{N}^*)$$

($\sum'$ signifiant que la somme est restreinte aux polynômes unitaires).

Propriétés.

(i) $L(s,\chi) = \prod_{P \in \mathcal{P}} (1 - \chi(P) P^{-s})^{-1}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de Z.

(ii) Si χ est un caractère principal modulo M, on a :

$$L(s,\chi) = \Big(\prod_{P \mid M} (1 - P^{-s}) \Big) . \zeta(s)$$

Corollaire. *Si χ est un caractère principal modulo M, $L(s,\chi)$ est transcendant sur Q.*

On suppose désormais et jusqu'à la fin, que M est un polynôme unitaire fixé de degré 1. On posera : $M = T - a$ avec $a \in \mathbb{F}_q$.

3. Caractères de degré 1

Propriétés. Soit $M = T - a \ \ (a \in \mathbb{F}_q)$.

Alors tout caractère modulo M est de la forme :

$$\chi_r : (Z/(M))^* \longrightarrow \mathbb{F}_q^*$$
$$\overline{N} \longmapsto (N(a))^r$$

Démonstration. Comme M est de degré 1, $(Z/(M)^*, .)$ est isomorphe à $(\mathbb{F}_q^*, .)$ et comme :

$$N \equiv N(a) \mod M$$

on peut identifier $\overline{N}$ et $N(a)$.

Il reste à déterminer les homomorphismes de $(\mathbb{F}_q^*, .)$.

Comme $(\mathbb{F}_q^*, .)$ est cyclique, ils sont de la forme : $N(a) \longmapsto N(a)^r$. □

Notation. On notera désormais χ_r le caractère :

$$\chi_r : Z \longrightarrow \mathbb{F}_q$$
$$N \longmapsto N(a)^r$$

Nous allons maintenant donner un exemple fondamental ; pour χ_1, on peut donner deux expressions de $L(1, \chi_1)$:

$$L(1,\chi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{(q^k-1)/q-1}}{L_k} \tag{1}$$

$$L(1,\chi_1) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n}. \tag{2}$$

Ces deux relations seront démontrées dans la preuve du théorème 1.

Dans les prochains paragraphes, nous allons généraliser le type de relations obtenues ci-dessus et en déduire des résultats d'algébricité et de transcendance ; quand on calculera $L(1, \chi_s)$ on obtiendra une relation du type (1), et pour $L(s, \chi_s)$ une relation du type (2).

4. Algébricité de $L(s, \chi_s)$

Posons :

$$\xi = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n} \tag{3}$$

ξ est bien défini et on a alors le :

Théorème 1. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$:*

$$L(s, \chi_s) = B\xi^s$$

avec $B \in Q^*$ et dépend de s. De plus $B = 1$ si $s \leq q$.

Corollaire 1.

(i) *Pour tout s de $\mathbb{N}^*$, $L(s,\chi_s)/\pi^s$ est algébrique sur Q.*

(ii) *De plus si $q-1$ divise s, $L(s,\chi_s)/\pi^s$ est rationnel*

(iii) *Pour tout s de $\mathbb{N}$, $L(s,\chi_s)$ est transcendant sur Q.*

Remarque. Si on considère que les nombres s divisibles par $q-1$ jouent le rôle de nombres pairs, $L(s,\chi_s)/\pi^s$ est rationnel dans ce cas, de plus comme dans le cas réel, il existe aussi des caractères χ pour lesquels $L(s,\chi)/\pi^s$ est algébrique si s est "impair".

Preuve du Théorème 1. On a :

$$L(s,\chi_s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

avec :

$$u_k = \sum_{\deg N=k}{}' \frac{\chi_s(N)}{N^s} = \sum_{\substack{\deg N=k \\ N(a)\neq 0}}{}' \frac{1}{N^s/\chi_s(N)}.$$

Mais en faisant la division de N par M, N peut s'écrire :

$$N = M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \cdots + a_1 M + a_0$$

avec :

$$a_0 = N(a) \qquad \text{car} \qquad N \equiv N(a) \qquad \mod M$$

d'où :

$$\frac{N^s}{\chi_s(N)} = \left(\frac{M^k}{a_0} + \frac{a_{k-1}}{a_0}\, M^{k-1} + \cdots + \frac{a_1 M}{a_0} + \frac{a_0}{a_0}\right)^s$$

Si on pose : $b_k = \dfrac{a_k}{a_0}$,
on a :

$$\begin{aligned}\frac{N^s}{\chi_s(N)} &= (b_k M^k + \cdots + b_1 M + 1)^s \\ &= M^{ks}\left(b_k + b_{k-1}\left(\frac{1}{M}\right) + \cdots + b_1\left(\frac{1}{M}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{M}\right)^k\right)^s \\ &= M^{ks} P^s\left(\frac{1}{M}\right)\end{aligned}$$

où P est un polynôme unitaire tel que $P(0) \neq 0$.

Comme il y a correspondance bijective entre les N unitaires tels que $N(a) \neq 0$ et les P unitaires tels que $P(0) \neq 0$, on a :

$$u_k = \sum_{\substack{\deg P=k \\ P(0)\neq 0}}{}' \frac{1}{M^{ks}P^s(\frac{1}{M})}$$

$$= \Big(\frac{1}{M^{ks}} \sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{M^{ks}P^s(\frac{1}{M})}\Big) - \Big(\frac{1}{M^{(k-1)s}} \sum_{\deg P=k-1}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})}\Big)$$

Posons donc :

$$u_k = v_k - v_{k-1}$$

avec :

$$(4) \qquad v_k = \frac{1}{M^{ks}} \sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} \qquad \text{et} \qquad v_{-1} = 0$$

On a alors :

$$L(s,\chi_s) = \sum_{k=0}^{\infty}(v_k - v_{k-1}) = \lim_{k\longrightarrow\infty} v_k$$

(i) Si $s \leq q$, on sait que :

$$\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s} = \frac{(-1)^{ks}}{L_k^s} \qquad ([C], [D] \text{ p. } 4.7)$$

d'où :

$$v_k = \frac{1}{M^{ks}} \frac{(-1)^{ks}}{[k]_{1/M}^s \cdots [1]_{1/M}^s}$$

avec :

$$[k]_{1/M} = (\frac{1}{M})^{q^k} - (\frac{1}{M})$$

et comme :

$$[k]_{1/M} = \frac{-[k]}{M^{q^k+1}}$$

on en déduit :

$$v_k = \frac{M^{sq(q^k-1)/q-1}}{L_k^s}$$

d'où l'expression de $L(s,\chi_s)$ quand $s \leq q$.

On a donc bien $B = 1$ si $s \leq q$.

Si $s = 1$, alors en écrivant v_k sour la forme :

$$v_k = \frac{M^{q^k+\cdots+q}}{L_k}$$

on en déduit que :

$$u_k = v_k - v_{k-1} = \frac{M^{(q^k-1)/q-1}}{L_k}$$

ce qui prouve la relation (1).

(ii) Supposons maintenant que $s > q$; on a alors :

Si s est tel que : $q^n < s \leq q^{n+1}$:

$$\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} = \frac{M^{s(k+q(q^k-1)/q-1)}}{L_k^s} \sum_{\substack{\boldsymbol{i} \text{ tel que} \\ i_1q+\cdots+i_nq^n<s}} \alpha_{\boldsymbol{i}} B_{\boldsymbol{i},k} \tag{5}$$

avec :

$$B_{\boldsymbol{i},k} = \pm \frac{M^{i_1(q+1)+\ldots+i_n(nq^n+(q^n-1)/q-1)}\ [k]_{1/M}^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]_{1/M}^{i_nq^n}}{D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n}}$$

où :

$\boldsymbol{i}$ représente l'indice $(i_1, \ldots, i_n)$

$\alpha_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{F}_q$

$\alpha_{\boldsymbol{0}} = \alpha_{(0,\ldots,0)} \neq 0$

$D_k = [k][k-1]^q \ldots [1]^{q^{k-1}}$

Remarque. Le signe de $B_{\boldsymbol{i},k}$ regroupe tous les signes intervenant dans le calcul de l'expression ci-dessus, même ceux ne dépendant pas de la somme. Il dépend donc de $\boldsymbol{i}$, mais aussi de s et k et peut-être calculé explicitement. Cependant comme il n'intervient pas de façon significative par la suite, nous nous contenterons par commodité de le noter : $\pm$.

Pour établir la relation (5), on utilise la relation (48) de [D.H] page 277, dont on déduit l'expression de :

$$\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s}$$

Si $q^n < s \leq q^{n+1}$, on a alors :

$$\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s} = (-1)^{s+k+1} \sum_{\substack{\boldsymbol{i} \text{ tel que} \\ i_1q+\ldots+i_nq^n \leq s-1}} \frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}[k]^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]^{i_nq^n}}{L_k^s\ D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n}}$$

avec $\alpha_{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{F}_q$, $\alpha_{\boldsymbol{0}} \neq 0$.

D'où :

$$\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{M})} =$$

$$\frac{(-1)^{s+k+1}}{L_k^s(\frac{1}{M})} \sum_{\substack{i \text{ tel que} \\ i_1q+\ldots+i_nq^n<s}} \frac{\alpha_i[k]_{1/M}^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]_{1/M}^{i_nq^n}}{D_1^{i_1}(\frac{1}{M}) \ldots D_n^{i_n}(\frac{1}{M})}$$

avec

$$\alpha_0 \neq 0$$
$$L_k(\frac{1}{M}) = [k]_{1/M}\ [k-1]_{1/M} \ldots [1]_{1/M}$$
$$D_k(\frac{1}{M}) = [k]_{1/M}\ [k-1]_{1/M}^q \ldots [1]_{1/M}^{q^{k-1}}$$

Comme : $[k]_{1/M} = \frac{-[k]}{M^{q^k+1}}$,
on a :

$$L_k\Big(\frac{1}{M}\Big) = \frac{(-1)^k\ L_k}{M^{k+q(q^k-1)/q-1}}$$
$$D_k\Big(\frac{1}{M}\Big) = \frac{(-1)^{(q^k-1)/q-1}\ D_k}{M^{kq^k+(q^k-1)/q-1}}$$

En remplaçant dans l'expression de $\sum_{\deg P=k}{}' \frac{1}{P^s(\frac{1}{N})}$, on retrouve bien la relation (5).

On a donc :

$$v_k = \Big(\frac{M^{q(q^k-1)/q-1}}{L_k}\Big)^s \sum_{\substack{i \text{ tel que} \\ i_1q+\ldots+i_nq^n<s}} \alpha_i B_{i,k}$$

avec :

$$B_{i,k} = \pm \frac{M^{i_1(q+1)+\ldots+i_n(nq^n+(q^n-1)/q-1)}\ [k]_{1/M}^{i_1q+\ldots+i_nq^n} \ldots [k-(n-1)]_{1/M}^{i_1q^n}}{D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n}}$$

or :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}[k]_{1/M}^{i_1q+\cdots+i_nq^n}\ldots[k-(n-1)]_{1/M}^{i_nq^n}=$$

$$=\lim_{k\longrightarrow\infty}\left[\left(\frac{1}{M}\right)^{q^k}-\frac{1}{M}\right]^{i_1q+\cdots+i_nq^n}\cdots\left[\left(\frac{1}{M}\right)^{q^{k-(n-1)}}-\frac{1}{M}\right]^{i_nq^n}$$

$$=\left(\frac{-1}{M}\right)^{i_1q+\cdots+i_nq^n}\cdots\left(\frac{-1}{M}\right)^{i_nq^n}$$

$$=\pm\left(\frac{1}{M}\right)^{i_1q+2i_2q^2+\cdots+ni_nq^n}$$

Donc, si on pose : $B_{\boldsymbol{i}}=\lim_{k\longrightarrow\infty}B_{\boldsymbol{i},k}$ on obtient :

$$B_{\boldsymbol{i}}=\pm\frac{M^{i_1(q+1)+\ldots+i_n(nq^n+(q^n-1)/q-1)}}{D_1^{i_1}\ldots D_n^{i_n}\;M^{i_1q+2i_2q^2+\ldots+ni_nq^n}}$$

c'est-à-dire :

$$B_{\boldsymbol{i}}=\pm\frac{M^{i_1+i_2(q^2-1)/q-1)+\ldots+i_n(q^n-1)/q-1}}{D_1^{i_1}\ldots D_n^{i_n}}$$

D'où :

$$L(s,\chi_s)=\lim_{k\longrightarrow\infty}v_k=\xi^sB$$

avec

$$B=\sum_{\substack{\boldsymbol{i}\text{ tel que}\\ i_1q+\ldots+i_nq^n<s}}\alpha_{\boldsymbol{i}}B_{\boldsymbol{i}}.$$

On a bien : $B\in Q$

Reste à montrer que B est non nul :

$$B_{\mathbf{0}}=\pm\alpha_0\neq 0$$

donc : $\deg B_{\mathbf{0}}=0$
et comme : $\deg D_k=kq^k$,

$$\deg B_{\boldsymbol{i}}=i_1(1-q)+i_2\left(\frac{q^2-1}{q-1}-2q^2\right)+\ldots+i_n\left(\frac{q^n-1}{q-1}-nq^n\right).$$

On en déduit que si $\boldsymbol{i}\neq\mathbf{0}$,

$$\deg B_{\boldsymbol{i}}<0.$$

Comme B est la somme de $B_{\mathbf{0}}$ et de $B_{\boldsymbol{i}}$ de degré strictement négatif, B est bien non nul. □

Preuve du Corollaire 1.

(i) On a :

$$\pi = \prod_{j=0}^{\infty}\Big(1 - \frac{[j]}{[j+1]}\Big) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{L_{n+1}} \prod_{j=0}^{n}([j+1]-[j])$$

Comme : $[j+1]-[j] = [1]^{q^j}$,

$$\pi = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{[1]^{q^n-1/(q-1)}}{L_n}$$

D'où, d'après le théorème 1 :

$$\frac{L(s,\chi_s)}{\pi^s} = \frac{B\xi^s}{\pi^s} = \lim_{n\longrightarrow\infty} B\Big(\frac{M^q}{[1]}\Big)^{s.\frac{q^n-1}{q-1}} = B\Big(\frac{[1]}{M^q}\Big)^{s/(q-1)}$$

avec $B = 1$ si $s \leq q$ et où $\left(\frac{[1]}{M^q}\right)^{1/(q-1)}$ est l'élément X de Z de signe 1 tel que :

$$X^{q-1} = \frac{[1]}{M^q}$$

Ce rapport est donc algébrique.

(ii) De plus si $s/q-1$ est un entier m,

$$B.\Big(\frac{[1]}{M^q}\Big)^m \in Q$$

(iii) Enfin, comme $B \in Q^*$, la transcendance de $L(s,\chi_s)$ se déduit de celle de π^s.

□

5. Transcendance de $L(1,\chi_s)/\pi$

Nous allons, maintenant, aborder un exemple où $L(r,\chi)/\pi^r$ n'est plus algébrique mais transcendant.

On suppose toujours que M et χ_s sont définis comme précédemment :

$$M = T - a$$

et

$$\chi_s \begin{cases} Z & \longrightarrow \mathbb{F}_q \\ N & \longmapsto N(a)^s \end{cases}$$

On a le :

Théorème 2. *Pour $s < q$*

$$L(1,\chi_s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k(s-1)} \quad \frac{M^{s\frac{q^k-1}{q-1}}}{L_k} \tag{6}$$

Le calcul pour aboutir à (6) est assez complexe et sera détaillé au paragraphe suivant.

Rappelons maintenant le :

Théorème (B. de Mathan [dM]). *Soit $\alpha \in R$. Supposons qu'il existe une suite (P_n/Q_n) avec $(P_n, Q_n) \in Z^2, P_nQ_n \neq 0$ satisfaisant :*

(i) *Il existe $\Lambda \in Z, \Lambda \neq 0$, tel que :*

$$Q_n = \Lambda Q_{n-1}^q \quad \forall n \leq 1$$

(ii) *Il existe une constante réelle C_1 telle que :*

$$|\alpha - P_n/Q_n| \leq C_1 \, |Q_n|^{-1}$$

(iii) *Il existe un polynôme irréductible Δ tel que la suite (δ_n) définie par :*

$$\delta_n = W_\Delta(P_n)$$

satisfait :

$$\lim_{n \to \infty} (q\delta_{n-1} - \delta_n) = +\infty$$

(W_Δ étant la valuation Δ-adique), alors α est transcendant sur Q.

Le corollaire suivant est une application directe du critère de transcendance énoncé ci-dessus :

Corollaire 2. *Pour $1 < s < q$,*

$$L(1, \chi_s)/\pi$$

est transcendant sur Q.

Remarque.

1. Comme χ_s ne dépend que de la classe de s modulo $q-1$, on peut généraliser ce résultat à tout s tel que :

$$s \not\equiv 1 \qquad (q-1).$$

2. Le théorème 2, p. 430 de [dM 2] ne peut s'appliquer pour montrer que $L(1, \chi_s)/\pi^t$ est transcendant car la condition (v) de ce théorème 2 n'est pas satisfaite.

Preuve du corollaire 2.

On a vu que

$$\frac{\pi}{\xi} = \left(\frac{M^q}{[1]}\right)^{\frac{1}{q-1}} \in \overline{Q}$$

Par suite $L(1, \chi_s)/\pi$ est transcendant si et seulement si $L(1, \chi_s)/\xi$ l'est ; c'est cette dernière assertion que nous allons montrer.

On pose donc :

$$\alpha = L(1,\chi_s)/\xi$$
$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{L_n}{M^{q(q^n-1)/(q-1)}} \times \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{L_k}$$

avec :

$$\varepsilon_k = (-1)^{k(s-1)} M^{s\frac{q^k-1}{q-1}}$$

En réduisant au même dénominateur, on trouve :

$$\alpha = \lim_{n\longrightarrow\infty} P_n/Q_n$$

avec :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \prod_{k<j\leq n} [j]$$

et :

$$Q_n = M^{q(q^n-1)/(q-1)}$$

Examinons si P_n et Q_n satisfont les conditions (i) (ii) et (iii) du théorème de Mathan.

Condition (i) : Si on pose : $\Lambda = M^q$ on vérifie alors que :

$$Q_n = \Lambda Q_{n-1}^q$$

Condition (ii) : On a :

$$\xi = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n}$$
$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{M^{q^j}}{[j]} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{M}{[j]}\right)$$

De même :

$$\frac{M^{q(q^n-1)/(q-1)}}{L_n} = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{M}{[j]}\right)$$

D'où :

$$\left|\xi - \frac{Q_n}{L_n}\right| = \left|\frac{M}{[n+1]}\right| = |T|^{1-q^{n+1}}$$

Comme : $|\xi| = \left|\frac{Q_n}{L_n}\right| = 1$, on a :

$$\left|\frac{1}{\xi} - \frac{L_n}{Q_n}\right| = |T|^{1-q^{n+1}} \tag{7}$$

D'autre part :

$$\left|L(1,\chi_s) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{L_k}\right| = |T|^{(s-q).\frac{q^{n+1}-1}{q-1}} \tag{8}$$

Maintenant, si $|a| = |b| = |c| = |d| = 1$,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \left|a\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{d}(a-c)\right| \leq \sup\left(\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right|, |a-c|\right)$$

En prenant : $a = L(1,\chi_s), b = \xi, c = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{L_k}$ et $d = \frac{Q_n}{L_n}$, on trouve d'après (8) et (7)) :

$$\begin{aligned}\left|\frac{L(1,\chi_s)}{\xi} - \frac{P_n}{Q_n}\right| &\leq \sup\left(|T|^{1-q^{n+1}}, |T|^{(s-q).(q^{n+1}-1)/q-1}\right) \\ &\leq |T|^{(s-q).(q^{n+1}-1)/q-1}\end{aligned}$$

Or :

$$\deg Q_n = (q^{n+1} - q)/q - 1 \leq (q-s)(q^{n+1}-1)/q - 1$$

donc :

$$\left|\frac{L(1,\chi_s)}{\xi} - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leq |Q_n|^{-1}$$

Condition (iii) : Choisissons $\Delta = M$ et calculons $\delta_n = W_\Delta(P_n)$.

Comme $\varepsilon_k = (-1)^{k(s-1)} M^{s\frac{q^k-1}{q-1}}$. On a :

$$W_M\left(\varepsilon_k \prod_{k<j\leq n} [j]\right) = s.\frac{q^k-1}{q-1} + n - k$$

D'où, si $s > 1$:

$$W_M\left(\varepsilon_0 \prod_{0<j\leq n} [j]\right) < W_M\left(\varepsilon_1 \prod_{1<j\leq n} [j]\right) < \ldots < W_M(\varepsilon_n)$$

d'où :

$$W_M(P_n) = W_M(\varepsilon_0 L_n) = n.$$

Remarque. Si $s = 1$, la relation ci-dessus n'est plus vraie.

On a donc :

$$\delta_n = n$$

d'où :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}(q\delta_{n-1} - \delta_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(q-1)n - q = +\infty$$

□

6. Preuve du théorème 2

Posons :

$$L(1,\chi_s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

et :

$$A_k(X) = \prod_{|N|=q^k}{}' (\chi_s(N)X + N)$$

($\prod'$ signifie que le produit est restreint aux N unitaires).

En prenant les dérivées logarithmiques (formelles) des deux membres, on obtient :

$$\frac{A_k'(X)}{A_k(X)} = \sum_{|N|=q^k}{}' \frac{\chi_s(N)}{\chi_s(N)X + N}$$

et :

$$u_k = \frac{A_k'(0)}{A_k(0)}$$

Calcul de $A_k'(0)/A_k(0)$:

Pour effectuer ce calcul, on va décomposer A_k en sous-produits B_ℓ où $\chi_s(N) = \ell^s$ reste constant. Posons donc :

$$A_k(X) = \prod_{\ell \in \mathbb{F}_q} B_\ell(X) \tag{9}$$

avec :

$$B_\ell(X) = \prod_{|N|=q^k N(a)=\ell} (\ell^s X + N)$$

Pour exprimer $B_\ell(X)$, nous utiliserons les *déterminants de Moore* :

$$D(M_0,\dots,M_k) = \left|M_j^{q^{k-j}}\right| = \begin{vmatrix} M_0^{q^k} & M_0^{q^{k-1}} & \dots & M_0^q & M_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_k^{q^k} & M_k^{q^{k-1}} & \dots & M_k^q & M_k \end{vmatrix}$$

Ces déterminants (d'ordre $k+1$) et leurs propriétés ont été étudiés par Moore dans [M]. On a notamment :

$$\frac{D(M_0,M_1,\dots,M_k)}{D(M_1,\dots,M_k)} = \prod_{(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{F}_q^k} (M_0 + a_1M_1 + \dots + a_kM_k) \tag{10}$$

Comme N peut s'écrire :

$$N = M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \ldots + a_1 M + \ell,$$

on a d'après (10) :

$$\begin{aligned} B_\ell(X) &= \\ &= \frac{D(\ell^s X + M^k + \ell, M^{k-1}, \ldots, M)}{D(M^{k-1}, \ldots, M)} \\ &= \frac{\ell^s D(X, M^{k-1}, \ldots, M) + D(M^k, M^{k-1}, \ldots, M) + \ell D(1, M^{k-1}, \ldots, M)}{D(M^{k-1}, \ldots, M)} \\ &= \frac{\ell^s M^{(q^k-1)/q-1} D\left(\frac{X}{M}, M^{k-2}, \cdots, 1\right) + [M^{(q^k-1)/q-1} + (-1)^{k-1}\ell]\, D(M^{k-1}, \ldots, 1)}{M^{(q^{k-1}-1)/q-1}\, D(M^{k-2}, \ldots, 1)} \end{aligned}$$

En utilisant *le polynôme de Carlitz* défini dans [C] par :

$$\psi_k(X) = \frac{D(X, M^{k-1}, \ldots, 1)}{D(M^{k-1}, \ldots, 1)}$$

et en remarquant d'autre part que, d'après (10) et [C] :

$$\begin{aligned} \frac{D(M^{k-1}, M^{k-2}, \ldots 1)}{D(M^{k-2}, \ldots, 1)} &= \prod_{(a_0,\ldots,a_{k-2}) \in \mathbb{F}_q^{k-1}} (M^{k-1} + a_{k-2}M^{k-2} + \ldots + a_0) \\ &= D_{k-1} \end{aligned}$$

on a :

$$B_\ell(X) = \ell^s M^{q^{k-1}} \psi_{k-1}\left(\frac{X}{M}\right) + \frac{(-1)^{k-1}}{M^{(q^{k-1}-1)/q-1}} \left[(-1)^{k-1} M^{(q^k-1)/q-1} + \ell\right] . D_{k-1}$$

avec d'après [C] :

$$\psi_{k-1}(0) = 0$$

$$\psi'_{k-1}(0) = (-1)^{k-1} \frac{D_{k-1}}{L_{k-1}}$$

On a donc :

$$B_\ell(0) = D_{k-1} b(c + \ell)$$

avec :

$$b = \frac{(-1)^{k-1}}{M^{(q^{k-1}-1)/q-1}}, \qquad c = (-1)^{k-1} M^{(q^k-1)/q-1}$$

et :

$$B'_\ell(0) = D_{k-1} \frac{(-1)^{k-1}\, M^{q^{k-1}-1}}{L_{k-1}}\, \ell^s$$

On peut désormais calculer $A_k'(0)/A_k(0)$; d'après (9) :

$$\frac{A_k'(0)}{A_k(0)} = \frac{\sum_{\ell\in\mathbb{F}_q} B_\ell'(0) \prod_{\substack{j\in\mathbb{F}_q \\ j\neq\ell}} B_j(0)}{\prod_{\ell\in\mathbb{F}_q} B_\ell(0)}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{M^{q^{k-1}-1}}{L_{k-1}} \cdot \frac{b^{q-1}\sum_{\ell\in\mathbb{F}_q} \ell^s \prod_{j\neq\ell}(c+j)}{b^q \prod_{\ell\in\mathbb{F}_q}(c+\ell)}$$

Comme on trouve que, si $s < q$:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{F}_q} \ell^s \prod_{j\neq\ell j\in\mathbb{F}_q} (X+j) = (-1)^{s-1}X^s$$

En faisant une décomposition en éléments simples de $X^s/(X^q - X)$ et en réduisant cette décomposition au dénominateur commun $X^q - X$, on obtient :

$$u_k = \frac{A_k'(0)}{A_k(0)} = \frac{(-1)^{k-1}M^{q^{k-1}-1}}{L_{k-1}} \cdot \frac{(-1)^{s-1}c^s}{b(c^q - c)}$$

$$= \frac{(-1)^{k(s-1)}\ M^{s(q^k-1)/q-1}\ M^{-1}\ M^{(q^k-1)/q-1}}{L_{k-1}\ [M^{q(q^k-1)/q-1} - M^{(q^k-1)/q-1}]}$$

$$= \frac{(-1)^{k(s-1)}}{L_{k-1}} \cdot \frac{M^{s(q^k-1)/q-1}}{(M^{q^k} - M)}$$

$$u_k = \frac{(-1)^{k(s-1)}}{L_k} \cdot M^{s(q^k-1)/q-1}$$

Je remercie B. de Mathan pour les conseils qu'il m'a donnés lors des J.A. de Bordeaux en 1993.

Tous les résultats relatifs au calcul de $\zeta(s)$ (s quelconque), aux déterminants de Moore et au polynôme de Carlitz sont dans [D].

Bibliographie

[A] J.P. Allouche, *Sur la transcendance de la série formelle II.* Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 103–117.

[C] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field.* Duke Math. J. **1** (1935), 137–168.

[D] G. Damamme, *Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade.* Thèse, Caen, 1990.

[D.H.] G. Damamme et Y. Hellegouarch. *Transcendence of the values of the Carlitz zéta function by Wade's method.* J. Number Theory **39** (1991), 257–278.

[G] D. Goss, *On a new type of $L-$functions for algebraic curves over finites fields.* Pacific J. of Math. **105** (1983), 143–181.

[M] E.H. Moore, *A two-fold generalisation of Fermat's theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. **2** (1896), 189–195.

[dM] B. de Mathan, *Irationnality measures and transcendence in positive characteristic.* J. of Number Theory **54** (1995), 93–112.

[dM2] B. de Mathan, *Un critère de transcendance en caractéristique positive.* C.R. Acad.Sci. Paris t. 319, Série I, (1994), 427–432.

[W] L.J. Wade, *Certain quantities transcendental over $GF(p^n,x)$.* Duke Math. J. **8** (1941), 701–720.

[Y] J. Yu, *Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p.* Annals of Mathematics **134** (1991), 1–23.

Gilles DAMAMME
Département de Mathématiques
UMR 9994
Université de Caen
Bvd du Maréchal Juin F-14032 CAEN Cedex
E-mail : Gilles.Damamme@math.unicaen.fr