JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

NICOLAS S. ZAMFIRESCU
CONSTANTIN CHILARESCU

Estimation des paramètres d'un mélange de lois normales provenant d'un modèle saut-diffusion à volatilité stochastique à deux états

Journal de la société statistique de Paris, tome 139, n° 2 (1998), p. 61-86

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1998__139_2_61_0>

© Société de statistique de Paris, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN MÉLANGE DE LOIS NORMALES PROVENANT D'UN MODÈLE SAUT-DIFFUSION A VOLATILITÉ STOCHASTIQUE A DEUX ETATS

Nicolas S. ZAMFIRESCU
Université d'Orléans
Laboratoire d'Economie d'Orléans (LEO)
UMR CNRS 6586 [1]
et
Constantin CHILARESCU
Université de l'Ouest, Timisoara
Faculté de Sciences économiques [2].

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier Mme Monique PONTIER pour ses commentaires et suggestions. Les éventuelles erreurs ou omissions leur sont totalement imputables.

1. Rue de Blois – B.P. 6739 – F-45067 Orléans cedex 2 – Tél. (33) 02 38 41 72 31 Fax (33) 02 38 41 72 05 – e-mail :zamfi@labomath.univ-orleans.fr

2. Bulevardul Vasile Pîrvan, RO-19000 Timisoara, Roumanie – Tél. (40) 56 19 68 82 Fax (40) 56 19 06 98 – e-mail : kyly@ise.uvt.ro

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 139, n° 2, 1998.

Résumé

L'hypothèse de normalité des rentabilités (ou lognormalité des cours), longtemps communément admise en finance, est infirmée dans la majorité des cas pour les taux de change particulièrement à cause de la forte leptokurticité des distributions observées sur données de marché. Parmi les nombreux modèles alternatifs présentant cette caractéristique de leptokurticité de leur distribution, nous avons choisi de retenir, sur des bases empiriques, comme processus gouvernant l'évolution temporelle des taux de change, un processus Saut-Diffusion à volatilité stochastique à deux états (S-DV2). Pour un tel processus, le comportement stochastique à deux états de la volatilité de sa partie continue nous amène à donner une amélioration de la méthode de R. E. QUANDT et J. B. RAMSEY (1978) d'estimation statistique des paramètres du mélange de lois normales qui en résulte. Nous donnons enfin, à titre d'exemple, une application de cette méthode au taux de change $-Leu sur données quotidiennes (de 1992 à 1997) et au taux de change $-DM sur données en continu.

Mots clés : leptokurtosis, martingales, semi-martingales, diffusion, volatilité, maximum de vraisemblance.

Abstract

The long time assumed hypothesis of normally distributed rates of return (or lognormally distributed prices) is rejected in many cases for exchange rates mainly because of the observed leptokurtosis in the distributions obtained from market data. Among the many alternative models showing leptokurtic distributions we have chosen, on an empirical basis, a Jump-Diffusion process (S-DV2) (whose diffusion part has a two-state stochastic volatility) as the underlying process for exchange rates. For such a S-DV2 process, one has to estimate the parameters, in so far as the continuous part is concerned, of the mixture of normal distributions resulting from the two-state stochastic volatility hypothesis. To do so we give an improved method based on the R. E. QUANDT et J. B. RAMSEY (1978) one. We then, as an example, apply this method to the $-Leu exchange rate on daily data (from 1992 to 1997) and to the $-DM exchange rate on intra-day continuously observed data.

Key words : leptokurtosis, martingales, semi-martingales, diffusion, volatility, maximum likelihood.

Introduction

Dans l'étude de l'évolution temporelle des cours des actifs financiers à des fins d'évaluation des risques, de couverture ou de prévision, un rôle essentiel est joué par l'hypothèse faite sur le type de processus gouvernant cette évolution [3].

Or si la normalité (ou lognormalité) a été l'hypothèse communément admise pendant longtemps en finance, la forte leptokurticité de nombreuses distributions des rentabilités (logarithmique), observée sur données de marché, ainsi que l'effet de "volatility smile" observé dans le cas des options, ont amené à son rejet, comme hypothèse réaliste, du comportement général du marché et des actifs financiers en particulier.

Cette remise en cause de la normalité a amené, depuis une vingtaine d'années déjà, les économistes, les statisticiens, les financiers et les probabilistes à rechercher et proposer des modèles alternatifs plus proches du comportement réel observé des cours des actifs financiers [4].

Malheureusement, malgré un grand nombre de modèles proposés, trop nombreux pour être tous cités ici (modèles économétriques de séries temporelles basés sur la fluctuation avec le temps de la variance conditionnelle (ARCH, GARCH, IGARCH, ARCH exponentiel, QTARCH [5]), modèles stochastiques basés sur des processus à saut, de diffusion à volatilité stochastique [6], de diffusion-saut [7]), browniens fractionnaires, etc. et des tests statistiques comparatifs effectués dans de nombreux cas et, enfin, malgré l'extraordinaire richesse en données de marché dont on dispose pour mener estimations et tests, on n'est toujours pas en mesure de dire quel est "le meilleur" modèle dans l'absolu.

Ceci est dû principalement au fait que l'évolution des actifs n'est observée que sur une seule trajectoire (un seul état de la nature).

De ce fait on n'a pas véritablement de tests pour déterminer si la série temporelle des réalisations d'un processus est ergodique, autrement dit si on a le droit "d'inverser le temps dans l'espace" et de déterminer la loi du processus à partir de la distribution observée. Or le non-respect de l'ergodicité peut amener, à partir des tests d'adéquation entre distributions qui ne sont plus alors valides, à des conclusions parfaitement fausses concernant la loi

---

3. Dans le cas où l'on fait, par exemple, l'hypothèse que le processus gouvernant cette évolution temporelle est un processus Mixte Diffusion-Saut, ce qui sera le cas dans notre article, le marché n'est pas généralement complet, le prix des options ne peut plus être déterminé par construction d'un portefeuille de réplication, le CAPM instantané n'est plus vérifié (JARROW et ROSENFELD [1984]), etc.

4. Une excellente revue de ces modèles alternatifs peut être trouvée par exemple dans l'article de M. BOUTILLIER [1992].

5. GOURIÉROUX et MONFORT [1992].

6. Par exemple HULL et WHITE [1987], O. SCOTT [1987].

7. Voir par exemple MERTON [1973, 1976, 1990].

supposée être suivie par le processus (*cf.* P. ARBULU, G. GALLAIS-HAMONNO et N. S. ZAMFIRESCU [1998]).

Devant un manque de tests permettant de choisir, à partir de la distribution observée "LA" loi suivie par le processus, on est amené à faire ce choix au départ sur des bases plutôt empiriques, tenant plus compte de la connaissance et l'intuition que l'on a du marché pour ensuite mener des tests et pour déterminer le seuil de rejet (risque de premier ordre) de l'hypothèse faite.

Néanmoins, comme tout statisticien le sait, le fait de ne pas pouvoir rejeter l'hypothèse faite sur le processus, sauf à prendre un grand risque de se tromper, ne veut pas dire que l'on peut accepter l'hypothèse (risque de second ordre inconnu). (*Cf.* P. ARBULU, G. GALLAIS-HAMONNO et N. S. ZAMFIRESCU [1998] pour un cas où le seuil de risque de première espèce est de 99,98 % et le risque de seconde espèce est pratiquement de 100 %).

Pour pallier ce problème d'unique trajectoire observée, dans le cas de titres qui sont des sous-jacents d'options, BAHRA [1996], DONDEAU et ROCKINGER [1997] et M.-N. GAMAS-RIEU [1997][8] utilisent la série complète des prix d'exercice (réalisations sur plusieurs trajectoires) d'une même échéance (à temps fixé) pour estimer à partir des primes d'option les probabilités que le marché attache à ces différentes valeurs futures possibles et par là même estimer la fonction de densité de probabilité neutre au risque ; mais un des inconvénients de cette méthode est la faiblesse du nombre de *calls* disponibles pour une même échéance et sa limitation aux actifs qui sont des sous-jacents d'options.

Le choix du processus Saut-Diffusion à volatilité stochastique à deux états (S-DV2) que nous avons fait pour modéliser le comportement observé du taux de change $-DM, fait appel en même temps aux nombreuses études déjà menées sur cet actif qui penchent en majorité en faveur d'au moins une composante saut (cf. par exemple JORION [1988], FEINSTONE [1987], BOUTILLIER [1992]), à nos études menées sur des données enregistrées en continu, au fait que la distribution d'un tel processus est évidemment leptokurtique et à notre intuition (pour la partie "Volatilité à deux états").

Si le mélange Diffusion-Saut peut être invoqué, à l'instar de MERTON [1973, 1976, 1990] sur la base de l'arrivée d'informations marginales n'entravant pas la continuité du chemin et d'informations brutales (en majorité exogènes) non attendues par le marché (donc non intégrées dans le cours) qui entraînent des variations soudaines et de grande amplitude, la volatilité à deux états de la partie continue peut être expliquée, quant à elle, par la plus ou moins grande intensité des transactions à différentes périodes, (par exemple, la journée, pour le $-DM (ouverture-fermeture des bourses dans le monde et plus particulièrement de places américaines, ouverture-fermeture des positions, etc.).

8. Tirés à part.

Si le choix d'un processus S-DV2 fait pour le taux de change \$-DM peut prêter à critique, il n'en va pas de même pour le taux \$-Leu [9].

En effet, ce comportement S-DV2 du taux de change \$-Leu, sur la période d'étude 1992-1997, peut s'expliquer facilement, sur ce marché émergeant, par la politique de la Banque Nationale Roumaine (BNR), qui, à certaines époques, dans un cadre très réglementé, a maintenu les cours dans des fourchettes très étroites (trajectoire continue à volatilité basse), suivies de relâchements subits (contraintes du FMI, décisions-surprises pour des raisons de masse monétaire) engendrant ainsi des sauts brutaux de rattrapage (effet de "relâchement d'un ressort comprimé") et puis d'une intense activité des acteurs financiers suite à ces relâchements (trajectoire continue à volatilité haute).

Cet article se compose d'une première partie mathématique consacrée au modèle.

La deuxième partie s'attache à la description de la méthode statistique d'estimation des paramètres du mélange de lois normales résultant du comportement stochastique à deux états de la volatilité du processus de diffusion.

La dernière partie contient un certain nombre de conclusions et remarques.

Enfin, en annexe, figurent les graphiques étayant visuellement le "goodness-of-fit" de la méthode d'estimation statistique, des tableaux synoptiques et, pour finir, un bref historique des événements de politique monétaire de la BNR sur la période 1992-1995.

1. Le modèle

1.1. Le modèle de Diffusion-Saut

Le modèle utilisé pour décrire la dynamique du processus X représentant dans notre cas le cours de change retient comme hypothèse que les martingales directrices de ce processus sont un mouvement brownien unidimensionnel W et un processus de Poisson $N = (N_1, N_2)$ de dimension 2.

On se fixe un intervalle de temps fini $[0, T]$.

Le processus brownien $W = \{W_t, F_t^W; 0 \leq t \leq T\}$ est considéré sur son espace canonique des états de la nature (Ω^W, F^W, P^W) où la filtration F_t^W, représentant toute l'information connue jusqu'à l'instant t, est l'augmentation sous P^W de la filtration engendrée par W.

Le processus $N = (N_1, N_2)$ est un processus de Poisson de dimension 2 sur son espace canonique (Ω^N, F^N, P^N), avec (N_1, N_2) indépendants.

On suppose dans toute la suite que :

1 - Les intensités λ_1 et λ_2 de N_1 et N_2 respectivement sont déterministes, mesurables, positives et bornées sur $[0, T]$;

2 - Les fonctions $\varphi_i, i = 1, 2$ donnant l'amplitude des sauts, de $N_i, i = 1, 2$ sont F^N-prévisibles, que les sauts de N_1 sont positifs et ceux de N_2 sont négatifs ($\varphi_1 \geq 0$ et $-\varphi_2 \geq 0$) et que $1 + \varphi_i(t) > 0, i = 1, 2$.

9. Leu : unité monétaire roumaine.

Remarque : On montre, sous ces hypothèses, que les processus W, N_1 et N_2 sont mutuellement indépendants sur

$$(\Omega = \Omega^W \times \Omega^N ; F = F^W \otimes F^N ; P = P^W \otimes F^N).$$

Notons par :

$$\tilde{N}_{i,t} = N_{i,t} - \int_0^t \lambda_i(s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

le processus de Poisson compensé[10].

Alors, en vertu de la remarque précédente, toute F^W-martingale (respectivement F^N-martingale) demeure une $F-P$-martingale et donc les $\tilde{N}_{i,t}$ sont des $F-P$-martingales.

Enfin la dynamique du processus X est modélisée par l'équation différentielle stochastique[11] :

$$\mathrm{d}X(t) = X(t_-)\left[b(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}W(t) + \varphi_1(t)\mathrm{d}N_1(t) + \varphi_2(t)\,\mathrm{d}N_2(t)\right] \tag{2}$$

$$X(0) = 0$$

Si on suppose que la dérive b, la volatilité σ et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ sont des processus mesurables, F_t-adaptés et uniformément bornés sur $[0,T]$, alors (2) admet une solution unique forte, et la formule exponentielle de C. DOLÉANS-DADE (1970) nous donne[12] :

$$X(t) = X(0)\exp\left[\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right] \cdot \prod_{i=1}^{2}\left[\prod_{T_k^i \le t}\left(1+\varphi_i(T_k^i)\right)\right] \tag{3}$$

où :

$$\beta(s) = b(s) - 2^{-1}\sigma(s)^2 - \sum_{i=1}^{2}\lambda_i(s)\varphi_i(s) \tag{4}$$

---

10. De façon plus générale, nous pourrions nous placer dans la classe plus grande des processus de saut pour lesquels λ_t est un processus localement intégrable F_t^N-progressif tel que $\tilde{N}_t$ défini par (1) est une F_t^N-martingale [cf. BRÉMAUD (1981)].

11. Cette modélisation a déjà été utilisée par N. ZAMFIRESCU et J. FONSECA [25] (1991) pour déterminer le risque des obligations portugaises à taux variable, dont le taux de référence est administré, et par N. ZAMFIRESCU [23] (1997) dans le cas du taux de change $-DM sur données intra-day.

12. Voir aussi dans des conditions plus générales D. LEPINGLE et J. MÉMIN [16] (1978).

La suite T_k^i est la suite de temps de saut de N_i, $i = 1, 2$ et $T_k^i - T_{k-1}^i$ est une variable aléatoire de loi de Poisson d'intensité $(\lambda_i(T_{k-1}^i))$ [13].

Remarque 1. Dans le cas où, d'une part, la dérive b_t et la volatilité σ_t de la partie continue dirigée par le brownien, ainsi que l'intensité λ_t de processus de Poisson, sont constantes et, d'autre part, $1 + \varphi(T_k)$, où $\varphi(T_k)$ est la taille du saut, suit une loi lognormale, le processus X_t suit lui-même un processus lognormal.

Remarque 2. Le processus X_t est càd-làg. Autrement dit ses trajectoires sont continues à droite et possèdent une limite à gauche (Les points de discontinuité correspondant aux moments de saut (rares et imprévisibles) sont dus à des facteurs exogènes au système).

Remarque 3. La condition $1 + \varphi_i > 0$ nous assure que X est une martingale locale positive.

En fait, ce qui nous intéresse dans les études appliquées aux données de marché est que sous ces hypothèses X est une semi-martingale et possède la propriété de permettre, en théorie, l'estimation des paramètres à partir d'une seule trajectoire des réalisations de X.

De nombreux travaux ont porté sur l'estimation des paramètres sous des hypothèses supplémentaires concernant b_t, σ_t, λ_t et φ_t (*e. g.* M. SORENSEN [2] (1990), J. E. HUTTON et P. I. NELSON [10] (1986), K. AASE, P. GUTTORP [1] (1987), L. COUTIN [8] (1994) et XIAO LAN ZHANG (1996).

Sous ces diverses hypothèses, les estimateurs de maximum vraisemblance (ou de quasi-vraisemblance) utilisés dans ces cas sont efficaces (ou asymptotiquement) efficaces.

Il est très important de noter ici que si les hypothèses faites, par les différents auteurs, sur les paramètres de la partie continue [14] et ceux de la partie discontinue [15] diffèrent, deux hypothèses clés leur sont néanmoins communes (ou du moins s'y ramènent) pour déduire les estimateurs et leurs propriétés :

H 1. La partie continue de X est séparable de sa partie discontinue ;

H 2. σ^2 (ou $\sigma\sigma^*$ dans le cas multidimensionnel) peut être calculé sur tout intervalle fini à partir d'une seule trajectoire avec une probabilité 1 (propriété de la variance quadratique).

---

13. Le fait que $\tilde{N}_{i,t}$, donné par (1), soit une F_t-martingale implique que, pour tout s, $0 \leq s \leq t$, $E(N_t - N_s|F_s) = E(\int_s^t \lambda_u du|F_s)$. Ceci permet, par exemple, de penser à l'intensité $\lambda_{1,t}$ de $N_{1,t}$ comme étant la probabilité conditionnelle de l'occurrence des sauts positifs jusqu'à l'instant t, comptés par $N_{1,t}$, sachant l'historique des prix jusqu'à ce moment-là.

14. Pour XIAO LAN ZHANG, $b_t = b$ et $\sigma_t = \sigma > 0$ pour tout t.

15. Pour SORENSEN, le processus de saut est un processus de Poisson composé dont la taille des sauts suit un modèle exponentiel ; les tailles des sauts sont, pour XIAO LAN ZHANG, des variables aléatoires i. i. d., de carré intégrable, prenant des valeurs dans $]-1, \infty]$, alors que celles-ci sont F^N-prévisibles pour COUTIN.

Ces hypothèses impliquent que, dans la pratique, pour pouvoir extraire de la trajectoire observée sa partie continue, on doit avoir un moyen fiable, ou du moins statistiquement efficace, pour détecter les sauts du processus. (De telles méthodes peuvent être trouvées dans COUTIN (1994), BITO (1987), FONSECA et ZAMFIRESCU (1991), ARBULU, G. HALLAIS-HAMONNO et ZAMFIRESCU (1998).[16])

Cette méthode est essentiellement basée sur les deux résultats suivants, R 1 et R 2, bien connus maintenant (donnés ci-dessous).

Notons[17] par $Y = \ln X$.

Remarque. En toute rigueur, nous devrions considérer plutôt le processus $\mathrm{d}\, X_t / X_{t-}$, ce que nous ne ferons pas ici en nous appuyant sur le lemme de Ito pour les semi-martingales, IKEDA et WATANABE (1981) ou pour une formule explicite dans le cas Diffusion-Poisson, JEANBLANC-PICQUÉ et PONTIER (1990), SORENSEN (1991) et FONSECA et ZAMFIRESCU (1990).

Alors les résultats R 1 et R 2 sont les suivants :

R 1. Sur $[0, t]$, la variation quadratique de Y (crochet droit),

$$\sum_{t=1}^{t} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2 \tag{5}$$

converge en probabilité, uniformément vers

$$\int_0^t \sigma_u^2 \, \mathrm{d}u + \sum_{0 \leqslant u \leqslant t} \varphi_u \varphi_u^* \tag{6}$$

quand le pas de la subdivision[18] de $[0, t]$ tend vers 0.

R 2. La "variance" instantanée $V(Y_t)$ de Y_t définie à partir du crochet conditionnel ou oblique, donnée par

$$V(Y_t) = \lim_{h \to \infty} \left(\frac{1}{h} E (Y_{t+h} - Y_t)^2 / F_t \right) \tag{7}$$

est égale à $\sigma_t^2 + \Sigma_{i=1}^2 \varphi_i^2(t) \lambda_i(t)$.

---

16. « *Faut-il se fier aux conclusions des tests sur données financières et plus particulièrement aux conclusions des tests de normalité ? Une retombée d'une étude menée sur les cours boursiers des actions françaises de 1802 à 1993* », communications au Congrès international de l'AFFI, Lille, 2 juillet 1998 (soumis à publication).

17. Il est intéressant de noter ici (*cf.* JENKINS et PRIESTLEY (1957), PRIESTLEY (1988)) que la transformation par le logarithme a un effet stabilisateur des estimateurs des variances dans le cas des séries temporelles. Plus particulièrement, cet effet stabilisateur de la variance de la densité estimée du spectre est utilisé dans le test de la stationnarité.

18. $t_i = it2^{-n}$ $1 \leqslant i \leqslant 2^n$ dans SORENSEN (1991) et AASE (1987).

Remarque 1. L'utilisation dans la pratique de la variance de la série revient en fait véritablement à considérer comme estimateur de la volatilité le crochet oblique (conditionnel) sur $[0,t]$.

Remarque 2. En fait la propriété R 1 est vraie sous des hypothèses plus générales sur Y_t (*cf.* LEPINGLE et MÉMIN (1978)). Plus précisément, soit Y une martingale locale càd-làg, localement de carré intégrable. Alors Y admet une décomposition unique, $Y = Y^c + Y^d$, en une martingale locale continue Y^c et une somme compensée de sauts en 0. La variation quadratique de Y est le processus

$$[Y,Y]_t = \langle Y^c, Y^c \rangle_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta M_s^2, \tag{8}$$

où $\Delta M_s = Y_s - Y_{s-}$.

Si on discrétise l'intervalle $[0,t]$ par des subdivisions de pas tendant vers 0, on sait alors que $[Y,Y]_t$ est la limite en probabilité des sommes
$Y_0^2 + \sum_{i=1}^{n} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})^2$
représentant les variations quadratiques des surmartingales discrètes de même valeur initiale Y_0.

Ajoutons enfin ici seulement que les propriétés des estimateurs des paramètres, dans le cas où X n'est observé qu'à des instants discrets (ce qui est le cas pour le taux \$-Leu), sont plus difficiles à montrer (*cf.* COUTIN (1994)) que dans le cas où X est observé en continu (hypothèse faite par AASE (1987), SORENSEN (1991)) et étudié par ZAMFIRESCU (1996) sur le cours de change \$-DM.

On suppose dorénavant que l'on peut séparer la partie continue de la partie saut et on va s'intéresser au processus partie continue Y^c de Y.

1.2 Volatilité stochastique à deux états de la Diffusion

Comme nous l'avons justifié dans l'introduction, nous supposons que la volatilité varie au cours du temps comme une fonction en escalier sur $[0,T]$, prenant deux valeurs distinctes σ_1 et σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$) avec une probabilité λ et $1-\lambda$. Ecrivons alors l'équation différentielle stochastique vérifiée par Y_t^c sous la forme

$$\mathrm{d}Y_t^c = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t \qquad Y^c(0) = 0 \qquad t \in [0,T] \tag{9}$$

Notons par :

$$f(T) = T^{-1} \int_0^T \sigma_t^2 \mathrm{d}t \tag{10}$$

et remarquons que sous la filtration naturelle de Y_t^c

$$\sigma_t^2 = \lim_{h\to 0} \frac{E\left[(X_{t+h}^c - X_t^c)^2 / F_t\right]}{h} \tag{11}$$

Subdivisons l'intervalle $[0,T]$ en sous-intervalles disjoints $I_k, k = 1,2,\cdots,n$, sur lesquels σ prend les valeurs constantes σ_1 ou σ_2 de sorte que :

$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n = [0,T] \tag{12}$$

et notons $\Delta_1 = \cup_{j \in J_1} I_j$ et $\Delta_2 = \cup_{j \in J_2} I_j$ la réunion des intervalles où σ_t est égale à σ_1 et à σ_2 respectivement.

La relation (10) précédente devient alors :

$$f(T) = T^{-1}\left[\sigma_1^2 \int_{\Delta_1} \mathrm{d}\, t + \sigma_2^2 \int_{\Delta_2} \mathrm{d}t\right] \tag{13}$$

Soit τ la longueur totale des intervalles dont la réunion est Δ_2. En fait τ est une variable aléatoire représentant la durée pendant laquelle on observe une agitation de la cotation du taux de change. En notant $\Sigma_\tau = (T-\tau)\sigma_1^2 + \tau\sigma_2^2$, nous pouvons donner, à des fins de couverture (comme dans M. BRANCOVAN, T. DEHAPIOT et N. ZAMFIRESCU (1992) :

- la formule explicite d'un call européen en fonction de cette durée :

$$C(S,r,\tau,T) = S \cdot N\left[\frac{\ln \dfrac{S}{Ke^{-rT}}}{\sigma_\tau} + 2^{-1}\sqrt{\Sigma_\tau}\right] - Ke^{-r\tau} N\left[\frac{\ln \dfrac{S}{Ke^{-rT}}}{\sqrt{\Sigma_\tau}} - 2^{-1}\sqrt{\Sigma_\tau}\right] \tag{14}$$

  où r est le taux de l'actif sans risque sur $[0,T]$, S est le prix de l'actif sous-jacent, K est le prix d'exercice, N est la fonction de répartition de la loi normale,

- les propriétés de croissance, de convexité, concavité et la formule explicite de la sensibilité du call par rapport à la durée totale de perturbation de σ :

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} \sqrt{\frac{KS}{2\pi\Sigma_\tau}} \exp\left[-2^{-1} \frac{(\ln \dfrac{S}{Ke^{-rT}})^2}{\Sigma_\tau} + \frac{\Sigma_\tau}{4} + rT\right] \tag{15}$$

Remarque 1. Pour que la formule donnant la valeur du call soit applicable sur le marché, il faut donner sur des bases statistiques (voir par exemple GHYSELS, GOURIÉROUX et JASIAK (1998), dans "Actes du Congrès international en Finance" de l'AFFI, n° 9746, Lille, 2 juillet 1998), voire même empiriques, la loi de distribution de τ (donc de Σ_τ qui aura alors pour espérance $E(\Sigma_\tau) = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)E(\tau) + \sigma_1^2 T$ et pour variance $\mathrm{Var}\big(\Sigma(\tau)\big) = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2)^2 \mathrm{Var}(\tau)$).

Si une telle loi est donnée[19], alors on peut donner la valeur du call $\overline{C}$ en fonction uniquement de S, r, et T :

$$\overline{C}(S,r,T) = E\big(C(S,T,\tau)\big) = \int_0^T C(S,T,u)\mathrm{d}F_\tau(u) \tag{16}$$

19. Voir aussi S. HERZEL, *A simple model for option pricing with jumping stochastic volatility*, à paraître.

où F est la fonction cumulative de la variable aléatoire τ.

L'inégalité de JENSEN permet alors de comparer la valeur de $\overline{C}(S,r,T)$ et $C(S,r,\tau,T)$.

Remarque 2. Ce modèle simple de volatilité stochastique à deux états a permis d'obtenir, comme on aurait pu s'en douter, le même effet de "smile" de la volatilité implicite et de biais par rapport au prix donné par BLACK et SCHOLES que celui obtenu par J. HULL et A. WHITE (1987) qui supposent que σ^2 est gouverné par l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mu\sigma^2\,\mathrm{d}\,t + \xi\sigma^2\mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

Revenons à Y^c et à l'équation différentielle stochastique gouvernant son évolution :

$$\mathrm{d}\,Y_t^c = \mu_t\,\mathrm{d}\,\sigma + \sigma_t\,\mathrm{d}\,W_t. \tag{18}$$

Faisons alors l'hypothèse que la tendance, donnée par la dérive μ_t, ne prend elle aussi que deux valeurs : μ_1 quand $\sigma_t = \sigma_1$ et μ_2 quand $\sigma_t = \sigma_2$.

En intégrant alors sur un pas suffisamment petit (par exemple, la seconde pour un processus observé en continu comme le \$-DM et, pour un processus observé à des instants discrets – ici le jour pour le \$-Leu – le pas d'observation), on a alors :

$$Y_{t+1}^c - Y_t^c = \int_t^{t+1} \mu_s\,\mathrm{d}\,s + \int_t^{t+1} \sigma_s\,\mathrm{d}W_s \tag{19}$$

Sous l'hypothèse faite précédemment que σ et μ sont constantes sur Δ_1 et sur Δ_2 respectivement, il ressort que :

$$Y_{t+1}^c - Y_t^c = \begin{cases} \mu_1 + \sigma_1\,[W_{t+1} - W_t] & \text{si } [t,t+1] \in \Delta_1 \\ \mu_2 + \sigma_2\,[W_{t+1} - W_t] & \text{si } [t,t+1] \in \Delta_2 \end{cases} \tag{20}$$

Puisque Y_t^c est un processus à accroissements indépendants, en utilisant les propriétés des lois conditionnelles, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} P[Y_{t+1}^c - Y_t^c \le x] &= P\,[Y_{t+1}^c - Y_t^c \le x/\sigma_t = \sigma_1] \cdot P(\sigma_t = \sigma_1) \\ &\quad + P\,[Y_{t+1}^c - Y_t^c \le x/\sigma_t = \sigma_2] \cdot P(\sigma_t = \sigma_2) \\ &= \lambda \cdot N(\mu_1, \sigma_1, x) + (1-\lambda) \cdot N(\mu_2, \sigma_2, x) \end{aligned} \tag{21}$$

où :

$$N(\mu,\sigma,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\mathrm{d}x \tag{22}$$

Par conséquent la variable $Y_{t+1}^c - Y_t^c$ suit un mélange de lois normales (tirage avec une probabilité λ et $1-\lambda$ parmi les lois normales d'espérances μ_1 et μ_2 et de variances σ_1^2 et σ_2^2 respectivement).

2. Estimation des paramètres λ, μ_1, μ_2, σ_1, σ_2

Les problèmes posés par l'estimation des paramètres d'un mélange de lois normales (ou de tout autre mélange d'ailleurs du type $\frac{\lambda}{\sigma_1} f(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}) + \frac{1-\lambda}{\sigma_2} f(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})$ où f est une fonction densité telle que $f(0) \neq 0$) sont bien connus.

En effet pour ce type de mélange la fonction de Maximum de Vraisemblance (EMV[20]) n'existe pas. Néanmoins les solutions efficientes des équations de vraisemblance existent et on peut donc obtenir des estimateurs asymptotiquement efficients[21].

Dès lors, les méthodes utilisant la minimisation quadratique ou la méthode du maximum de vraisemblance peuvent mener à des estimateurs inconsistants. Ceci est principalement dû au fait que la matrice des dérivées secondes de la fonction de log-vraisemblance est singulière.

Une des approches pour déterminer les estimateurs consistants de ces paramètres est la méthode des cinq moments, qui consiste à égaler les cinq premiers moments théoriques du mélange de lois aux cinq moments empiriques calculés à partir de la série des valeurs observées. Malheureusement cette méthode est lourde et présente le désavantage de donner un poids égal aux cinq moments.

La méthode que nous allons présenter s'inspire largement de celle de R. E. QUANDT et J. B. RAMSEY [21] (1978) (Q&R), des travaux de C. CHILĂRESCU [7] (1992), ainsi que des commentaires portés sur l'article de Q&R par HARTLEY, HOSMER, BINDER, FOWLKER, BRYANT, HEATHCOTE, JOHNSON et plus particulièrement de KIEFER (*cf.* article de Q&R, pp. 738 à 750), et enfin de la réponse faite à ces commentaires par QUANDT et RAMSEY.

Notre méthode, qui généralise celle de Q&R, a la même propriété remarquée par KIEFER d'utiliser l'information contenue dans tous les moments, et de donner aux premiers moments des poids plus importants qu'aux moments d'ordre supérieur.

L'idée essentielle de la méthode est de minimiser la distance entre la fonction génératrice des moments théoriques ($FGMT$) et la fonction génératrice des moments empiriques ($FGME$).

Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ la série d'observations. La ($FGME$) est donc définie par :

$$y_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\theta \cdot x_i} \tag{23}$$

Si on suppose que la série d'observations fait partie d'une population qui suit un mélange de deux lois gaussiennes, alors la ($FGMT$) est définie par :

---

20. MLE : Maximum Likelihood Estimator, en anglais.

21. *Cf.* E. L. LEHMANN, *Theory of Point Estimation*, Chapman & Hall, 1983.

$$G(\lambda,\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2,\theta)=\lambda\cdot e^{\mu_1\cdot\theta+\frac{\sigma_1^2\cdot\theta^2}{2}}+(1-\lambda)\cdot e^{\mu_2\cdot\theta+\frac{\sigma_2^2\cdot\theta^2}{2}} \qquad (24)$$

Soit $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N$ une suite des valeurs de θ pour lesquelles on définit la fonction distance :

$$F(\lambda,\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2)=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\theta_j\cdot x_i}-\lambda\cdot e^{\mu_1\cdot\theta_j+\frac{\sigma_1^2\cdot\theta_j^2}{2}}-(1-\lambda)\cdot e^{\mu_2\cdot\theta_j+\frac{\sigma_2^2\cdot\theta_j^2}{2}}\right]^2 \qquad (25)$$

Notons : $\gamma=(\lambda,\mu_1,\sigma_1,\mu_2,\sigma_2)^*$. Nous pouvons alors écrire :

$$F(\gamma)=\sum_{j=1}^{N}\left[y_n(\theta_j)-G(\gamma,\theta_j)\right]^2 \qquad (26)$$

où :

$$y_n(\theta_j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\theta_j\cdot x_i} \qquad (27)$$

En dérivant par rapport à chaque variable, les cinq équations normales sont :

$$h_k(\gamma)=\sum_{j=1}^{N}\left[y_n(\theta_j)-G(\gamma,\theta_j)\right]\frac{\partial G(\gamma,\theta_j)}{\partial\gamma_k}=0 \qquad (28)$$

où $k=1,2,\cdots,5$. Le système ci-dessus est alors résolu par la méthode des approximations successives et après des calculs qui ne sont pas présentés ici, nous obtenons la solution suivante :

$$\gamma^{m+1}=\gamma^m-\left[H(\gamma^m)\right]^{-1}\cdot h(\gamma^m) \qquad (29)$$

où γ^m est l'approximation d'ordre m et

$$\left[H(\gamma^m)\right]_{i,j}=\sum_{k=1}^{N}\left[-\frac{\partial G}{\partial\gamma_i}\cdot\frac{\partial G}{\partial\gamma_j}+\varepsilon\cdot\frac{\partial G^2}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}\right](\gamma^m,\theta_k)^{22} \qquad (30)$$

Cette prise en compte des dérivées de second ordre amène une amélioration en ce qui concerne la rapidité de convergence et la stabilité des solutions.

---

22. Dans l'article de R. E. QUANDT et G. B. RAMSEY

$$\left[H(\gamma^m)\right]_{i,j}=\sum_{k=1}^{N}\left[-\frac{\partial G}{\partial\gamma_i}\cdot\frac{\partial G}{\partial\gamma_j}\right](\gamma^m,\theta_k) \qquad (30bis)$$

ne tient pas compte des dérivées partielles de second ordre.

3. Conclusion

On peut pour commencer parler des quelques insuffisances de la méthode statistique (prise séparément) d'estimation des paramètres et présentée dans la section ci-dessus.
Comme dans le cas de la méthode Q&R, cette méthode :

1. même avec l'amélioration apportée, reste sensible au choix des θ_i et de leur nombre ;
2. reste sensible aux valeurs de départ d'initialisation ;
3. amène aussi dans certains cas, lors de l'application de l'algorithme, des sorties de la zone permise des paramètres estimés de la variance ($\sigma_i^2 < 0$).

Nous n'avons pas testé cette méthode quant à sa robustesse. Toutefois, la combinaison entre le modèle stochastique retenu, Saut-Diffusion avec volatilité stochastique à deux états, et la méthode d'estimation des paramètres du mélange de lois normales de la distribution de Y^c a donné, à chaque fois dans des études sur données de marché (taux de change $-Leu et $-DM), une adéquation satisfaisante entre la distribution observée et la distribution théorique (cf. figures annexées).

D'autre part, la séparation de la trajectoire continue de la partie sauts, effectuée à l'aide des variances glissantes et justifiée de façon théorique, nous a permis d'obtenir une adéquation nettement meilleure entre la distribution théorique du mélange de loi et la distribution observée. En effet, comme dans le cas de certaines études menées à l'aide de modèles de type ARCH, le mélange de lois normales n'arrive pas à expliquer toute le leptokurtosis de la distribution observée sur données brutes *cf.* JORION (1988).

Pour soutenir de façon concrète et visuelle ces affirmations, nous donnons à la fin de cet article quelques tableaux et graphiques significatifs.

Mettons un point final à cet article avec une devinette :

Quelle est la loi des processus dont les distributions observées sont tracées page 75 ?

Figure 1.
Distribution observée des différences des Log des cours de change $-Leu (1992-97)

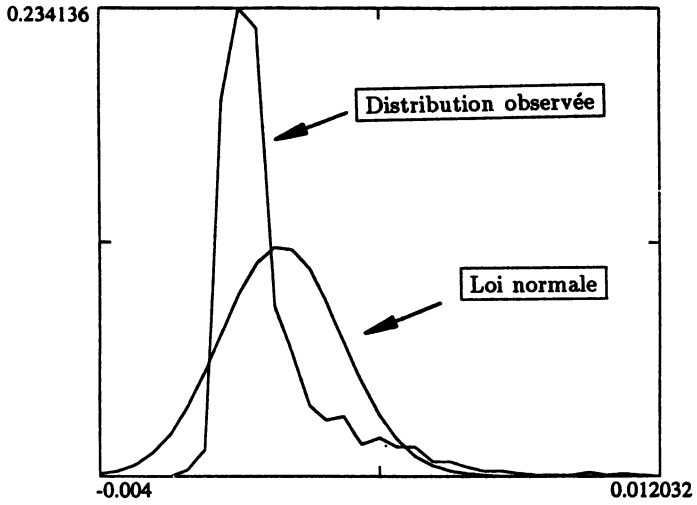


Figure 2.
Distribution observée des cours de change $-DM (Telerate 10 h à 12 h)

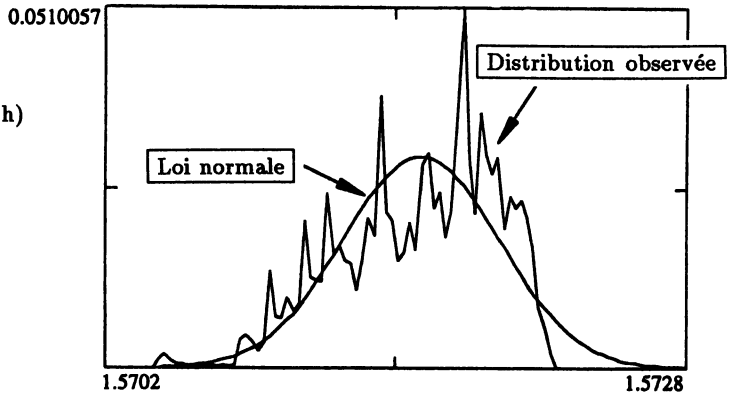
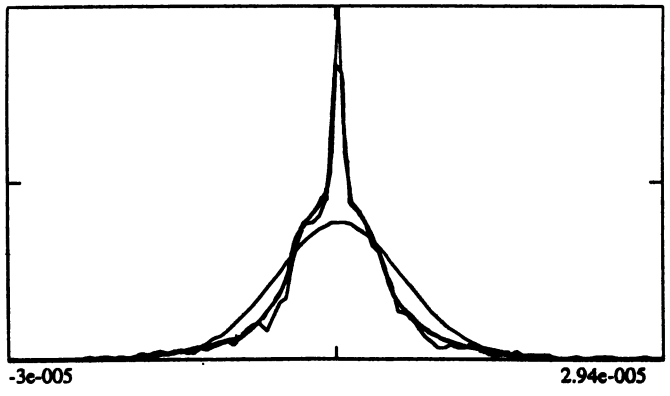


Figure 3.
Distribution observée des différences des Log des cours de change $-DM (10 h à 12 h)



RÉPONSE EN ANNEXE 1 et 2
où l'on montre le rejet de la "loi normale" et la procédure d'ajustement, quand cela est possible, à l'aide d'un mélange de "lois normales".

1. ANNEXES STATISTIQUES

1. Taux de change $-Leu de 1992 à 1997 (données quotidiennes)

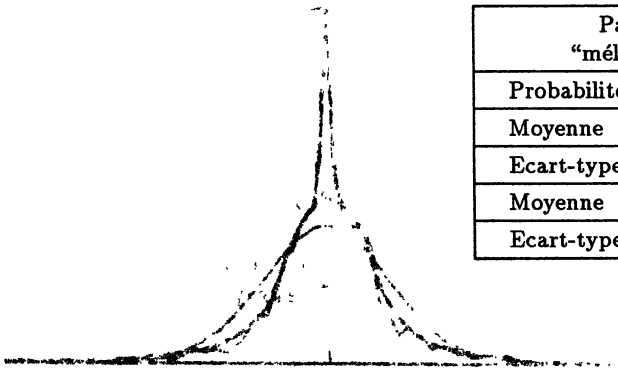
Source B.N.R.

Nombre de données	**1372**	
Différences Log Cours	Données brutes	Partie continue
Minimum	-0,00154547	-0,00120119
Maximum	0,13075	0,01199978
Moyenne	0,0017774	0,001116637
Ecart type annualisé	7,22%	2,27%
Skewness SK	2,3627	1,4149
Kurtosis (normalisée) K	7,0502	1,7786
Statistique de Jarque et Bera*	4118	639

	Probabilité de se tromper en rejetant l'hypothèse de lois normales**	
Test de Jarque et Bera	"0"	"0"

* Statistique de Jarque et Bera : T=1372* $\left((SK^2)/6 + (K^2)/24\right)$.

** La statistique T suit une loi du $CHI2$ à deux degrés de liberté.
Seuils de rejet : 5,99 pour 5 % et 13,8 pour 0,1 %.



Paramètres estimés du "mélange de lois normales"		
Probabilité de tirage	λ	0,45
Moyenne	μ_1	0,0001
Ecart-type	σ_1	0,00045
Moyenne	μ_2	0,002
Ecart-type	σ_2	0,0017

Figure 4
Mélange de lois normales estimé

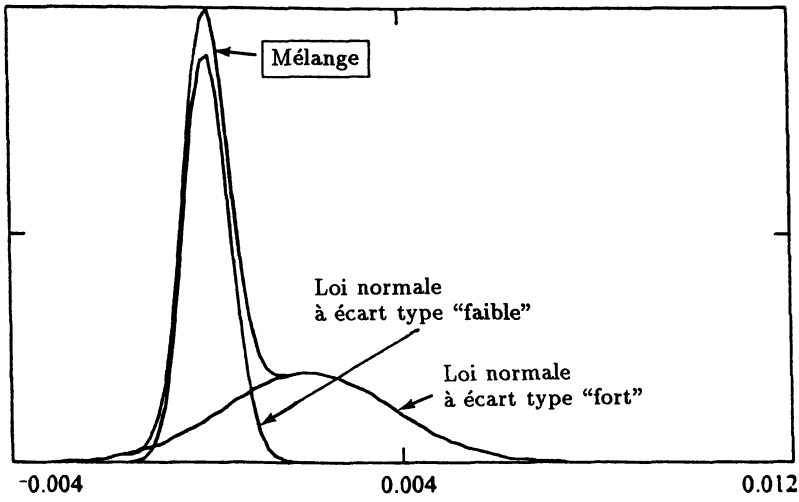
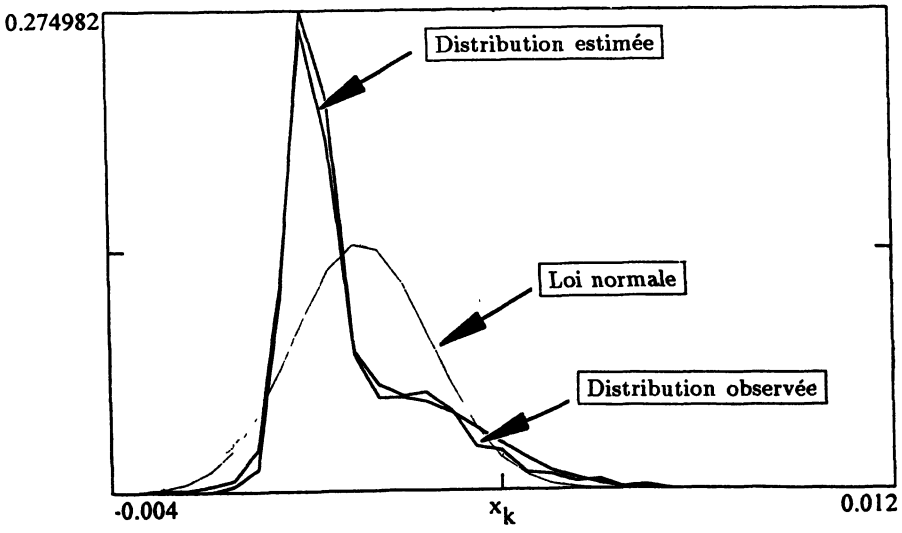


Figure 5
Adéquation des distributions
observée et théorique



Visualisation de la procédure d'optimisation

NOTATIONS

F_k distribution observée

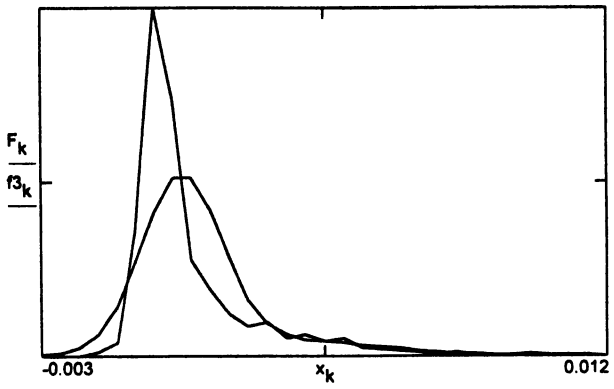
fi_k distribution de la loi normale $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1$ et 2.

$f3_k$ distribution de la loi mélange $\lambda\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1) + (1-\lambda)\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$

σ_ϵ écart-type de l'erreur d'approximation.

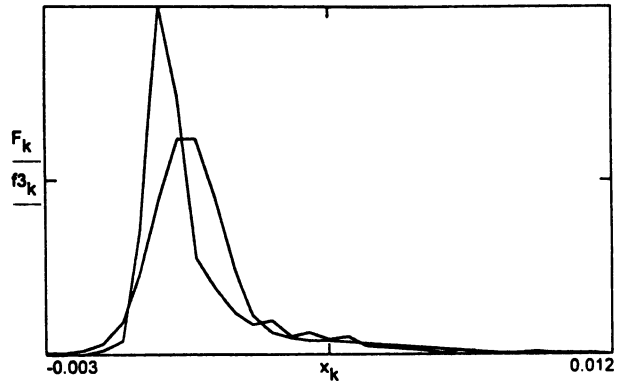
ETAPE 1

$\mu_1 = 0,0007$
$\mu_2 = 0,0034$
$\lambda = 17,95\,\%$
$\sigma_1 = 0,0011$
$\sigma_2 = 0,0026$
$\sigma_\epsilon = 0,0505$



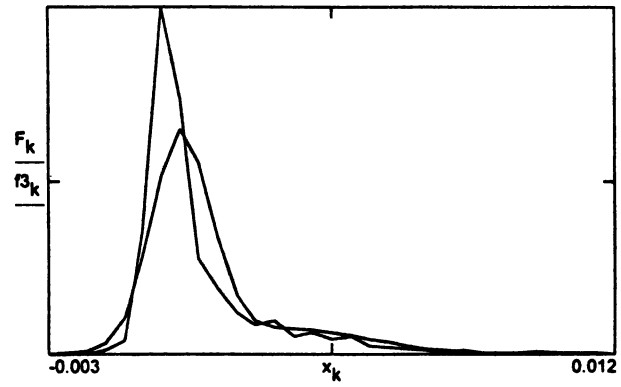
ETAPE 2

$\mu_1 = 0,0073$
$\mu_2 = 0,0033$
$\lambda = 18,22\,\%$
$\sigma_1 = 0,00086$
$\sigma_2 = 0,0028$
$\sigma_\epsilon = 0,0013$



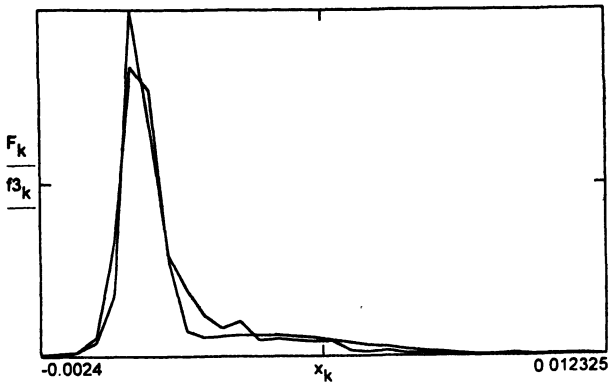
ETAPE 3

$\mu_1 = 0,0052$
$\mu_2 = 0,0032$
$\lambda = 25,20\,\%$
$\sigma_1 = 0,00079$
$\sigma_2 = 0,0022$
$\sigma_\epsilon = 3,1e-004$



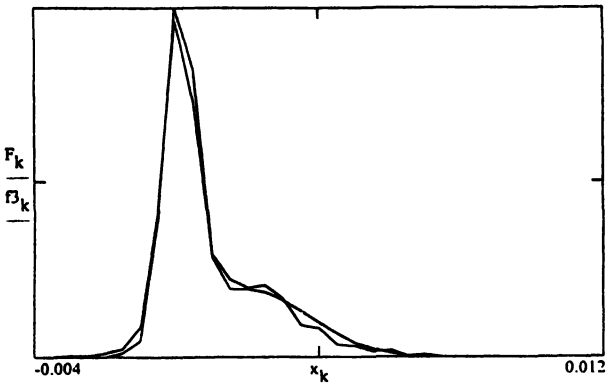
ETAPE 4

$\mu_1 = 0,00017$
$\mu_2 = 0,0033$
$\lambda = 28,30\,\%$
$\sigma_1 = 0,00046$
$\sigma_2 = 0,0025$
$\sigma_\epsilon = 4,6e-005$

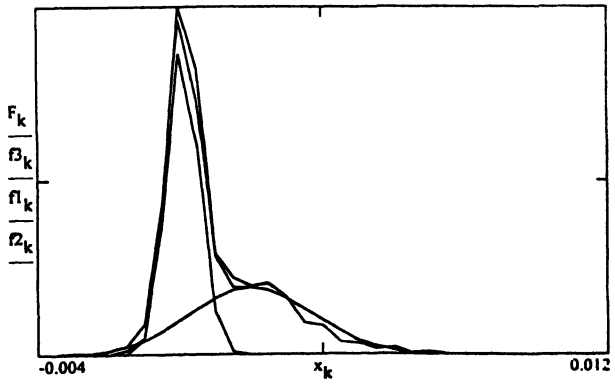


ETAPE 7

$\mu_1 = 0,0001$
$\mu_2 = 0,002$
$\lambda = 44,60\,\%$
$\sigma_1 = 0,00045$
$\sigma_2 = 0,0017$
$\sigma_\epsilon = 1,6e-007$



Distribution observée et distribution mélange théorique



2. Taux de change $-DM enregistré en continu

(à partir du serveur TELERATE)*

Nombre de données	**7200** de 10 h à 12 h - pas d'une seconde	
	Cours	Différence Log cours
Minimum	1,57041	-2,99 e-005
Maximum	1,57201	2,94 e-005
Moyenne	1,57433	4,43 e-008
Ecart type	2,778 e-004	5,73 e-006
Skewness SK	-0,52326	0,0423
Kurtosis (normalisée)K	-0,40544	-0,2576
Statistique de Jarque et Bera*	378	22

	Probabilité de se tromper en rejetant l'hypothèse de normalité	
Test de Jarque et Bera	"0"	largement inférieure à 0,1 %

	Paramètres du "mélange de lois normales" pour les cours	pour les rentabilités
Probabilité de tirage λ	0,5	0,45
Moyenne μ_1	1,57112	1,1 e-007
Ecart type σ_1	0,000217	6,37 e-006
Moyenne μ_2	1,57154	2,01 e-008
Ecart type σ_2	0,000134	3,71 e-006
Test F au seuil de 1 %	rejet	rejet
Test CHI2 d'adéquation des distributions théorique et observée	CHI2(95)=245,8 (large) REJET au seuil de 0,1 %	CHI2(95)=102,16 NON REJET sauf à prendre un risque supérieur à 30 %

** On a effectué les mêmes estimations et tests, sur la même période, sur des données enregistrées en simultané sur* REUTER. *On a trouvé une volatilité globale et des variances du mélange de lois normales différentes (statistiquement). Sachant que le taux de change £-DM est côté de gré à gré et que les prix affichés sur les serveurs sont ceux de leurs contributeurs, on peut être amené à conclure que les paramètres calculés sur données affichées ne sont pas ceux du taux de change (signal inconnu) mais ceux des contributeurs (réponse bruitée). (Problème typique du filtrage).*

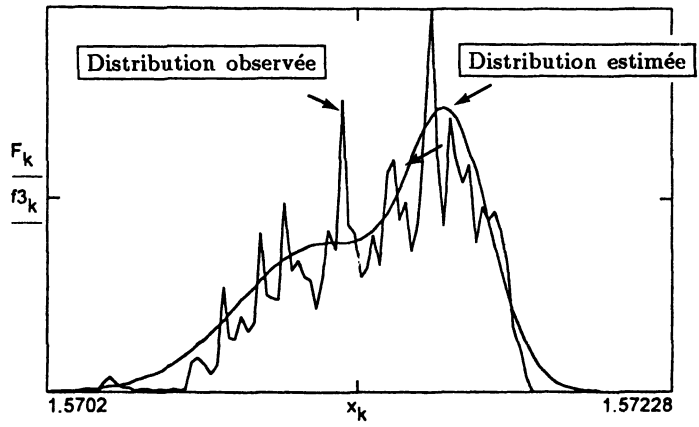


Figure 12. Distribution observée du cours de change $-DM (Telerate 10 h à 12 h)

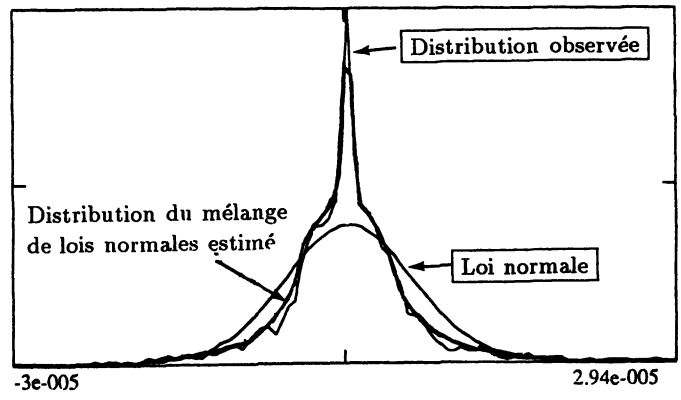
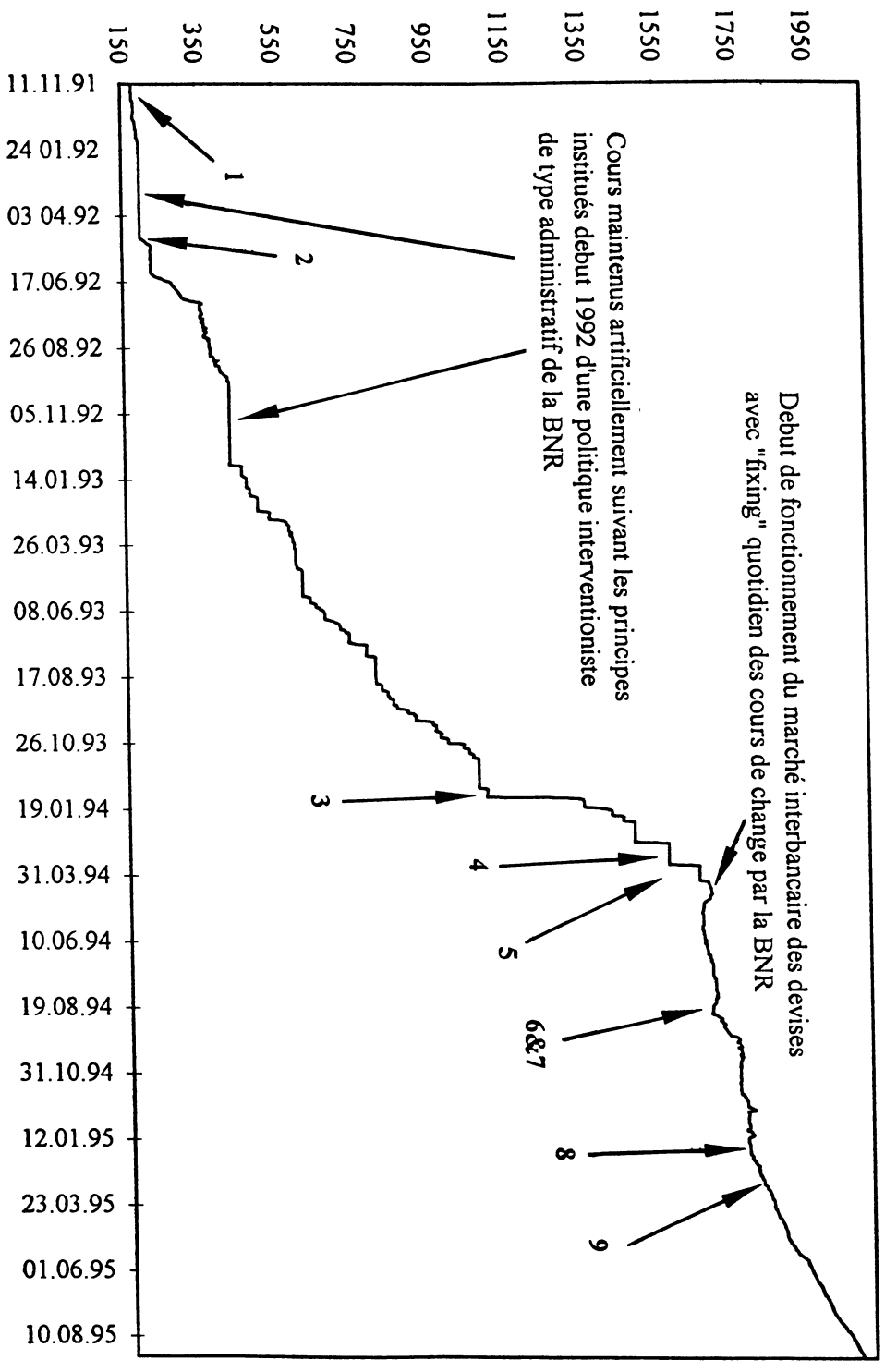


Figure 13. Distribution observée et théorique des différences des Log des cours de change $-DM (Telerate 10 h à 12 h)


150
350
550
750
950
1150
1350
1550
1750
1950
11.11.91
24 01.92
03 04.92
17.06.92
26 08.92
05.11.92
14.01.93
26.03.93
08.06.93
17.08.93
26.10.93
19.01.94
31.03.94
10.06.94
19.08.94
31.10.94
12.01.95
23.03.95
01.06.95
10.08.95
Cours maintenus artificiellement suivant les principes instigués debut 1992 d'une politique interventioniste de type administratif de la BNR
Debut de fonctionnement du marché interbancaire des devises avec "fixing" quotidien des cours de change par la BNR
1
2
3
4
5
6&7
8
9

2. ANNEXE HISTORIQUE

Historique des événements de politique financière ayant entraîné des sauts du cours de change $-Leu

Source : Cahiers de la Banque Nationale de Roumanie (BNR)

1. Novembre 1991
- Institution d'un nouveau régime de change et de convertibilité limitée.
- Elimination de la multiplicité des cours de change pratiqués par type de produits dans les transactions.
- Mise en place, par la BNR, d'un nouveau mode de détermination de cours de change par licitation quotidienne.

2. Mai 1992
- Apport d'une correction importante au mécanisme mis en place en novembre 91 : octroi aux agents économiques du droit de garder les encaissements en devises.

3. Décembre 1993
- Nouveau règlement sur les réserves obligatoires des sociétés bancaires (la principale modification porte sur l'inclusion des passifs en devises dans la base de calcul de ces réserves).

  Note. La forte augmentation des réserves obligatoires a été décidée à la suite de la prolifération des crédits en devises contractés par les sociétés, prolifération que l'on peut mettre sur le compte de la réaction des opérateurs de marché vis-à-vis de la politique monétaire restrictive pratiquée par la BNR. Ce fort endettement en devises a induit un dysfonctionnement du mécanisme de marché et a eu pour effet une réduction des transactions, une altération des signaux relatifs à la demande réelle en devises et un retard dans la dépréciation "normale « de la monnaie nationale roumaine. Une conséquence de cette situation a été la brusque dévaluation du *Leu* par rapport au *Dollar* qui s'en est suivie en janvier 1994.

  Il est intéressant de même de noter ici, qu'à cette époque, la BNR, devant les dysfonctionnements introduits par les emprunts massifs en devises, a eu pour intention l'interdiction totale de ceux-ci. Mais devant la pression concertée des organismes bancaires et des sociétés commerciales et industrielles roumaines, la BNR a dû se résoudre finalement à renoncer à cette mesure. Par contre, pour limiter les emprunts en devises, la BNR a utilisé comme instrument indirect de limitation des crédits en devises la majoration de façon notable des réserves obligatoires, réduisant ainsi la quantité de devises disponibles sur marché.

4. Mars 1994
- Simplification des normes et du mode de fonctionnement des licitations en vue de la création d'un marché interbancaire de devises.
- Libéralisation *de facto* du mécanisme de formation de cours de change.

5. Avril 1994

- Approbation par la BNR des normes régissant l'utilisation des chèques, des billets à ordre et des créances (y compris celles en devises).

6. Août 1994

- Adoption d'un nouveau règlement concernant les opérations en devises. Mise en place d'un système de marché interbancaire de devises adoptant les règles internationales existant dans ce domaine.

  Note.A partir de cette date, les cours de change sont déterminés par négociations entre banques et clients sur la base de l'offre et de la demande. Les cotations sont enregistrées pratiquement en continu et peuvent porter sur les transactions spot ou à terme. La BNR procède dès lors, en fin de journée, au fixing des cours de référence de devises, calculé comme la moyenne des cours spot des transactions quotidiennes transmis par les banques.

7. Septembre 1994

- Autorisation donnée à toute les banques et personnes juridiques roumaines d'exercer la fonction de "dealer » sur le marché de devises.

8. Avril 1995

- Institution de la Caisse de compensations pour toutes les transactions papier, indifféremment de leur montant.
- Début officiel du marché monétaire interbancaire avec la publication par la BNR des "taux offerts à Bucarest« (BUBOR) et des taux de prise en pension (BUBID).
- Renonciation par la BNR de l'utilisation des cours de change comme levier anti-inflationniste. Néanmoins, cet abandon a eu pour effet, dans un premier temps, une intervention massive de la BNR sur le marché de devises pour maintenir une évolution "raisonnable » du cours de change. L'arrêt de cette intervention à partir du deuxième trimestre 1995 a finalement amené la libre détermination des cours de change en fonction des mécanismes de l'offre et de la demande.

9. Juin 1995

- Autorisation des sociétés bancaires et des personnes juridiques étrangères d'agir en tant que "dealer« sur le marché interbancaire des devises.
- Tensions sur le marché des devises dues à une croissance du décalage entre le fixing de la BNR et les cours des devises pratiqués par les maisons de change. Ce décalage a entraîné une segmentation du marché des devises et une suspicion quant aux valeurs réelles des cours, effets qui ne seront tangibles qu'à la fin 1995.

Références

[1] K. AASE AND P. GUTTORP (1987) "Estimation models for security prices", *Scandinavian Actuarial J.*, pp. 211-224.

[2] B. BAHRA (1996) "Probability distributions of future asset prices implied by option prices", *Bank of England Quarterly Bulletin*, pp 299-311.

[3] C. BITO. (1987) "Les options sur contrats futures. Introduction d'un processus de diffusion mixte et application aux devises", *Finance*, 9(2) :7-25.

[4] M. BOUTILLIER (1992) "Critique des processus de diffusion en finance : le cas des taux de change", *J. de la Société Statistique de Paris*, n°4 pp. 113-122.

[5] M. BRANCOVAN, T. DEHAPIOT, N. ZAMFIRESCU (1992) "Risque de volatilité et sensibilité d'une option à une perturbation aléatoire de la volatilité", *Approche Acuarielle des Risques Financiers, AFIR*, 3 :57-84.

[6] P. BRÉMAUD (1981) *Point processes and Queues. Martingale dynamics*, Springer Verlag.

[7] C. CHILARESCU (1992) "On the estimation of the parameters of a single equation in a complete system of stochastic equations", *Analele Universitatii de Vest Timisoara*, Vol. 15.

[8] L. COUTIN (1994) *Système càd-làg en observation incomplète : estimation des coefficients du modèle ; application du calcul des variations stochastiques à l'étude de la densité du filtre (existence, régularité, unicité)*, Thèse de doctorat.

[9] J. HULL and A. WHITE (1987) "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *The Journal of Finance*, 42(2) :pp. 281-300.

[10] J.E. HUTTON and P.I. NELSON (1986) "Quasi-Likelihood Estimation for Semi-Martingales", *Stoc. Proc. Appl.*, 22 : pp. 245-257.

[11] N. IKEDA and S. WATANABE (1981) *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North-Holland/ Kodansha.

[12] R. A. JARROW and E. R. ROSENFELD (1984) "Jump Risks and the Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Journal of Business*, pp. 337-351.

[13] M. JEANBLANC-PICQUÉ and M. PONTIER (1990) "Optimal Portfolio for a Small Investor in a Market Model with Discontinuous Prices", *Appl. Math Optim*, 22 : pp. 287-410.

[14] G.M. JENKINS and M.B. PRIESTLEY (1957) "The Spectral Analysis of Time Series", *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.*, 19 : pp. 1-12.

[15] P. JORION (1988) "On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets", *Review of Financial Studies*, pp 427-445.

[16] D. LEPINGLE and J. MÉMIN (1978) "Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, (42) : pp. 175-203.

[17] R. C. MERTON. (1973) "Theory of Rational Option Pricing", *Bell J. of Econom. and Management Sci.*, (4) : pp. 141-183.

[18] R. C. MERTON (1976) "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Bell J. of Financial Economics.*, (3) : pp. 125-144.

[19] R. C. MERTON (1990) *Continuous - Time Finance*, Basil Blackwell Oxford.

[20] M.B. PRIESTLEY (1988) *Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis*, Academic Press.

[21] R. E. QUANDT and J. B. RAMSEY (1978) "Estimating Mixtures of Normal Distributions and Switching Regressions", *Journal of the American Statistical Association,* (73) : pp. 730–752.

[22] Michael SORENSEN (1991) "Likelihood Methods for Diffusions with Jumps", *in N.U. PRABHU and I.V. BASAWA, editors*, Statistical Inference in Stochastic Processes, Probability : Pure and Applied, pp 67–105. Marcel Dekker, Inc.

[23] N. ZAMFIRESCU (1997) "Volatilité intra-day sur données en continu", *in Congrès "O Mercados de Produtos Derivatos : Situaçao Actual e Perspectivas"*, Porto, Portugal, 29 mai 1996.

[24] N. ZAMFIRESCU and C. CHILARESCU (1995) "Peut-on transposer les modèles d'évaluation des risques des marchés occidentaux au cas roumain ?", *Actes du Congrès de l'Association Internationale des Economistes de Langue Française, Bucarest.*

[25] N. ZAMFIRESCU and J. A. SOARES DA FONSECA (1991) "Une approche stochastique mixte du risque des obligations à coupon variable dont le taux de référence est administré – étude du marché obligataire portugais", *AFIR – Institute of Actuaries. Brighton, United Kingdom.*

[26] XIAO LAN ZHANG (1996) "Numerical analysis of american option pricing in a jump-diffusion model", *Processus à sauts, applications à la finance, 27 octobre 1996, Université d'Evry.*