JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

CHRISTOPHE VILLA

Application du modèle GARCH à l'évaluation des options MONEP

Journal de la société statistique de Paris, tome 137, n° 2 (1996), p. 51-68

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1996__137_2_51_0>

© Société de statistique de Paris, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

APPLICATION DU MODÈLE GARCH A L'EVALUATION DES OPTIONS MONEP[1]

Christophe VILLA
LARGOR, INSTITUT DE GESTION DE RENNES
DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES-I

RÉSUMÉ

Nous étudions l'évaluation des options à l'aide d'un modèle à volatilité stochastique qui apparaît comme limite, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, d'un processus GARCH(1,1) qui s'est avéré être très adapté pour la modélisation des prix des actifs financiers. Si la prime risque associée à la volatilité est nulle et si la volatilité et le cours de l'action ne sont pas corrélés, une solution approchée au prix d'une option d'achat européenne est dérivée en effectuant un développement en série de Taylor. Les résultats empiriques obtenus sur le MONEP (Marché des Options Négociables de Paris) plaident en faveur d'une telle modélisation par rapport à celle de BLACK et SCHOLES.

Mots Clés :
Evaluation des options, Modèle GARCH(1,1), Volatilité Stochastique.

1. Je tiens à remercier le Pr Patrick NAVATTE pour ses remarques constructives, ainsi qu'un rapporteur anonyme du *Journal.*

Introduction

La gestion des options implique le calcul de leur valeur théorique. Le modèle d'évaluation d'options le plus fréquemment utilisé est celui de BLACK et SCHOLES (1973). Ce modèle, dans sa version originelle, dérivé dans un contexte d'unanimité des investisseurs (risque-neutralité) en l'absence de profits d'arbitrage, souffre d'un certain nombre de critiques, notamment en ce qui concerne l'hypothèse selon laquelle le cours de l'action de base suit une loi lognormale avec une variance constante. Il semble, aujourd'hui, définitivement admis que la volatilité n'est ni une constante, ni une fonction déterministe du prix de l'action mais une variable aléatoire qui évolue dans le temps suivant un processus spécifique.

Les modèles à volatilité stochastique ont été introduits par HULL et WHITE [17] comme réponse aux critiques adressées au modèle de BLACK et SCHOLES [6]. En effet, ces modèles permettent de prendre en compte l'effet leptokurtique des distributions des rendements des actifs financiers (queues de distribution épaisses), mis en évidence par de nombreux travaux empiriques et apparaissent naturellement comme limite, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, de processus hétéroscédastiques qui se sont avérés être très adaptés pour la modélisation des prix des actifs financiers. Le développement des processus hétéroscédastiques se place dans le contexte et la lignée des modèles de séries chronologiques qui ont connu un succès important depuis plus de vingt ans. On compte actuellement de très nombreux articles sur ce sujet[2]. Plusieurs modèles ont été proposés afin de décrire le processus suivi par la volatilité, le plus populaire restant le modèle GARCH(1,1) (Generalised Auto-Regressive Conditional Heteroscedastic) de BOLLERSLEV [7], qui généralise la modélisation ARCH de ENGLE [12] en introduisant les volatilités passées comme variables explicatives des carrés des volatilités. Plusieurs études (CHOU [10], DAY et LEWIS [11], LAMOUREUX et LASTRAPES [19], etc.) ont montré qu'un tel modèle semble bien décrire le comportement de la volatilité. Un autre avantage du modèle GARCH(1,1) est sa convergence, prouvée par NELSON [22], vers un modèle à volatilité stochastique quand l'intervalle de temps séparant deux observations tend vers zéro.

Cet article est organisé comme suit :

La première partie analyse les problèmes théoriques liés à l'évaluation des options dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique. La seconde partie est consacrée à l'estimation des paramètres du processus GARCH(1,1) pour trois sociétés : Lafarge Coppée, Peugeot et Thomson ainsi qu'à l'étude de la pertinence d'une telle modélisation sur l'évaluation d'options MONEP en comparant ces résultats à ceux issus de l'application du modèle de BLACK et SCHOLES.

2. Voir à ce sujet la revue de la littérature faite par BOLLERSLEV, CHOU & KRONER [8].

I. L'évaluation des options dans le cadre d'un modèle à Volatilité Stochastique

Contrairement aux modèles ARCH, les modèles à volatilité stochastique introduisent un aléa supplémentaire qui génère le processus de volatilité. Ceci a des conséquences sur l'évaluation des options dans ce cadre. En effet, l'incomplétude du marché dans un modèle à volatilité stochastique implique que le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage ne permet pas d'identifier une unique probabilité neutre au risque (et donc un système de prix unique) mais un ensemble de systèmes de prix admissibles associés à une infinité de primes de risque.

I.1 Le modèle à Volatilité Stochastique

En dépit de son mérite, le modèle de BLACK et SCHOLES, utilisé pour évaluer des options européennes sur action ne versant pas de dividende, souffre d'un certain nombre de critiques, et notamment le fait que le rendement instantané du cours de l'action sous-jacente possède une distribution gaussienne dont la variance est constante. L'abandon de cette hypothèse nous conduit à considérer la variance comme une deuxième variable d'état et ainsi à proposer le processus de diffusion bivarié $\big(S(t), \sigma(t)\big)$ suivant :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dZ(t) \\ d\sigma^2(t) = \kappa\big(\vartheta - \sigma^2(t)\big)dt + \gamma\sigma^2(t)dW(t) \end{cases}$$

où $B = \big(Z, W\big)'$ est un Brownien standard bidimensionnel[3] défini sur un espace de probabilité (Ω, F, P). On note $\mathrm{F}(t)$ la tribu engendrée par les trajectoires de B jusqu'en t. On travaille en horizon fini, c'est-à-dire pour $t \in [0, T]$. Ce modèle est la généralisation naturelle du célèbre modèle de BLACK et SCHOLES [6] dans lequel la volatilité était supposée constante. De plus, il sera supposé comme dans le cadre d'analyse retenu par BLACK et SCHOLES que le taux d'intérêt sans risque r, est constant.

Lorsque κ et ϑ sont positifs, le processus de diffusion suivi par $\sigma^2(t)$ possède plusieurs propriétés empiriquement pertinentes :

- Ce processus montre une version en temps continu d'un processus GARCH (1,1) qui s'est avéré être adapté à la modélisation des prix des actifs financiers.
- La variance chemine aléatoirement autour de la variance à long terme ϑ. A partir de la partie anticipée (i.e. $\kappa\big(\vartheta - \sigma^2(t)\big)dt$), nous pouvons

3. Plusieurs études empiriques ont généralement trouvé de très imprécis estimateurs du coefficient de corrélation entre Z et W, et l'hypothèse d'un coefficient de corrélation égal à zéro ne peut pas être rejeté (Voir par exemple SCOTT [31], CHESNEY et SCOTT [9]).

constater qu'il est escompté que plus la variance $\sigma^2(t)$ diverge de la variance normale ϑ, plus elle a de chance de retourner dans le voisinage de la variance normale. Le paramètre κ désigne la vitesse de cet ajustement.

- La partie non anticipée $\left(\gamma\sigma^2(t)dW(t)\right)$ caractérise le terme d'erreur hétéroscédastique qui est proportionnel à la variance. Autrement dit, la variance du changement instantané de $\sigma^2(t)$ est proportionnelle à $\sigma^4(t)$ (i.e. $\mathrm{Var}\left(d\sigma^2(t)\right) = \gamma^2\sigma^4(t)dt$). Cette propriété est compatible avec l'observation empirique : les volatilités ont été plus fluctuantes dans les périodes de volatilités élevées.
- La variance nulle constitue une barrière réfléchissante naturelle. Lorsque $\sigma^2(t)$ est nulle, $d\sigma^2(t) = \kappa\vartheta dt$ est toujours positif et $\sigma^2(t)$ aura ensuite une valeur positive. Il s'ensuit que si la variance a initialement une valeur non négative, ce processus assure que l'on ne rencontre pas ultérieurement de valeurs négatives pour les variances.

I.2 La formule d'évaluation

Nous savons définir et caractériser l'absence d'opportunités d'arbitrage (notée AOA) sur un marché d'actifs financiers. L'AOA équivaut à l'existence d'une mesure de probabilité Q sur (Ω, F) équivalente[4] à P, et sous laquelle les prix actualisés de chaque actif sont des Q-martingales, le passage de P à Q se définissant par la dérivée de RADON-NICODYM :

$$(1.2) \quad M(t) = E_P\left[\frac{dQ}{dP} \mid F(t)\right] = \exp\left\{-\int_o^t \lambda'(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_o^t \lambda'(u)\lambda(u)du\right\},$$

où $\lambda = \left(\lambda^z, \lambda^w\right)'$ est un processus adapté borné. Les processus λ^z et λ^w peuvent être interprétés comme la prime de risque associée respectivement aux deux sources d'aléas Z et W. Du fait que, sous la probabilité Q, les prix actualisés du cours de l'action sont des martingales, nous obtenons :

$$(1.3) \qquad \lambda^z(t)\sigma(t) = \mu - r,$$

où r est le taux d'intérêt sans risque supposé constant. Comme l'action représentée par S est le seul actif négocié, les primes de risque λ^z et λ^w ne peuvent être fixées par la dernière relation, ce qui justifie que la probabilité Q n'est pas unique. L'unicité d'une telle probabilité neutre au risque n'est assurée que dans un contexte de marché complet caractérisé par le fait que le nombre d'actifs échangés est supérieur ou égal au nombre de sources d'aléa dans le modèle.

Doit-on considérer la volatilité comme un facteur de risque systématique, qui serait donc rémunéré par le marché, ou, au contraire, comme un facteur

4. Deux mesures de probabilité sont équivalentes si elles possèdent les mêmes ensembles de mesure nulle.

de risque diversifiable auquel n'est associé aucune prime de risque ? Dans ce qui suit, nous supposerons que le prix de marché unitaire du risque de volatilité est nul (i.e. $\lambda^w = 0$). Bien sûr, une telle hypothèse n'a qu'une faible justification théorique et peut être critiquée d'un point de vue empirique, mais elle est néanmoins justifiée par HULL et WHITE qui, reconnaissant que des arguments d'équilibre sont nécessaires, supposent que la prime de risque associée à la volatilité est nulle sous l'hypothèse d'une volatilité non corrélée avec la consommation globale (la volatilité possède un risque systématique nul), ou, dans le cadre plus classique du modèle d'évaluation d'actif qu'est le CAPM, que le risque de volatilité est diversifiable.

Enfin, d'après le théorème de GIRSANOV, le processus $\widetilde{B} = \left(\widetilde{Z}, \widetilde{W}\right)'$ défini par :

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{cases} \widetilde{Z}(t) & = Z(t) + \int_0^t \lambda^z(u)du \\ \widetilde{W}(t) & = W(t) \end{cases}$$

est un mouvement Brownien bidimensionnel sous Q.

Considérons une option d'achat européenne d'échéance T et de prix d'exercice K. Le prix de l'option est donnée par :

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{aligned} C(t) &= e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t^Q\left[\left(S(T)-K\right)^+\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t^Q\left[\mathrm{E}_t^Q\left[\left(S(T)-K\right)^+ \mid \{\sigma(u), t \leqslant u \leqslant T\}\right]\right], \end{aligned}$$

où $\mathrm{E}_t^Q(\cdot) = \mathrm{E}^Q\left(\cdot \mid F(t)\right)$ est l'opérateur d'espérance conditionnelle sous la probabilité Q. Soit la variance moyenne définie par l'intégrale suivante :

$$\text{(1.6)} \qquad \overline{V}(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(s)ds$$

alors, conditionnellement à la trajectoire de volatilité $\left\{\sigma(u), t \leqslant u \leqslant T\right\}$ et à $\mathrm{F}(t)$, la distribution, sous Q, de $\ln\left(S(T)/S(t)\right)$ est normale de moyenne $\left(r - \frac{1}{2}\overline{V}(t,T)\right)(T-t)$ et de variance $\overline{V}(t,T)(T-t)$.

Nous pouvons donc écrire que :

$$\text{(1.7)} \quad e^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t^Q\left[\left(S(T)-K\right)^+ \mid \left\{\sigma(u), t \leqslant u \leqslant T\right\}\right] = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

avec

- $d_1 = \dfrac{\ln\left(S(t)/K\right) + \left(r + \frac{1}{2}\overline{V}(t,T)\right)(T-t)}{\sqrt{(T-t)\,\overline{V}(t,T)}}$,
- $d_2 = d_1 - \sqrt{(T-t)\overline{V}(t,T)}$,
- $\Phi(\cdot)$ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Ainsi, le prix de l'option s'exprime comme l'espérance sous Q de la formule de BLACK et SCHOLES avec une volatilité égale à $\sqrt{\overline{V}(t,T)}$:

$$C(t) = \mathrm{E}_t^Q\left[C_{BS}\left(\sqrt{\overline{V}(t,T)}\right)\right] \tag{1.8}$$

où l'espérance est considérée sous la distribution de probabilité Q de la variance moyenne, $\overline{V}(t,T)$, conditionnellement à la variance instantanée, $\sigma^2(t)$. Comme la prime de risque associée à la volatilité est supposée nulle, cette distribution de probabilité est la même sous Q et sous P. Nous obtenons donc la formule d'évaluation d'options de HULL et WHITE [17] :

$$C(t) = \mathrm{E}_t^P\left[C_{BS}\left(\sqrt{\overline{V}(t,T)}\right)\right] \tag{1.9}$$

Cette expression n'est que quasi explicite puisqu'elle apparaît sous la forme de l'espérance mathématique d'une fonction de la volatilité future. Le calcul de l'espérance est alors la dernière difficulté à résoudre afin d'obtenir le prix de cette option, dans le cadre qui nous intéresse.

Il existe différentes méthodes pour résoudre ce problème :

- SCOTT [30], CHESNEY et SCOTT [9] et SCOTT [31] proposent l'utilisation d'une méthode purement numérique comme la méthode de Monte-Carlo,
- HULL et WHITE [17] emploient une technique d'approximation fondée sur un développement en série de Taylor,
- STEIN et STEIN [32], quant à eux, développent une approche analytique fondée sur une méthode d'inversion de Fourrier.

De ces trois approches, la méthode numérique est la plus générale mais, malheureusement, elle est aussi la plus "gourmande" en temps de calcul. Les approches de HULL et WHITE [17] et de STEIN et STEIN [32] sont en réalité très liées. En effet, elles dépendent de la distribution de la variance moyenne de l'action sous-jacente. Si un choix doit être effectué entre ces deux méthodes, BALL et ROMA [5] suggèrent l'utilisation de celle proposée par HULL et WHITE car elle représente le meilleur compromis entre temps de calcul et qualité de l'approximation. L'équation (1.9) peut se réécrire de la façon suivante[5] :

$$C = \mathrm{E}\left[C_{BS}\left(\sqrt{\overline{V}}\right)\right] = \int_{\overline{V}} C_{BS}\left(\overline{V}\right) f\left(\overline{V} \mid V = \sigma^2\right) d\overline{V} \tag{1.10}$$

5. Les notations ont été allégées pour plus de lisibilité.

où $f(\cdot)$ est la densité de probabilité sous P de la variance moyenne, $\overline{V}$, conditionnellement à la variance instantanée, $V = \sigma^2$. Connaître la densité de probabilité, $f(\cdot)$, est la clef de l'évaluation d'une option d'achat européenne quand la volatilité est stochastique. Malheureusement, dans le cadre de notre modèle, cette distribution est difficile à obtenir. Un calcul approché de l'intégrale est conduit en effectuant un développement en série de Taylor à l'ordre deux[6] de $C_{BS}(\cdot)$ en sa valeur espérée, $\mathrm{E}(\overline{V})$:

$$(1.11)\qquad C_{BS}(\overline{V}) \approx C_{BS}\Big(\mathrm{E}(\overline{V})\Big) + \frac{\partial C_{BS}\Big(\mathrm{E}(\overline{V})\Big)}{\partial \overline{V}}\Big(\overline{V} - \mathrm{E}(\overline{V})\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{BS}\big(\mathrm{E}(\overline{V})\big)}{\partial \overline{V}^2}\Big(\overline{V} - \mathrm{E}(\overline{V})\Big)^2 + \ldots .$$

En remplaçant dans l'équation (1.10), nous trouvons :

$$(1.12)\qquad C \approx S\Phi(d_1^*) - Ke^{-rT}\Phi(d_2^*) + \frac{1}{2}\frac{S\sqrt{T}\Phi'(d_1^*)(d_1^* d_2^* - 1)}{4\big(\mathrm{E}(\overline{V})\big)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{Var}\,(\overline{V})$$

où :

- $d_1^* = \dfrac{\ln(S/K) + \big(r + E[\overline{V}]/2\big)T}{\sqrt{E[\overline{V}]T}}$,
- $d_2^* = d_1^* - \sqrt{E[\overline{V}]T}$.

Par intégration directe sous l'opérateur d'espérance, le calcul complet des moments d'ordre 1 et 2 de la variance moyenne a pu être effectué, les résultats sont donnés par[7] :

$$(1.13)\qquad \mathrm{E}[\overline{V}] = \vartheta + (V_0 - \vartheta)\Gamma$$

$$(1.14)\qquad \mathrm{Var}[\overline{V}] = 2\left(V_0^2 + 2V_0\frac{\kappa\vartheta}{\beta} + 2\frac{(\kappa\vartheta)^2}{\alpha\beta}\right)\cdot\left(\frac{\kappa e^{\alpha T} + \alpha e^{-\kappa T} - \beta}{\kappa\alpha\beta T^2}\right) + 2\frac{(\vartheta\gamma)^2}{\kappa\alpha T}(\Gamma - 1) + 4\frac{\vartheta\gamma^2}{\kappa\beta T}(V_0 - \vartheta)(e^{-\kappa T} - \Gamma) - (V_0 - \vartheta)^2\Gamma^2$$

6. D'après Ball et Roma [5], il semble préférable d'effectuer un développement en série de Taylor à l'ordre deux pour une approximation plus simple du prix de l'option, et dans la majorité des cas, plus précise. En effet, à l'instar de Hull et White, cette étude révèle des instabilités potentielles lorsque l'on effectue un développement en série de Taylor à l'ordre trois.

7. Les détails de cette dérivation sont disponibles sur demande auprès de l'auteur.

où :

- $\Gamma = \dfrac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa T}$,
- $\alpha = \gamma^2 - 2\kappa$,
- $\beta = \gamma^2 - \kappa$.

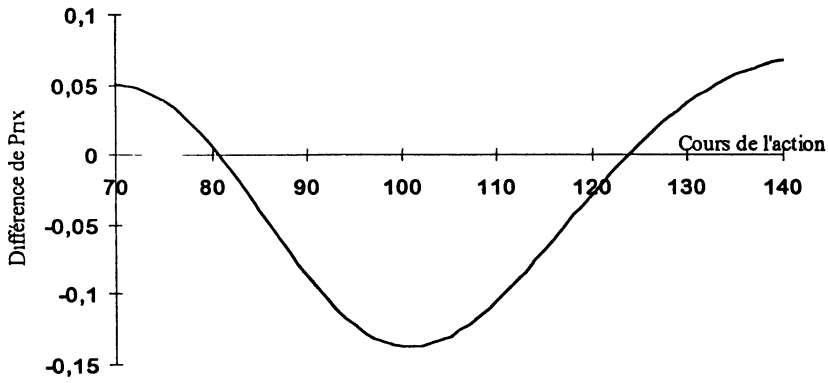
En définitive, si la prime risque associée à la volatilité est nulle et si la volatilité et le cours de l'action ne sont pas corrélés, une solution approchée au modèle à volatilité stochastique peut être dérivée.

La figure 1 fournit le prix d'une option avec le modèle à volatilité stochastique moins la valeur de BLACK et SCHOLES pour les paramètres suivants :
$V_0 = 0.09, \kappa = 4, \vartheta = 0.09$ et $\gamma = 1.5$.
Les calculs sont effectués pour différents cours de l'action sous-jacente étant donné $r = 0$, $K = 100$ et une maturité de six mois.

Dans le cas où la volatilité et les rendements de l'action ne sont pas corrélés, la figure 1 nous permet de dire que la formule de BLACK et SCHOLES a tendance à surévaluer les options qui sont à parité ou proches de la monnaie, et à sous-évaluer les options qui sont très en dedans ou très en dehors de la monnaie.

FIGURE 1

Comparaison du modèle à Volatilité Stochastique et du modèle de Black et Scholes.



En conclusion de cette première partie, il apparaît, au vu de notre simulation que les modèles d'évaluation d'options à volatilité stochastique permettent d'affiner les résultats du modèle de BLACK et SCHOLES, et doivent permettre d'éviter certaines erreurs d'évaluation que commet systématiquement ce dernier. Il est donc indispensable de réaliser une étude empirique pour permettre de déterminer les paramètres du processus stochastique que suit la volatilité afin de mesurer l'apport de ces modèles en matière d'évaluation d'options.

II. La mise en œuvre du modèle à Volatilité Stochastique

Le but poursuivi est de mettre en relief l'apport du modèle à volatilité stochastique, présenté dans la première partie de cet article, en matière d'évaluation, et ceci par rapport aux prix calculés à partir de la formule de BLACK et SCHOLES. Afin de tester l'intérêt de cette proposition, il est nécessaire d'estimer les paramètres de la seconde équation du système (1.1). Cependant, l'estimation des paramètres du processus de volatilité est compliquée par l'inobservabilité de cette variable d'état. Les méthodes d'estimation apparues dans la littérature sont fondées sur des observations du prix de l'actif de base. Les travaux de ce type utilisent différentes méthodes statistiques fondées sur une discrétisation du processus à volatilité stochastique de type ARCH. Le recours aux processus ARCH afin d'estimer les paramètres du modèle à volatilité stochastique est justifié par NELSON et FOSTER [25] par le fait que ces modèles sont, d'une part, très utilisés dans la pratique et, d'autre part, plus rapides en temps de calcul que des filtres non linéaires standard.

II.1 L'estimation des paramètres du processus de volatilité

L'abandon de l'hypothèse traditionnelle d'homoscédasticité des résidus par ENGLE [12] est aujourd'hui considéré comme un apport majeur de l'économétrie moderne. Plus précisément, les processus hétéroscédastiques vont au-delà du modèle log-normal usuel qui stipule entre autres l'invariance de la volatilité au cours du temps. Dans le cadre du modèle GARCH, la volatilité à chaque instant dépend de la volatilité à différents instants du passé et des chocs également passés sur la rentabilité. Ce principe conduit à une réactivité de la volatilité aux chocs : elle croît lorsqu'un décalage vient d'avoir lieu mais il implique également au travers des termes auto-régressifs (le plus souvent positif proche de 1) une certaine persistance de la volatilité, c'est-à-dire que les périodes de calme sur le marché tendent à suivre les périodes de calme alors que les lendemains de journées agitées le sont aussi. Or tout intervenant sur le marché sait que la succession de périodes de troubles et de périodes paisibles est une des caractéristiques principales des marchés financiers, le fait de le traduire explicitement étant sans doute l'un des mérites de ces modèles.

La spécification d'un modèle GARCH(p,q) est la suivante :

$$(2.1)\quad \begin{cases} r_t = \bar{r} + \varepsilon_t \\ \mathrm{E}(\varepsilon_t \,|\, \mathrm{F}_{t-1}) = 0 \text{ et } \mathrm{Var}(\varepsilon_t \,|\, \mathrm{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \end{cases}$$

avec r_t la rentabilité en t et F_{t-1} l'information disponible en $t-1$. On constate que la variance conditionnelle s'écrit comme une somme de trois termes :

- Le premier terme représente un seuil de variance minimal en deçà duquel la variance conditionnelle ne descend pas.

• Le second terme est une somme de résidus, ε_t, au carré qui traduit bien l'impact des chocs sur la volatilité. Lorsqu'un krach intervient à l'instant t, la valeur de la rentabilité est très différente de sa moyenne et ainsi le résidu est très grand. Le carré de ce même résidu intervenant dans la variance, le choc de l'instant t est bien transmis à cette mesure du risque à partir de l'instant $t+1$.

• Enfin, la troisième contribution est une somme de variances récentes qui a pour effet de modéliser une certaine persistance de la volatilité. Là encore le phénomène est simple, si la volatilité à l'instant t est faible, sa contribution dans la variance conditionnelle en $t+1$ le sera également, ce qui accentue la probabilité d'une variance faible que seuls des chocs pourraient compenser.

Nos données sont issues de la base de données AFFI. Notre échantillon est composé de cours quotidiens d'actions pour trois sociétés françaises (Lafarge Coppée, Peugeot et Thomson) pour la période du 4 janvier 1988 au 31 juillet 1990 qui couvre 637 jours de calendrier. Les rentabilités quotidiennes sont calculées sur la base du cours d'ouverture de chaque séance, corrigés pour les différentes opérations sur le capital qui ont pu avoir lieu sur la période d'étude. Un modèle GARCH(1,1) avec effet de translation a été ajusté sur les rentabilités :

$$r_t = \bar{r} + \varepsilon_t \tag{2.2}$$

$$\sigma^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{2.3}$$

où $r_t = \ln\left(S_t / S_{t-1}\right)$ représente la rentabilité quotidienne.
$\bar{r} = E\left[r_t \mid F_{t-1}\right]$, la moyenne conditionnelle à l'information en $t-1$, représentée par F_{t-1}. $\sigma_t^2 = E\left[\varepsilon_t^2 \mid F_{t-1}\right]$, la variance conditionnelle à F_{t-1} et ε_t un terme d'innovation. La composante prévisible de la volatilité est fonction de l'innovation passée ε_{t-1} et de la volatilité passée σ_{t-1}. Le paramètre α s'interprète comme l'ampleur du choc alors que β est un indicateur de persistance. De plus, le processus est stationnaire si la somme des coefficients $\alpha+\beta$ est inférieure à un. Ceci implique que la volatilité tend à retourner vers sa valeur moyenne sur longue période. Ce modèle a été estimé à partir du logiciel TSP 4.2 grâce à la théorie standard du maximum de vraisemblance. En supposant la normalité conditionnelle, la log-vraisemblance est donnée, hormis les conditions initiales, par :

$$\log L = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log\sigma_t^2 + \varepsilon_t^2/\sigma_t^2\right]. \tag{2.3}$$

L'estimation des paramètres de ce modèle est présentée dans le tableau 1 : Les valeurs obtenues sont tout à fait comparables à celles que l'on observe sur d'autres séries financières avec notamment la prépondérance du paramètre bêta indiquant une forte persistance de la volatilité. La valeur du terme constant, $\bar{r}$, qui s'interprète comme la moyenne conditionnelle des rentabilités

est significativement différente de zéro, ce qui conduit à rejeter l'hypothèse de marche aléatoire des valeurs des actions associées à ces rentabilités. Surtout, nous notons une hétéroscédasticité conditionnelle significative. Celle-ci est telle que la somme des deux coefficients α et β, égale respectivement à 0.909733, 0.870906 et 0.953788, est proche de 1, et donc conforme à la condition limite nécessaire pour observer la stationnarité faible.

TABLEAU 1

Estimation du modèle GARCH(1,1)

Sociétés	$\bar{r}$ (t-stat)	ω (t stat)	α (t stat)	β (t stat)	L
Lafarge Coppée	0.893649E-03 (1 22361)	0.276249E-04 (3 06045)	0.076013 (3 32497)	0 833720 (17 9471)	1686 16
Peugeot	0.132410E-03 (0 196391)	0.475683E-04 (3 95707)	0.172589 (6 43463)	0 698317 (14 2455)	1647 66
Thomson	-0.447037E-03 (-0 486478)	0.222740E-04 (3 15474)	0.020956 (3 73407)	0.932832 (54 5973)	1491 72

NELSON [22] a montré que si l'intervalle de temps séparant deux observations tendait vers zéro, le modèle GARCH(1,1) convergeait vers le processus de diffusion défini dans la première partie :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(t)S(t)dZ(t) \tag{2.4}$$

$$d\sigma^2(t) = \kappa\big(\vartheta - \sigma^2(t)\big)dt + \gamma\sigma^2(t)dW(t) \tag{2.5}$$

Il apparaît clairement que l'équation (2.3) constitue la discrétisation de (2.4), où $\bar{r}$ approxime μ. Pour montrer comment l'équation (2.2) coïncide avec l'équation (2.5), posons $\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 z_t^2$ où z_t^2 possède une moyenne nulle et une variance égale à un, la variance conditionnelle peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2 = \big(\omega - (1-\alpha-\beta)\,\sigma_{t-1}^2\big) + \alpha\sigma_{t-1}^2(z_{t-1}^2 - 1)\,. \tag{2.6}$$

Cette expression est proche de l'équation de diffusion (2.5), où le terme $\omega - (1-\alpha-\beta)\sigma_{t-1}^2$ approxime $\kappa\big(\vartheta - \sigma^2(t)\big)dt$ et où α converge vers $\gamma\sqrt{dt/2}$.

Finalement, les paramètres du processus stochastique de la variance instantanée sont estimés comme suit $\Delta t = 1/250$, 250 étant le nombre de jours de cotations dans une année) :

$$\kappa = \frac{1-(\alpha+\beta)}{\Delta t}\,,\ \kappa\vartheta = \frac{\omega}{\Delta t} \text{ et } \gamma = \alpha\cdot\sqrt{\frac{2}{\Delta t}}\,. \tag{2.7}$$

Le tableau 2 présente le résultat de ces estimations.

TABLEAU 2

Paramètres estimés du modèle à volatilité stochastique

Sociétés	κ	ϑ^*	γ
Lafarge Coppée	22.56675	0.0765088	1.6997024
Peugeot	32.2735	0.0921195	3.8592074
Thomson	11.553	0.120499	0.4685904

*La variance de long terme est fournie en données actualisées.

Le paramètre ϑ représente la valeur à long terme, vers laquelle converge la variance et κ traduit le coefficient d'ajustement ou la force de rappel. En d'autres termes, la "tendance" de la volatilité instantanée la conduit à régresser vers sa valeur "normale" ϑ observée sur une longue période avec une force κ proportionnelle à l'écart qui l'en sépare. De plus, ce processus est conforme à l'hypothèse intuitive selon laquelle la volatilité fluctue davantage lorsque les volatilités se situent à un niveau élevé : on constate en effet que la variance de $V = \sigma^2, \gamma^2 V^2$, est proportionnelle au niveau de V.

II.2 Les résultats empiriques obtenus sur le MONEP

Nos données sont composées de prix quotidiens d'options MONEP et ont été collectées à partir de la base de données AFFI. Notre étude porte sur la période allant du 1er août 1990 au 27 décembre de la même année. Il est important de noter que les options MONEP sont des options américaines. Nous avons donc écarté les options pour lesquelles une possibilité d'exercice prématuré (avant la date d'échéance) était présente. De plus, les options dont la valeur était inférieure à 1 franc et/ou les options dont le nombre de contrats échangés était inférieur à 10 ont aussi été écartées des données. Enfin, le nombre d'options cotées sur lequel l'étude a porté est de 1186, soit 347 cours d'options pour Lafarge Coppée, 589 pour Peugeot et 250 pour Thomson.

Nous utilisons à la fois le modèle de BLACK et SCHOLES et le modèle à volatilité stochastique précédemment décrit afin de calculer des prix d'options d'achat européennes[8].

Afin de calculer la volatilité initiale pour le modèle de BLACK et SCHOLES et le modèle à volatilité stochastique, nous utilisons la méthode de la volatilité

8. En l'absence de distribution de dividendes une option d'achat américaine a la même valeur qu'une option d'achat européenne.

implicite. En effet, de nombreuses études (DAY et LEWIS [11], GRAR et MANAÏ [15], etc.) ont montré qu'elle fournit une meilleure prévision de la volatilité future d'une action que la volatilité historique. Cette méthode utilise l'algorithme de NEWTON-RAPHSON et consiste à estimer la volatilité future à partir des données les plus récentes disponibles sur un marché, c'est-à-dire à partir des prix courants des options[9].

SCOTT [30], SCOTT [31] et CHESNEY et SCOTT [9] proposent d'utiliser des options à parité puis de chercher la valeur de la volatilité qui minimise l'erreur quadratique entre le prix observé des options sur le marché et leur prix théorique. Le nombre d'options échangé quotidiennement sur le MONEP étant limité, nous préférons utiliser une autre méthode d'estimation. La procédure d'estimation de la volatilité implicite est alors la suivante : on donne à σ une valeur initiale, puis on cherche, par itérations successives, la valeur de la volatilité qui minimise la différence entre le prix observé de l'option sur le marché et son prix théorique. De plus, un poids relativement plus important est attribué aux options dont les prix sont les plus sensibles aux variations de la volatilité. La volatilité implicite moyenne calculée selon cette méthode est égale à :

$$\sigma = \frac{\sum \omega_i \sigma_i}{\sum \omega_i} \tag{2.8}$$

où $\omega_i = \partial C_i / \partial \sigma_i$ représente le poids[10] de la volatilité implicite calculé à partir du call i.

Il semble, selon notre étude empirique, qu'un modèle à volatilité stochastique permette d'améliorer le modèle de BLACK et SCHOLES. En effet, les prix des options obtenus lors de notre étude avec un modèle à volatilité stochastique sont plus proches des prix du marché que dans le cas du modèle de BLACK et SCHOLES.
Le tableau 3 (page suivante) présente les résultats de cette étude.

Par rapport au modèle de BLACK et SCHOLES, l'erreur absolue moyenne (MAE) et l'erreur quadratique moyenne (RMSE) sont inférieures dans le cas d'un modèle à volatilité stochastique pour nos trois sociétés. Il convient d'expliciter ces premiers résultats.

9. Les prix d'option de la date t sont utilisés afin de calculer la volatilité pour le jour d'après.

10. Les détails du calcul du véga dans le cadre du modèle à volatilité stochastique sont disponibles sur demande auprès de l'auteur.

TABLEAU 3

Comparaison des deux modèles

Sociétés	Nombre d'options	MAE		RMSE	
		BS	VS	BS	VS
Lafarge Coppée	347	2.1939	1.8213	3.1654	2.5426
Peugeot	589	2.5366	2.3645	3.6486	3.2037
Thomson	250	0.8386	0.8126	1.2390	1.1434
Total	1186	2.0784	1.8785	3.1411	2.6952

Notes : BS : Modèle de BLACK et SCHOLES, VS : Modèle à Volatilité Stochastique

Dans les tableaux 4 et 5, nous présentons deux tests de régression standard pour l'analyse des biais d'évaluation dans le cadre du modèle de BLACK et SCHOLES et du modèle à volatilité stochastique. Le tableau 4 présente les résultats de la régression pour le biais lié au prix d'exercice. Le tableau 5 présente les résultats de la régression pour le biais lié à la maturité. Le pourcentage d'erreur d'évaluation est donné par :

$$\varepsilon_{i,t} = \frac{M_i(t) - C_i(t)}{C_i(t)}$$

où M_i est le prix de l'option i donné par le marché et C_i est le prix théorique de cette même option donné soit, par le modèle de BLACK et SCHOLES, soit par le modèle à volatilité stochastique.

Le seul biais pour le modèle à volatilité stochastique est celui lié au prix d'exercice : seul le t-stat. pour le coefficient de $m_{i,t}$ est statistiquement significatif dans le tableau 4. Le modèle à volatilité stochastique a tendance à sous-évaluer les options qui sont en dehors de la monnaie et à sur-évaluer les options qui sont en dedans (le coefficient est négatif). En ce qui concerne le modèle de BLACK et SCHOLES, il apparaît qu'il a tendance à sous-évaluer les options qui sont en dehors de la monnaie et à surévaluer les options qui sont en dedans tout comme le modèle à volatilité stochastique. De plus, le modèle de BLACK et SCHOLES a tendance à sous-évaluer les options qui ont une maturité courte et à surévaluer les options qui ont une maturité longue d'après le tableau 5.

TABLEAU 4

Résultats de la régression pour le biais lié au prix d'exercice

$$\varepsilon_{it} = a + bm_{it} + u_{it}$$

	Black et Scholes	Volatilité Stochastique
a	0.0468	-0.0052
(t-stat)	(2.06)*	(-0.39)
b	-1.8209	-0.7347
(t-stat)	(-10.28)**	(-7.01)**
R^2	0,0858	-0.0419

Notes : $m_{it} = \dfrac{S_i(t) - K_i e^{-r(T-t)}}{K_i e^{-r(T-1)}}$

* : significatif au seuil de 5 % ; ** : significatif au seuil de 1 %

TABLEAU 5

Résultats de la régression pour le biais lié à la maturité

$$\varepsilon_{it} = a + b\tau_{it} + u_{it}$$

	Black et Scholes	Volatilité Stochastique
a	0.5040	-0.0664
(t-stat)	(14,13)**	(3.08)**
b	-1.3737	-0.0631
(t-stat)	(-10.24)**	(-0.78)
R^2	0,08522	-0.0005

Notes : * : significatif au seuil de 5 % ; ** : significatif au seuil de 1 %

Conclusion

Nous avons évalué les options dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique dont la discrétisation est un processus GARCH(1,1). Les résultats obtenus plaident en faveur d'une telle modélisation. En effet, il semble au vu de notre étude empirique effectuée sur le MONEP pour trois sociétés qu'un modèle à volatilité stochastique permette de corriger certaines erreurs d'évaluation que commet systématiquement le modèle de BLACK et SCHOLES.

Références

[1] AKGIRAY V. (1989) "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns : Evidence and Forecast", *Journal of Business,* 62, pp. 55-80.

[2] ANDERSEN T.G. (1994) "Stochastic Autoregressive Volatility : a Framework for Volatility Modeling", *Mathematical Finance,* 4, pp. 75-102.

[3] AUGROS J.-C. & P. NAVATTE (1987) *Bourse : les options négociables,* Vuibert.

[4] BALDAUF B. & G.-J. SANTONI (1991) "Stock Price Volatility : some Evidence from an ARCH model", *Journal of Futures Markets,* 11, pp. 191-200.

[5] BALL C.A. & A. ROMA (1994) "Stochastic Volatility Option Pricing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 29, pp. 589-607.

[6] BLACK F. & M.-S. SCHOLES (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy,* 81, pp. 637-654.

[7] BOLLERSLEV T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics,* 31, pp. 307-327.

[8] BOLLERSLEV T., R.Y. CHOU & K.-F. KRONER (1992) "ARCH Modeling in Finance : a Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics,* 52, pp. 5-59.

[9] CHESNEY M. & L. SCOTT (1989) "Pricing European Currency Options : a Comparaison of the Modified BLACK-SCHOLES Model and a Random Variance Model", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 24, Septembre, pp. 267-284.

[10] CHOU R.-Y. (1988) "Volatility Persistence and Stock Valuations : Some Empirical Evidence using GARCH", *Journal of Applied Econometrics,* 3, pp. 279-294.

[11] DAY T.E. & C.-M. LEWIS (1992) "Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options", *Journal of Econometrics,* 52, pp. 267-287.

[12] ENGLE R.-F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimation of the Variance of the U.K. Inflation", *Econometrica,* 50, p. 987-1008.

[13] ENGLE R.-F. & T. BOLLERSLEV (1986) "Modelling the Persistence of Conditional Variances", *Econometric Reviews,* 5, pp. 1-50.

[14] ENGLE R.-F. & C. MUSTAFA (1992) "Implied ARCH Models from Options Prices", *Journal of Econometrics* 52, pp. 289-311.

[15] GRAR A. & S. MANAÏ (1994) *Prévision de volatilité et efficience du* MONEP, Cahier de Recherche de *l'Université Paris-Dauphine,* Mars.

[16] HEYNEN R., A. KEMNA & T. VORST (1994) "Analysis of the Term Structure of Implied Volatilities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 29, pp. 31-56.

[17] HULL J. & A. WHITE (1987) "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance,* 2, Juin, pp. 281-300.

[18] JONHSON H. & D. SCHANNO (1987) "Option Pricing when the Variance is Changing", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 22, pp. 143-151.

[19] LAMOUREUX C.-G. & W.-D. LASTRAPES (1993) "Forecasting Stock-Return Variance : toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities", *Review of Financial Studies,* 6, pp. 293-326.

[20] MELINO A. & S.-M. TURNBULL (1990) "Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility", *Journal of Econometrics,* 45, pp. 239-265.

[21] MERVILLE L.-H. & D.-R. PIEPTEA (1989) "Stock Price Volatility, Mean Reverting Diffusion, and Noise", *Journal of Financial Economics,* 24, pp. 193-214.

[22] NELSON D.-B. (1990) "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics,* 45, pp. 7-38.

[23] NELSON D.-B. (1991) "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns : a New Approach", *Econometrica,* 59, pp. 347-370.

[24] NELSON D.-B. (1992) "Filtering anf Forecasting with Misspecified arch Models I Getting the Right Variance with the Wrong Model", *Journal of Econometrics,* 52, pp. 61-90.

[25] NELSON D.-B. & D.-P. FOSTER (1994) "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models.", *Econometrica,* 62, pp. 1-41.

[26] NELSON D.-B. & D.-P. FOSTER (1995) "Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models II Making the Right Forecast with the Wrong Model", *Journal of Econometrics,* 67, pp. 303-335.

[27] NELSON D.-B. (1996) "Asymptotic Filtering Theory for Multivariate ARCH Models", *Journal of Econometrics,* 71, pp. 1-47.

[28] ROMANO M. & N. TOUZI (1995) *Contingent Claims and Market Completeness in a Stochastic Volatility Model,* Cahier de Recherche CREST.

[29] SCHWERT G. & J. SEGUIN (1990) "Heteroscedasticity in Stock Returns", *The Journal of Finance,* 4.

[30] SCOTT L.-O. (1987) "Option Pricing when the Variance Changes Randomly", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 22, pp. 419-438.

[31] SCOTT L.-O. (1991) "Random-Variance Option Pricing : Empirical Tests of the Model and Delta-Sigma Hedging", *Advances in Futures and Options Research,* 5, pp. 113-135.

[32] STEIN E.-M. & J.-C. STEIN (1991) "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility : an Analytic Approach", *Review of Financial Studies,* 4, pp. 727-752.

[33] TAYLOR S.-J. (1994) "Stochastic Volatility : a Review and Comparative Study", *Mathematical Finance,* 4, pp. 183-204.

[34] WIGGINS J.-B. (1987) "Option Values under Stochastic Volatility : Theory and Empirical Estimates", *Journal of Financial Economics,* 19, pp. 351-372.