

GEORGES PRAT

Une analyse de la modification des arbitrages des investisseurs sur le marché financier en fonction de l'importance du risque général

Journal de la société statistique de Paris, tome 125, n° 1 (1984), p. 3-24

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1984__125_1_3_0

© Société de statistique de Paris, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

II

ARTICLES

UNE ANALYSE DE LA MODIFICATION DES ARBITRAGES DES INVESTISSEURS SUR LE MARCHÉ FINANCIER EN FONCTION DE L'IMPORTANCE DU RISQUE GÉNÉRAL (*)

Georges PRAT

Chargé de recherche au C.N.R.S., Université de Paris-X

Lorsque le risque général ressenti sur le marché financier augmente (diminue), les investisseurs ont une préférence apparente accrue pour les titres les moins (les plus) risqués.

L'analyse empirique des fluctuations et des facteurs des écarts entre les rendements d'obligations appartenant à des classes différentes de risque, ainsi que du cours des actions, permet une mise en évidence de ce phénomène (Partie I).

La théorie contemporaine des choix de portefeuille en incertitude semble fournir une explication simple et pourtant structurée de ce phénomène, soit en supposant que les investisseurs cherchent à maintenir stable le risque total de leur portefeuille lorsque le risque général augmente (en modifiant les parts respectives de l'actif sans risque et de l'actif risqué), soit en supposant que les paramètres de leurs fonctions d'utilité se modifient selon les conditions du marché, soit enfin en supposant que leur aversion envers le risque n'est pas indépendante du risque général, ces trois possibilités ne s'excluant d'ailleurs pas (Partie II).

If general risk felt in the financial market increases (decreases), then, investors have a greater observable preference towards the less (most) risky securities.

The empirical evidence of this phenomenon is given by the analysis of cyclical fluctuations and factors of yields gap between bonds of various grades and stock prices (Part I).

The contemporaneous theory of portfolio selection under uncertainty seems to supply a simple and yet reliable explanation of this phenomenon: firstly in supposing than investors try to maintain the total risk of their portfolio stable when general risk goes up (changing the respective proportions of the riskless and risky assets), secondly, in supposing than their utility functions' parameters change according to the market's conditions, and thirdly, finally, in supposing than their aversion towards risk is not independant of the general risk, these three possibilities being not exclusive all together (Part II).

*

**

(*) L'auteur tient à remercier les membres du Centre Clément-Juglar pour les remarques dont il a bénéficié dans la Partie I de ce travail. Une première version de la Partie I a été présentée au Congrès de décembre 1981 de l'Association Française de Finance et à un séminaire du G.I.S. (Groupement d'Intérêt Scientifique) de Sciences Économiques de l'Université de Paris-X, en mai 1982. L'auteur remercie les intervenants lors de ces deux manifestations, qui ont contribué à améliorer ce travail. L'auteur exprime aussi sa gratitude envers le Professeur J.-R. Sulzer (Université de Paris-XIII) et O. Favereau (Université de Paris-X) pour avoir lu le projet et transmis leurs remarques. Mais, il va de soi que l'auteur assume l'entière responsabilité des développements qui suivent. Enfin, il faut signaler que les développements de la première partie puisent leurs matériaux dans le chapitre IV de Prat, 1982 : l'auteur remercie les éditions Economica pour leur aimable autorisation.

Le marché financier offre aux investisseurs un menu d'actifs plus ou moins risqués, allant de l'obligation de première qualité à l'action la plus risquée, en passant par les obligations de seconde qualité. Selon le degré d'aversion pour le risque qui caractérise chaque opérateur, un choix maximisant l'utilité de l'opérateur est possible; le marché permet en effet à l'investisseur de constituer un portefeuille ayant le couple rendement espéré/risque qu'il désire en modifiant les parts des actifs de différentes classes dans son portefeuille.

Cet article a pour objet de présenter une analyse des modifications des préférences des individus au cours du temps, vis-à-vis des titres plus ou moins risqués. L'idée directrice est que, lorsque le risque *général* ressenti sur le marché financier augmente, les investisseurs préfèrent dans leur ensemble les titres relativement les moins risqués, tandis que lorsque le risque financier *général* diminue, les investisseurs préfèrent les titres relativement plus risqués.

La *première partie* présente l'évidence empirique de la modification des arbitrages des individus au cours du temps. La *seconde partie* propose, dans le langage de la théorie contemporaine des choix de portefeuille en incertitude, une interprétation des faits mis en évidence dans la partie précédente.

PREMIÈRE PARTIE

LA MODIFICATION DES ARBITRAGES DES INVESTISSEURS AU COURS DU TEMPS : L'ÉVIDENCE EMPIRIQUE

Sur cette question, l'approche de F.R. Macaulay constitue un travail de pionnier ouvrant une voie de recherche nouvelle. Cette approche présente deux caractéristiques essentielles. La première est qu'elle aboutit à des résultats exceptionnels au double point de vue de leur originalité et de leur portée. La seconde est que l'exposé de Macaulay ⁽¹⁾ est souvent imprécis et difficile à saisir, tant au niveau des calculs effectués par l'auteur qu'à celui de l'interprétation qu'il donne aux résultats obtenus ⁽²⁾. Il est donc nécessaire d'analyser l'approche de Macaulay (§ A) avant de tenter un approfondissement, notamment au regard d'une littérature plus récente (§ B).

A — « L'ECONOMIC DRIFT » DE MACAULAY

Pour les besoins de son analyse, Macaulay *invente* le concept « *d'Economic Drift* ». L'idée fondamentale de l'auteur est que les rangs ⁽³⁾ relatifs des obligations d'un même échantillon se modifient au cours du temps, ce phénomène devant être radicalement distingué du mouvement en hausse ou en

1. L'ouvrage de Frederic R. MACAULAY (1938) constitue en fait une étude générale sur les taux d'intérêt, en liaison avec la conjoncture économique, les variations de prix et le cours des actions, aux États-Unis entre 1857 et 1936. L'objet de l'article se limite aux travaux de l'auteur concernant les rendements des obligations et le cours des actions. Sur ce sujet, les deux chapitres les plus importants sont les suivants :

Chapter IV : The Relation of the Movements of Bond Yields to the Grades of the Bonds — Economic Drift, pp. 85-127.

Chapter V : Bond Yields, Economic Drift and the Prices of Common Stocks, pp. 128-62.

2. C'est sans doute la raison pour laquelle cette partie des travaux de Macaulay est restée presque inconnue. Je dois reconnaître avoir passé un grand nombre d'heures avant de comprendre ce que Macaulay a cherché à nous transmettre.

3. Les obligations de premier rang sont les obligations de meilleure qualité (higher Grade Bonds); elles sont les plus sûres et ce sont elles qui ont les rendements les plus bas (Lower Yield bonds) car elles présentent la prime de risque la plus faible. D'autre part, si on compare deux obligations d'une même société émettrice dont le terme a la même longueur mais dont les dates d'émission diffèrent, la première émise (the more senior) sera de rang plus élevé que la seconde émise (the more junior) car, en cas de difficultés, les premières obligations remboursées seront les plus anciennement émises (p. 138). En résumé, plus le risque est élevé, plus le rang est bas et le rendement élevé, toutes choses égales par ailleurs.

baisse qui affecte *dans la même proportion* tous les taux de rendement. L'*Economic Drift* représente cette modification de la structure des rangs des obligations au cours du temps ⁽⁴⁾.

L'objectif principal de Macaulay est d'isoler l'*Economic Drift* de l'évolution du rendement moyen des obligations de tous rangs ⁽⁵⁾ :

« ... nous étions autant intéressés à découvrir les caractéristiques du mouvement et à le mesurer, qu'à l'éliminer. Nous désirions, non seulement représenter les mouvements des rendements des obligations des chemins de fer de rang le plus haut, mais aussi à montrer comment les obligations de rang le plus bas agissent, et présenter sous une forme mathématique aussi simple que possible les relations statistiques entre les mouvements des rendements des obligations de rangs différents. Enfin, nous espérions être en mesure de représenter les mouvements du cours des actions par ceux des taux de rendement des obligations » ⁽⁶⁾.

1. La mesure de l'*Economic Drift*

Après avoir sélectionné pour une date donnée, un échantillon d'obligations ayant une même durée (duration) ⁽⁷⁾, Macaulay fait débiter son analyse par une approche graphique :

« Nous avons tracé des diagrammes de corrélation sur lesquels les rendements à une date donnée des différentes obligations d'un échantillon ont été portés sur l'axe des x , et les rendements à une date suivante, le long de l'axe des y . Nous avons considéré les logarithmes des rendements plutôt que les rendements eux-mêmes, car une relation semblait plus logique sur une échelle logarithmique que sur une échelle naturelle » ⁽⁸⁾.

4. Un exemple personnel, purement imaginé, peut être utile pour mieux saisir ce qui est en question. Soit à l'instant t un échantillon composé de trois obligations A , B et C , dont les rendements sont les suivants (les trois obligations ayant une même durée) :

$$A(t) = 1\% ; B(t) = 2\% ; C(t) = 3\% \text{ (moyenne } (t) = 2\%)$$

Considérons à présent deux cas :

CAS I — Les rangs relatifs restent constants entre t et $t + 1$ (absence « d'*Economic Drift* »)

$$A(t + 1) = 2\% ; B(t + 1) = 4\% ; C(t + 1) = 6\% \text{ (moyenne } (t + 1) = 4\%)$$

Dans cet exemple, tous les rendements augmentent dans la même proportion (ils sont multipliés par 2) : il n'y a pas « d'*Economic Drift* ».

CAS II — Les rangs relatifs se modifient entre t et $t + 1$ (« *Economic Drift* »)

$$A(t + 1) = 4\% ; B(t + 1) = 6\% ; C(t + 1) = 2\% \text{ (moyenne } (t + 1) = 4\%)$$

Dans ce second cas, les rendements soit n'évoluent pas proportionnellement (A et B sont multipliés respectivement par 2 et 1,5), soit n'évoluent pas dans le même sens (C est divisé par 3).

Or, dans les cas I et II, la moyenne a été multipliée par 2. Cependant, alors que, dans le cas I, l'augmentation de la moyenne résulte uniquement de la hausse du « phénomène intérêt », dans le cas II on doit distinguer deux phénomènes :

- 1) une hausse de la moyenne des trois rendements,
- 2) une modification dans la structure des rangs : en t , C est l'obligation de rang le plus bas, et en $t + 1$ devient de rang le plus haut.

Macaulay cherche précisément à mesurer et à isoler le second phénomène.

5. La construction d'un indice du rendement des obligations de plus haut rang dégagé de l'*Economic Drift* n'est qu'un sous-produit en lui-même très secondaire de l'analyse de Macaulay.

6. MACAULAY, 1938, pp. 97-98.

7. Macaulay effectue une distinction essentielle entre la durée (« duration ») d'une obligation et son échéance (« maturity »). L'échéance est le nombre d'unités de temps séparant l'époque actuelle de la date de remboursement de l'obligation. Par contre, la durée est une caractéristique dont l'échéance n'est qu'un des éléments. La durée (d) d'une obligation fait intervenir le principal (F), les coupons (I), le rendement actuariel (r) et l'échéance (n) (voir MACAULAY, p. 48) :

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{iI}{R^i} + \frac{nF}{R^n}}{\sum_{i=1}^n \frac{I}{R^i} + \frac{F}{R^n}} \text{ avec } R = 1 + r$$

La formule montre que la durée (d) d'une obligation est une moyenne pondérée des échéances (i) afférentes à chacun des paiements (I ou F) liés à l'obligation (les pondérations sont effectuées d'après la valeur actualisée du paiement). On a nécessairement $d \leq n$. Le concept de durée de Macaulay a longtemps été délaissé; cependant, depuis quelques années, les analystes financiers paraissent lui accorder une attention grandissante. Sur cette question, voir aussi DE BOISSIEU (1976), p. 30, BIERWAG (1978) et COX, INGERSOLL and ROSS (1979). Je tiens à remercier les professeurs G. Gallais-Hamono et J.-R. Sulzer pour les remarques constructives apportées sur cette question à l'occasion du Congrès de l'A.F.F.I. de décembre 1981.

8. MACAULAY, 1938, p. 96. On ne voit d'ailleurs pas en quoi consiste cette « logique ». En fait, la seule raison est que de meilleurs résultats empiriques ont été obtenus avec la spécification logarithmique.

Le *Graphique I* illustre bien cette première approche pour les périodes janvier 1857-janvier 1858 et janvier 1858-janvier 1859 ⁽⁹⁾. Après avoir examiné les diagrammes sur l'ensemble de la période 1857-1936, l'auteur s'interroge au sujet du critère d'ajustement qu'il convient de retenir pour ajuster les points observés par une ligne droite qu'il nomme « *Ligne Sigma* » :

« Bien entendu, nous réalisons que ni les rendements de la période précédente, ni ceux de la période suivante, — disons les mois de janvier précédant ou suivant — ne peuvent logiquement être considérés comme des variables indépendantes. A la fois les rendements du mois de janvier précédent et ceux du mois de janvier suivant doivent être considérés comme des variables dépendantes. La ligne droite ne doit pas être ajustée de telle manière que la somme des carrés des écarts verticaux *ou* horizontaux des points observés à la droite théorique soit minimale, mais de telle manière que la somme... des carrés des écarts verticaux *et* horizontaux soit minimale...

De plus, on ne peut pas supposer que l'importance des « erreurs » auxquelles les deux variables sont assujetties soit la même... Leur propension à l'erreur est de toute évidence proportionnelle à leur écart type. Avant d'ajuster la ligne droite, nous devons donc pondérer les variables en proportion inverse du carré de leur écart type. Une telle pondération corrigera exactement le fait que leur propension à l'erreur est proportionnelle à leur écart type » ⁽¹⁰⁾.

Les critères de l'ajustement étant définis et justifiés, il est possible de démontrer que :

« La pente de la ligne droite ajustée de manière à ce que la somme des carrés des écarts verticaux et horizontaux à la valeur théorique (lorsqu'ils sont pondérés en proportion inverse des carrés des écarts types des deux variables) soit minimale est σ_y/σ_x , où σ_x = l'écart type des logarithmes des rendements à une date donnée et σ_y = l'écart type des logarithmes des rendements à la date suivante » ⁽¹¹⁾, ⁽¹²⁾.

Par conséquent, la Ligne Sigma a pour équation générale :

$$x(t+1) = \frac{\sigma_x(t+1)}{\sigma_x(t)} x(t) + b \quad (1)$$

9. Macaulay donne tous les diagrammes pour les mois de janvier adjacents, entre 1857 et 1936 (pp. 104-16). Les lignes en traits fins ont une pente égale à l'unité (cas fictif où il n'y aurait pas d'Economic Drift), et une ordonnée à l'origine égale à la différence entre la moyenne en $t+1$ et en t de l'échantillon.

10. MACAULAY, 1938, pp. 98-99. L'auteur cherche donc une relation *purement statistique* entre x et y (avec $y(t) = x(t+1)$ en minimisant la quantité S^2 que l'on peut définir de la manière suivante :

$$S^2 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - x_i^*)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_i - y_i^*)^2}{\sigma_y^2} \right] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - x_i^*}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y_i - y_i^*}{\sigma_y} \right)^2 \right]$$

x_i et y_i : valeurs observées des logarithmes décimaux des rendements de l'obligation i en $t(x_i)$ et en $t+1(y_i)$.

x_i^* et y_i^* : valeurs théoriques de x_i et de y_i . On a :

$$\begin{aligned} y_i^* &= ax_i + b \\ x_i^* &= \frac{1}{a} y_i - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

σ_x^2 et σ_y^2 = variances de x et y .

n : nombre d'obligations de l'échantillon.

11. MACAULAY, 1938, p. 100. L'auteur donne sur cette démonstration la référence suivante : Merriman's; The Determination by the Method of least Squares of the Relation between two variables... both Being liable to errors of Observation (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1890, p. 697). Il faut préciser ici que la pente pourrait, a priori, être négative (elle est du signe de la covariance entre $x(t)$ et $x(t+1)$); mais ce cas n'est jamais observé dans le domaine d'analyse de Macaulay.

Il n'est pas sans intérêt de noter par ailleurs que la pente de la ligne sigma ainsi obtenue est égale à la moyenne géométrique des coefficients de régression obtenus en régressant $x(t)$ sur $x(t+1)$ puis $x(t+1)$ sur $x(t)$:

$$x(t+1) = a_1 x(t) + b_1 + \varepsilon_1(t)$$

$$x(t) = a_2 x(t+1) + b_2 + \varepsilon_2(t) \quad (x(t+1) = a'_1 x(t) + b'_1 + \varepsilon'_1(t) \text{ avec } a'_1 = 1/a_2; b'_1 = -b_2/a_2; \varepsilon'_1 = -\frac{\varepsilon_2}{a_2})$$

On a bien :
$$a_1, a'_1 = a_1/a_2 = \frac{\sigma_x^2(t+1)}{\sigma_x^2(t)}, \text{ soit } \sqrt{a_1 a'_1} = \frac{\sigma_x(t+1)}{\sigma_x(t)}$$

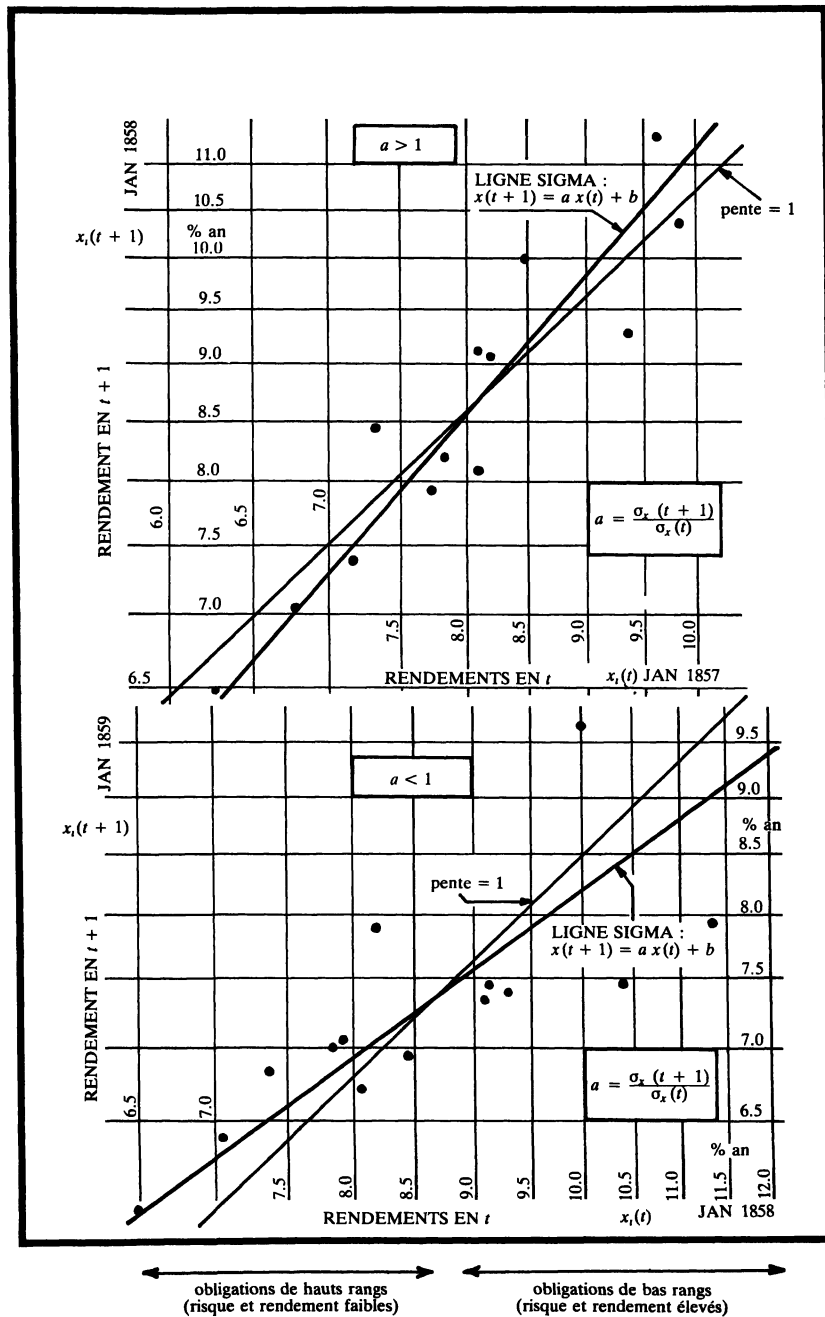
La méthode utilisée par Macaulay peut donc être reliée à la corrélation classique. Mais elle diffère de la corrélation orthogonale. Je remercie J.-M. Bethenod pour m'avoir fait remarquer ce point.

12. On peut ajouter que le terme constant b , tout comme pour une corrélation classique, sera tel que $\bar{y} = a\bar{x} + b$.

GRAPHIQUE I

Les Lignes Sigma : diagrammes de corrélation entre les logarithmes des rendements des obligations en (t) et en (t + 1)

États-Unis, secteur des chemins de fer



Source : MACAULAY, 1938, p. 104, Chart 6.

On peut se demander pourquoi la pente $\sigma_x(t+1)/\sigma_x(t)$ de la Ligne Sigma permet de mesurer la variation de « l'Economic Drift d'une période à l'autre. Il me semble ici opportun de distinguer la signification de la pente de celle de la différence $[\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)]$ entre les moyennes (13). En effet, alors que la constante $[\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)]$ représente d'une période à l'autre la *variation commune* à tous les rendements (mouvement général), la pente représente au contraire la *modification structurelle entre les rendements les uns par rapport aux autres*, c'est-à-dire la variation de l'Economic Drift entre t et $t+1$.

Trois cas de figure peuvent se présenter selon que la pente $a = \sigma(t+1)/\sigma(t)$ de la Ligne Sigma est supérieure, inférieure ou égale à l'unité (14).

Lorsque la pente de la Ligne Sigma est supérieure à l'unité ($a > 1$, diagramme du haut du graphique I), on constate, par construction, que les obligations de haut rang (risque faible, rendement faible) situées vers la gauche du diagramme, ont des rendements qui baissent relativement plus rapidement ou qui croissent relativement moins rapidement que les rendements des obligations de bas rang (haut risque, rendement élevé) situées vers la droite du diagramme. Exceptionnellement, les obligations de hauts rangs ont des rendements qui baissent tandis que les obligations de bas rangs ont des rendements qui augmentent. Par conséquent, l'écart relatif moyen entre les rendements des obligations de bas et de hauts rangs tend à s'élargir, phénomène traduisant une augmentation de la demande d'obligations de hauts rangs relativement aux obligations de bas rangs. En d'autres termes, lorsque le risque ressenti sur le marché financier s'accroît, les opérations cherchent à se prémunir contre ce risque grandissant en se réfugiant dans des titres jugés plus sûrs (15). Par conséquent, *une pente supérieure à l'unité traduit une augmentation du risque général ressenti sur le marché financier.*

De la même manière, on peut montrer qu'une pente de la Ligne Sigma inférieure à l'unité ($a < 1$, diagramme du bas du graphique I) traduit une préférence relative accrue pour les obligations de bas rangs (qui offrent des rendements plus élevés), l'écart relatif moyen entre les rendements de ces dernières et ceux des obligations de hauts rangs tendant à se réduire lorsque la confiance en l'avenir s'améliore. Par conséquent, *une pente inférieure à l'unité traduit une diminution du risque général sur le marché financier.*

Enfin, si la pente de la Ligne Sigma était égale à l'unité, la Ligne Sigma se déduirait de la bissectrice du diagramme par une translation homothétique égale à la différence $\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t)$ entre les moyennes en $t+1$ et en t des logarithmes des rendements, translation représentant l'évolution générale, en hausse ou en baisse, affectant *dans la même proportion* tous les taux de rendement, l'écart relatif moyen entre ces derniers restant stable. Par conséquent, *une pente égale à l'unité traduirait une stabilité du risque général sur le marché financier*, stabilité qui n'est jamais strictement observée.

Le *Tableau I* résume les différentes configurations observées des Lignes Sigma et les fréquences associées à ces configurations (16).

13. Macaulay ne fait pas explicitement cette distinction dans son exposé.

14. Voir MACAULAY (1938), p. 159.

15. L'interprétation de l'écart entre les rendements d'obligations de même durée en termes de risque financier est indéniable lorsque Macaulay écrit :

« ... la relation entre le rendement des investissements de rang le plus haut et le rendement des autres investissements est toujours importante... Habituellement les gens prennent des *risques* dans l'espoir d'obtenir des gains plus importants qu'ils pourraient obtenir avec les investissements considérés comme absolument sûrs... » (p. 40).

Il est bien exact que le *manque de confiance provoqué par une récession des affaires* tend à accroître la demande relative d'obligations de plus haut rang et à diminuer la demande relative d'obligations de plus bas rang... (p. 40).

« Aussi longtemps qu'un secteur économique est, soit en raison de la conjoncture générale, soit en raison des conditions propres à ce secteur, dans une période de prospérité et de croissance, l'écart entre les rendements de deux obligations quelconques, la première de bas rang et l'autre de rang élevé, tendra à décroître » (p. 83).

« Une différence entre les rendements de deux obligations peut résulter autant d'une différence entre les marchés des deux obligations que d'une différence entre les degrés de confiance du public concernant les paiements futurs promis » (p. 120).

16. En moyenne, environ 60 % des cas sont tels que l'on a soit $a > 1$ avec $\bar{x}(t+1) > \bar{x}(t)$, soit $a < 1$ avec $\bar{x}(t+1) < \bar{x}(t)$. Ce constat montre que, dans 60 % des cas, les obligations de bas rang ont des rendements qui augmentent relativement plus vite que ceux des obligations de hauts rangs pendant les périodes de hausse générale des rendements, et qui diminuent relativement plus rapidement pendant les périodes de baisse générale des rendements. Mais on doit souligner que ce *phénomène de volatilité plus grande des obligations risquées ne peut expliquer que 60 % des cas observés.*

A présent se pose donc la question de savoir comment construire la courbe représentative de l'Economic Drift sur l'ensemble de la période 1857-1936.

TABLEAU I

LES LIGNES SIGMA : TYPOLOGIE DES CAS OBSERVÉS États-Unis : 1857-1936		
PENTES	ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES	INTERPRÉTATIONS
<p>$a > 1$ 47 % des cas</p> <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">ECONOMIC DRIFT</p>		<p>Les obligations de haut rang ont des rendements qui :</p> <p>① croissent moins rapidement ② baissent plus rapidement que les obligations de bas rangs entre t et $t + 1$. Exceptionnellement, les rendements des obligations de bas et de hauts rangs évoluent en sens inverse.</p>
<p>$a < 1$ 53 % des cas</p> <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">ECONOMIC DRIFT</p>		<p>Les obligations de bas rang ont des rendements qui :</p> <p>① croissent moins rapidement ② baissent plus rapidement que les obligations de hauts rangs entre t et $t + 1$. Exceptionnellement, les rendements des obligations de bas et de hauts rangs évoluent en sens inverse.</p>
<p>$a = 1$ cas fictif jamais observé</p> <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">PAS D'ECONOMIC DRIFT</p>		<p>Les obligations de hauts et de bas rangs ont des rendements qui :</p> <p>① croissent proportionnellement ② baissent proportionnellement entre t et $t + 1$.</p>

x_i : Logarithme décimal du rendement de l'obligation i .
 — : Ligne Sigma; --- : parallèle à la Ligne pente = 1; — : pente = 1.
 Economic Drift : les cas ($a > 1$; ①) et ($a < 1$; ②) constituent 59 % des cas sur la période 1857-1936 (U.S.A., Secteur des chemins de fer). Les cas ($a > 1$; ②) et ($a < 1$; ①) constituent donc 41 % des cas.

La pente de la Ligne Sigma, égale au rapport $\sigma(t + 1)/\sigma(t)$ des écarts types entre les logarithmes décimaux des rendements en $(t + 1)$ et en (t) , peut être considérée comme un indicateur de la *variation relative* du phénomène étudié entre les instants (t) et $(t + 1)$. L'objectif de Macaulay étant de représen-

ter le *niveau* de l'Economic Drift sur l'ensemble de la période 1857-1936, il lui suffit de calculer le « Produit Cumulé des Pentes des Lignes Sigma », qui peut s'écrire de la manière suivante ⁽¹⁷⁾ :

$$p(t) = p(t_0 + n) = \frac{\sigma(t_0 + 1)}{\sigma(t_0)} \times \frac{\sigma(t_0 + 2)}{\sigma^*(t_0 + 1)} \times \dots \times \frac{\sigma(t_0 + n)}{\sigma^*(t_0 + n - 1)} \quad (2)$$

où t_0 correspond à l'année de début du calcul, et où $n = t - t_0$. Si $\sigma(t_0 + 1)$ représente, par exemple, l'écart type observé en janvier 1870 de l'échantillon retenu pour la période janvier 1869-décembre 1869, alors $\sigma^*(t_0 + 1)$ représente l'écart type en janvier 1870 de l'échantillon retenu pour la période janvier 1870-décembre 1870. On voit donc que tous les rapports $\sigma(t_0 + i)/\sigma^*(t_0 + i - 1)$ sont calculés à partir d'un même échantillon d'obligations. Le calcul de l'indicateur p de « l'Economic Drift » montre que ce dernier n'est pas affecté par un biais mathématique, car les pentes des Lignes Sigma calculées entre les mois successifs remplissent les conditions pour que soit vérifié ce que Macaulay appelle le « Test Circulaire » (Circular Test), qui permet de se mouvoir dans un sens ou dans l'autre sur l'axe des temps de la courbe du produit cumulé, sans que les résultats ne soient altérés par le sens choisi ⁽¹⁸⁾. Si les critères de l'ajustement permettant de calculer les pentes des Lignes Sigma n'avaient pas été ceux retenus par Macaulay ⁽¹⁹⁾, le « Test Circulaire » n'aurait pas été rempli, et « une forme ou une autre d'un biais purément mathématique aurait été introduit » ⁽²⁰⁾.

2. L'Economic Drift, caractéristique essentielle de la dynamique du cours des actions

L'analyse qui précède montre que, si l'on admet

« ... que les pentes des Lignes Sigma sont des indicateurs de l'amélioration ou du déclin des obligations de bas rangs relativement aux obligations de hauts rangs tel que l'apprécie le marché, on conçoit naturellement qu'une comparaison du cours des actions avec le produit cumulé des pentes des Lignes de Sigma sera sûrement intéressante » ⁽²¹⁾.

De fait, le *Graphique II* montre l'existence d'une corrélation *négative* impressionnante entre le cours des actions et le « Produit Cumulé des Pentes des Lignes Sigma » (1857 à 1936 États-Unis, secteur des chemins de fer) ⁽²²⁾, et donc que « l'Economic Drift est la caractéristique essentielle des fluctuations du cours des actions courantes » ⁽²³⁾.

Ces résultats montrent qu'il existe une liaison entre d'une part les arbitrages réalisés sur le marché des obligations selon les classes de risque des titres et d'autre part les fluctuations du cours moyen des actions. Lorsque le risque moyen ressenti sur le marché financier s'accroît, on constate d'une part une baisse du cours moyen des actions (augmentation de la prime de risque des actions provoquant une hausse du taux d'actualisation) et d'autre part une hausse de l'écart entre le rendement des obligations de bas rangs (risque élevé, rendement élevé) et le rendement des obligations de hauts rangs (risque bas, rendement faible). *Ce phénomène traduit une préférence accrue des opérateurs pour les obligations de hauts rangs, en période où le risque augmente sur le marché financier.*

17. La formule (2) n'est pas donnée par Macaulay. J'ai pu cependant retrouver les résultats de l'auteur en utilisant cette formule. Par ailleurs, j'ai pu montrer que l'évolution de l'indicateur $p(t)$ dépend beaucoup plus de celle de l'écart type $\sigma(t)$ que de celle de $X(t) = p(t)/\sigma(t)$. Le rôle des écarts entre les rendements des obligations est donc prépondérant dans la détermination de l'Economic Drift (voir PRAT, 1982, pp. 79-81).

18. Des cumuls avant ou arrière donneront en effet les mêmes résultats. Voir MACAULAY, p. 102, Chart 5.

19. Par exemple, si l'ajustement avait reposé sur la méthode ordinaire des moindres carrés, le « Test Circulaire » n'aurait pas été rempli, et un biais aurait été introduit dans le cumul des pentes des Lignes Sigma.

20. MACAULAY, 1938, p. 101.

21. MACAULAY, 1938, p. 65.

22. Cette corrélation contraste avec la quasi-absence de corrélation entre les rendements des obligations de plus hauts rangs et le cours des actions sur la même période.

23. MACAULAY, 1938, p. 148. Selon Macaulay, il n'y aurait donc pas de relation de causalité entre les deux grandeurs, mais interdépendance dynamique résultant du fait qu'elles traduisent un même phénomène sous-jacent.

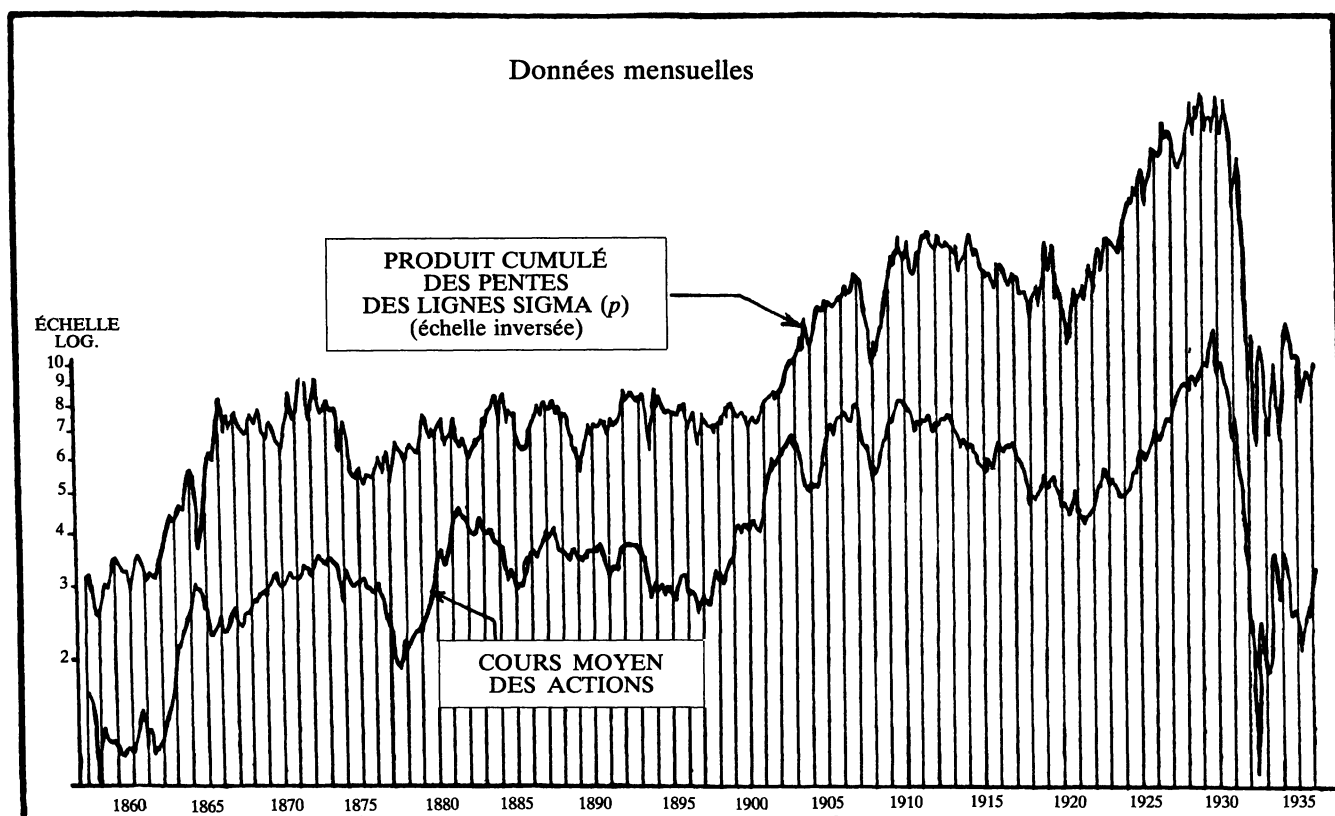
De même, lorsque le risque moyen ressenti sur le marché financier diminue, on constate d'une part une hausse du cours des actions et d'autre part une baisse de l'écart entre le rendement des obligations de bas rangs et le rendement des obligations de hauts rangs. *Ce phénomène traduit une préférence accrue des opérateurs pour les obligations de bas rangs et les actions en période où le risque général ressenti sur le marché financier s'abaisse.*

GRAPHIQUE II

Produit cumulé des pentes des Lignes Sigma (« Economic Drift ») et cours des actions

États-Unis : 1857-1936 — Secteur des Chemins de Fer

L'échelle du produit cumulé est inversée



Source : MACAULAY, 1938, page 160, Chart 15.

B. — APPROFONDISSEMENT DE L'ANALYSE

Les raisonnements présentés ci-dessus ne valent que dans la mesure où l'écart entre les rendements des obligations de même durée peut *effectivement* être considéré comme un différentiel de risque. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on ne pourrait associer une augmentation du risque général à un glissement des préférences des individus vers les obligations les plus sûres (hauts rangs), phénomène mis en

évidence par une pente supérieure à l'unité de la Ligne Sigma, ce qui implique un élargissement de l'écart relatif moyen ⁽²⁴⁾ entre les obligations de bas et de hauts rangs, cet écart étant supposé être représentatif du risque financier général.

Bien que très intuitive ⁽²⁵⁾, l'interprétation en terme de risque des écarts entre les rendements d'obligations de même durée mérite sans aucun doute un approfondissement par rapport au travail de pionnier de Macaulay ⁽²⁶⁾.

Une première constatation est que le « Produit Cumulé des Pentes des Lignes Sigma » (« Economic Drift »), qui permet d'observer au cours du temps les modifications de la structure des rangs des obligations, est intimement lié au rapport j/j_p entre la moyenne (géométrique) générale des obligations de tous rangs et la moyenne (géométrique) des rendements des cinq obligations de plus haut rang (risque le plus bas) ⁽²⁷⁾. Par conséquent, dans la mesure où le rapport j/j_p peut plus aisément que l'indice p être considéré comme un indicateur moyen du risque financier ⁽²⁸⁾, ce résultat montre bien qu'on peut effectivement associer les deux phénomènes suivants :

- augmentation (baisse) du risque financier général (indicateur j/j_p);
- glissement des préférences des individus vers les obligations jugées les plus (moins) sûres (indicateur p) ⁽²⁹⁾.

Une seconde constatation est qu'il existe, toujours dans le même domaine d'analyse, une corrélation négative frappante entre le cours des actions et le rapport j/j_p ⁽³⁰⁾. On pouvait s'attendre à ce résultat compte rendu d'une part de la corrélation négative entre l'indice p (« Economic Drift ») et le cours des actions (Graphique II) et d'autre part la corrélation positive entre l'indicateur p et le rapport j/j_p visé ci-dessus ⁽³¹⁾. J'ai par ailleurs pu vérifier que la corrélation négative entre le cours des actions et le rapport j/j_p existe non seulement aux États-Unis entre 1857 et 1936 (domaine d'analyse de Macaulay) mais encore après la seconde guerre aux États-Unis, en France, au Canada, en Italie et au Royaume-Uni, ce qui suggère indirectement une généralité des résultats obtenus par Macaulay ⁽³²⁾. Dans la

24. La pente d'une Ligne Sigma est en effet calculée à partir d'un ajustement portant sur un échantillon supposé représentatif du marché des obligations.

25. Comme l'a noté Macaulay, l'écart entre les rendements de deux obligations de même durée peut résulter à la fois d'un différentiel de risque entre les deux titres que d'une différence entre les marchés des deux titres (importance des émissions, étroitesse des marchés, nature des intervenants...). Cependant, comme la pente d'une Ligne Sigma représente un phénomène *moyen*, les différences entre les marchés des deux titres peuvent être supposées ne pas affecter l'ajustement, car, entre t et $t + 1$, les différences de marchés évoluent sans doute indépendamment par rapport aux rangs des obligations.

26. Pour plus de détails sur le reste de ce paragraphe, voir PRAT, 1982, chap. IV, pp. 84-105.

27. Dans le domaine d'analyse de Macaulay (U.S.A., 1857-1936, secteur des chemins de fer), j'obtiens $r(\text{Log } p, \text{Log } j/j_p) = 0.92 (1 - r^2 = 0.15)$. Sur ce résultat, voir PRAT, 1982, p. 86, Graphique 4-4.

28. En effet, le rapport j/j_p peut être considéré comme la moyenne (géométrique) des rapports j_i/j_p , où j_i représente le rendement des obligations de la société i et j_p le rendement des obligations de rang le plus haut (mesuré ici par la moyenne géométrique des cinq obligations les plus sûres). Si chaque j_i/j_p est un indicateur du risque qu'il y a à détenir les obligations de la société i , alors, le rapport j/j_p apparaît effectivement comme un indicateur du risque financier moyen. L'indice p de Macaulay se prête beaucoup moins bien à une telle interprétation.

29. La liaison entre l'indicateur p et le rapport j/j_p montre que ce dernier peut être considéré comme un indicateur valable de « l'Economic Drift », en présentant l'avantage décisif de la simplicité, le calcul de p étant très compliqué. Mais l'indicateur, j/j_p se prête beaucoup plus aisément que l'indicateur p à une interprétation en termes de risque financier général (voir note 28 ci-dessus), et constitue, de ce fait, un maillon très utile pour la thèse défendue dans cet article.

30. Voir PRAT, 1982, p. 87, Graphique 4-5. J'obtiens $r(\text{Log } A, \text{Log } j/j_p) = -0.90 (1 - r^2 = 0.19)$ dans le domaine d'analyse de Macaulay (U.S.A., 1857-1936, secteur des chemins de fer). Notons qu'une littérature récente s'intéresse également à l'analyse de ce phénomène. En effet, KRAFT and KRAFT (1977) montrent l'existence d'une corrélation entre le rapport j_a/j_p (j_a = rendement des obligations des sociétés de premier rang; j_p = rendement des obligations fédérales) et le cours des actions (U.S.A., 1955-74); les résultats sont d'ailleurs peu convaincants (voir PRAT, 1982, p. 90, note 42). Par ailleurs, PINCHES et SINGLETON (1978) montrent que le rendement des actions des sociétés américaines réagissent aux classements selon les rangs des obligations effectués par les « Bond Rating Agencies ».

31. Comme il s'agit ici de relations stochastiques et non de relations fonctionnelles, la validité de deux des trois relations n'impliquait pas nécessairement, *a priori*, la validité de la troisième.

32. Voir PRAT, 1982, pp. 90-96. Lors de ces nouvelles vérifications empiriques, les obligations sont non plus de même *durée*, comme c'était le cas pour la période 1857-1936, mais de même *échéance* (voir note 7 ci-dessus). Il semble donc que, pour l'analyse du risque, la distinction entre la durée et l'échéance soit latérale. L'avantage de l'échéance est celui de la simplicité. Un résultat intéressant sur cette question est celui de JOHNSON (1967) : les écarts entre les rendements des obligations des sociétés et les obligations fédérales de même échéance est indépendant de cette échéance.

mesure où on peut penser qu'une grande partie des fluctuations conjoncturelles du cours des actions est imputable à la prime de risque affectant la valeur des titres par le biais du taux d'actualisation, les corrélations entre le cours des actions et le rapport j/j_p contribuent à étayer l'interprétation de ce dernier en termes de risque général ressenti sur le marché financier.

Dans l'ensemble, ces constatations — qui sont propres à l'auteur de cet article — suggèrent donc qu'une augmentation du risque ressenti sur le marché financier — observée par la hausse de j/j_p — a pour effets à la fois une augmentation des préférences des investisseurs pour les obligations les plus sûres (pente de la Ligne Sigma supérieure à l'unité) et une baisse des préférences pour les obligations de bas rangs (risque élevé) ainsi que pour les actions (baisse du cours des actions). De même, une baisse du risque ressenti sur le marché financier a pour conséquences une préférence accrue pour les titres les plus risqués (obligations de bas rangs et actions) relativement aux titres les moins risqués (obligations de hauts rangs) ⁽³³⁾.

Mais, pour finir d'étayer cette démonstration, il est nécessaire d'analyser la signification et le contenu de l'écart entre les rendements d'obligations de rangs différents, en termes de j/j_p ou de $j - j_p$. C'est précisément l'objet d'une littérature plus récente menée le plus souvent en termes de « primes de risque ».

En fait, l'idée qu'il existe une prime de risque dans le taux de l'intérêt est une idée très ancienne. Selon L. Fisher (1959), ce serait J.R. Mc Cullough (1830) qui aurait développé le premier les idées de base relatives aux primes de risque afférentes aux emprunts : « toutes choses égales par ailleurs, le taux de l'intérêt doit bien entendu varier en fonction du risque ressenti par le prêteur, soit de ne pas recevoir du tout les sommes fixées, soit de ne pas les recevoir aux dates prévues » ⁽³⁴⁾. Par contre, les applications économétriques relatives aux primes de risque sont récentes ⁽³⁵⁾.

L'idée selon laquelle l'écart entre les rendements d'obligations de même échéance serait un indicateur de confiance ou de méfiance se propage de plus en plus. A ma connaissance, il existe au moins deux publications financières faisant état d'un tel indicateur de confiance ou de risque. La première, « The Dow-Jones Investor's Handbook », — revue annuelle de la Compagnie Dow-Jones — publie le « Barron's Confidence Index » égal au rapport entre l'indice « Barron » des 10 obligations de plus hauts rangs (faible risque) et la moyenne générale Dow-Jones des rendements des 40 obligations de tous rangs : « le rapport est élevé lorsque les investisseurs achètent avec confiance des obligations de bas

33. Il me semble particulièrement intéressant d'ajouter qu'en période caractérisée par une augmentation de l'incertitude, l'encaisse désirée par les agents économiques tend, toutes choses égales par ailleurs, à s'accroître. J'ai pu mettre en évidence ce phénomène aux États-Unis (1948-79, données trimestrielles) par le modèle très simple suivant :

$$\left[\text{Log} \frac{M}{R} (t) + \lambda \cdot t \right] = \gamma \cdot \text{Log} \frac{j}{j_p} (t) + Cte + \varepsilon (t)$$

M : Masse monétaire au sens strict (M_1).

R : Produit National Brut.

j : rendement général des obligations des sociétés, tous rangs confondus.

j_p : rendement des obligations fédérales.

t : « temps », représentant les « autres facteurs » de la demande de monnaie et une éventuelle « dérive » pouvant affecter l'évolution du « vrai » agrégat monétaire.

$$r = 0.74; \gamma = 0.39; \lambda = 0.0309 \text{ (« dérive » de 3.09 \% par an).}$$

Ces résultats permettent de déduire, au moins aux États-Unis que, lorsque le risque financier général augmente, les individus cherchent un refuge à la fois dans les actifs financiers les moins risqués (obligations de hauts rangs) et dans la monnaie (dont la valeur en capital est stable). Lorsque le risque financier s'abaisse, les individus révèlent une préférence pour les titres les plus risqués (obligations de bas rangs et actions, dont les rendements sont relativement plus élevés) au détriment des actifs financiers à faible risque et la monnaie (dont les rendements pécuniaires et non pécuniaires sont relativement faibles). J'ajoute que ces résultats viennent d'être confirmés sur la période 1919-41, qui recoupe en partie la période d'analyse de Macaulay (1871-1936).

34. J.R. MC CULLOUGH, 1830, *The Principles of Political Economy : With a Sketch of the Rise and Progress of the Science* (2 nd. Ed. Edimbourg, London and Dublin) pp. 508-509. Citation tirée de L. FISHER, 1959, p. 220.

35. Voir notamment L. FISHER, 1959; P. SLOANE, 1967; JEN and WERT, 1967; SOLDOSKY and MILLER, 1971.

rangs. Il est bas lorsqu'ils se réfugient dans les obligations de rangs plus élevés ⁽³⁶⁾. » La seconde revue, « The Bank Credit Analyst » — publication mensuelle sur la conjoncture américaine — fonde ses commentaires sur des courbes parmi lesquelles on trouve, dans le supplément de 1975 notamment, l'écart entre le rendement des obligations de bas rangs (risque élevé) et celui des obligations des sociétés de hauts rangs (risque bas) (Yield Gap between Baa and Aaa Bonds). Cet écart est considéré par les rédacteurs comme un indicateur du risque financier ⁽³⁷⁾.

Au delà de cette idée, il existe dans la littérature quelques études montrant *le caractère contracyclique de l'écart entre les rendements d'obligations de même échéance* ⁽³⁸⁾. Ce résultat constitue déjà une confirmation de l'analyse de Macaulay, selon laquelle le manque de confiance provoqué notamment par une récession a pour effet d'accroître l'écart entre les rendements des obligations ayant une même durée ⁽³⁹⁾. Mais il existe aussi des études empiriques portant sur les *facteurs explicatifs directs des primes de risque*, qui peuvent utilement compléter l'interprétation de l'Economic Drift. Sur ce dernier point, la contribution scientifique de L. Fisher (1959) me paraît essentielle.

L'objet de l'étude de Fisher est d'analyser les facteurs économiques qui déterminent les primes de risque incluses dans les rendements des obligations des sociétés américaines ⁽⁴⁰⁾. Selon Fisher, la prime de risque incluse dans le rendement j_i de l'obligation de la société i est représenté par l'écart $j_i - j_p$ entre le rendement de cette obligation et le rendement des obligations fédérales, indicateur de l'obligation de rang le plus haut (risque le plus bas).

Selon L. Fisher, la prime de risque serait en premier lieu liée au risque de ne pas recevoir les sommes fixées aux dates prévues (intérêt, remboursement) : c'est le *risque de défaillance* (Risk of Default), qui est supposé être le résultat de trois facteurs :

- la variabilité passée des bénéfices de la société : les prévisions sont d'autant plus incertaines que la variabilité est importante;
- la durée de solvabilité de la société, qui représente le temps pendant lequel la société a assumé ses engagements sans perte pour ses créanciers dans le passé;
- la structure financière du capital de la société, représenté par le ratio : capitalisation boursière des actions/valeurs des dettes. En effet, plus ce ratio est élevé, plus la société est potentiellement solvable du point de vue de ses créanciers, en cas de difficultés.

En second lieu, la prime de risque de l'obligation d'une société est liée au *risque de perte en capital* résultant de l'incertitude du cours des obligations, dans la mesure où les créanciers chercheraient à vendre leurs titres sur le marché avant l'échéance (Marketability). Ce second type de risque est repré-

36. The Dow-Jones Investor HANDBOOK, 1975, p. 49. Voir également BRANCH (1976).

37. The Bank Credit Analyst, the OUTLOOK, 1975, p. 34. GIRAUD, MONTER et de MURARD (1975) sont du même avis lorsqu'ils écrivent:

« un écart existe bien entre le taux de rendement actuariel des obligations de première catégorie et celui des obligations de deuxième catégorie... faisant ressortir une prime... de nature à couvrir le risque attaché à la signature des emprunts du secteur privé » (p. 79).

On peut également noter l'approche intéressante de BIERMAN and HASS (1975) qui introduisent la probabilité de défaillance quant aux paiements futurs des coupons et du principal, calculable dans la mesure où l'on a un indicateur du taux d'intérêt sans risque. Là encore, les auteurs ont été précédés par MACAULAY (1938), pp. 61-62, note 8!

38. Voir notamment SLOANE (1967), VAN HORNE (1970), JAFFEE (1975), BENSON and ROGOWSKI (1978), KIDWELL and TRZCINKA (1979) et KIDWELL and KOCH (1982). Les écarts de rendements peuvent concerner soit les écarts entre obligations privées et publiques, soit les écarts entre obligations privées de rangs différents, soit encore les écarts entre obligations publiques de rangs différents (« revenu bonds » et « general bonds » aux U.S.A.).

39. Voir ci-dessus, note 15.

40. L'étude de L. FISHER (1959) a été précédée par celle de HICKMAN (1959), montrant que le rendement des obligations est en moyenne d'autant plus élevé que le rang est bas, le classement des titres selon les rangs étant effectué par quatre grandes firmes d'investissement (U.S.A. 1900-1943). POGUE and SOLDOVSKY (1969) ont ensuite étendu l'approche de Fisher en cherchant à expliquer non pas les primes de risque, mais le classement effectué par des agences spécialisées des obligations selon le risque. Sur cette dernière question l'étude récente de PEAVY and EDGAR (1982) a montré que 70 % de la classification Moody's (obligations industrielles) peut s'expliquer par les mêmes variables en 1968 et en 1976 (U.S.A.); les auteurs en déduisent que les écarts de rendements peuvent effectivement être considérés comme des indicateurs des différentiels du risque de défaillance.

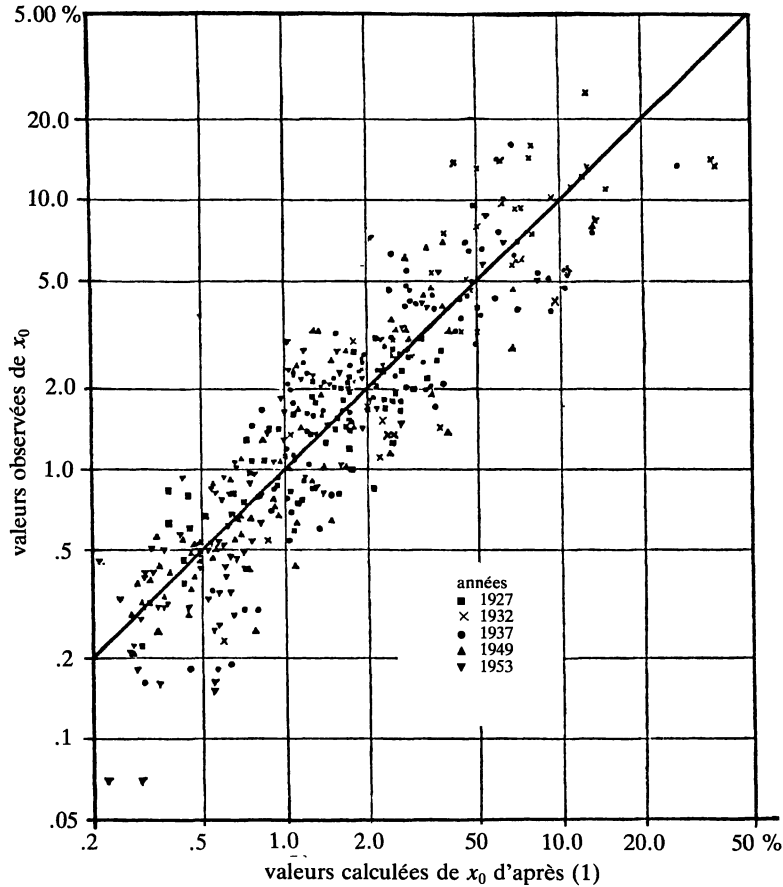
GRAPHIQUE III

États-Unis : 1927-1953 ⁽¹⁾

Valeurs calculées et observées des primes de risque

$$(1) \text{Log } x(i) = 0.262 \text{Log } x_1(i) - 0.223 \text{Log } x_2(i) - 0.469 \text{Log } x_3(i) - 0.290 \text{Log } x_4(i) + \text{Constante} + \text{résidu}$$

$$R^2 = 0.81 \quad N = 366$$



Notations

Source : Lawrence FISHER (1959), pp. 228-29.

$x_0(i)$: prime de risque incluse dans le rendement des obligations de la société i (différence entre les taux de rendement des obligations de la société i et le taux de rendement des bons du trésor, en % par an ⁽²⁾).

$x_1(i)$: coefficient de variabilité des bénéfices de la société i (rapport entre l'écart-type et la moyenne des bénéfices des 9 dernières années).

$x_2(i)$: durée de solvabilité de la société i (temps pendant lequel la société i a été en mesure de faire face à ses engagements sans occasionner des pertes à ses créanciers).

$x_3(i)$: ratio valeur capitalisée des actions/valeur des dettes, pour la société i .

$x_4(i)$: valeur totale sur le marché, des obligations de la société i .

1. Ensemble des « coupes instantanées » faites pour les années 1927 (71 sociétés), 1932 (45 sociétés), 1937 (89 sociétés), 1949 (73 sociétés) et 1953 (88 sociétés).

2. La prime de risque calculée pour une société est une moyenne pondérée des primes de risque observées sur chaque émission de la société.

senté par la valeur totale sur le marché des obligations de la société. En effet, plus cette valeur est faible, plus le marché est étroit, et donc plus le cours des obligations est fluctuant et incertain, et le risque de perte élevé ⁽⁴¹⁾.

L'analyse empirique consiste en cinq « coupes transversales » aux États-Unis pour les années 1927 (échantillon de 71 firmes), 1932 (45 firmes), 1937 (89 firmes), 1949 (73 firmes) et enfin 1953 (88 firmes). *Les années considérées correspondent donc à des situations conjoncturelles extrêmement différentes.* Pour chacune des cinq années, l'auteur calcule la corrélation multiple entre d'une part les primes de risque incluses dans les rendements des obligations des différentes sociétés, et d'autre part les quatre facteurs supposés de ces primes (variabilité des bénéfices, durée de solvabilité, structure financière, risque lié aux fluctuations du marché) ⁽⁴²⁾. Malgré les situations économiques très variées des années étudiées, l'auteur observe une certaine stabilité des coefficients de régression entre les cinq années. Cette constatation amène L. Fisher à effectuer un seul et même ajustement pour l'ensemble des cinq années (366 observations) représenté sur le *Graphique III*. L'ajustement est très bon, et tous les coefficients ont le signe attendu.

On voit donc que l'analyse de L. Fisher tend à montrer que les écarts $j_i - j_p$ entre les rendements des obligations des sociétés et le rendement de l'obligation jugée la plus sûre peuvent être considérés comme des indicateurs synthétiques du risque puisque ces écarts (« primes des risques ») sont liés *simultanément* à des indicateurs représentatifs d'aspects partiels du risque d'entreprise ou de marché ⁽⁴³⁾. Par conséquent, la moyenne $(j - j_p)$ des écarts $(j_i - j_p)$ peut *effectivement* s'interpréter comme un indicateur synthétique et général du risque en termes d'écarts *absolus* ⁽⁴⁴⁾, de même que le rapport j/j_p peut être considéré comme un indicateur du risque financier général en termes d'écarts *relatifs* ⁽⁴⁵⁾.

Les enseignements des observations empiriques

L'approche de Macaulay reposant sur le concept d'Economic Drift et les approches plus récentes fondées sur le concept de prime de risque tendent en définitive à montrer qu'il existe un glissement des préférences des investisseurs lorsque le risque ressenti sur le marché financier varie.

En effet, les analyses empiriques présentées ci-dessus ont montré que :

- en période où le risque ressenti sur le marché financier s'élève, les investisseurs ont une préférence accrue pour les titres relativement peu risqués (obligations de hauts rangs) ⁽⁴⁶⁾ relativement aux titres plus risqués (obligations de bas rangs et actions);
- en période où le risque ressenti sur le marché financier s'abaisse, les investisseurs ont une préférence accrue pour les titres les plus risqués (obligations de bas rangs et actions) relativement aux titres les moins risqués (obligations de hauts rangs).

Dès lors, se pose la question de savoir comment expliquer ces constatations qui sont essentiellement d'ordre empirique.

41. Sur ce point, voir également FAIR and MALKIEL, 1971.

42. Les logarithmes des grandeurs sont considérés.

43. Notons que si les écarts $j_i - j_p$ peuvent être expliqués, les écarts $(j_i - j_i) = (j_i - j_p) - (j_i - j_p)$ peuvent également l'être.

44. L'approche de L. Fischer revient à expliquer les grandeurs $x_i = \text{Log}(j_i - j_p)$, et donc, indirectement aussi, les écarts $j_i - j_p = \exp. x_i$. La moyenne arithmétique des $j_i - j_p$ est égale à $j - j_p$ où j = rendement général des obligations de tous rangs et j_p = rendement des obligations de plus haut rang (ici, les obligations d'Etat).

45. On a en fait les approximations suivantes :

$$\frac{j - j_p}{j_p} = \frac{j}{j_p} - 1 \sim \frac{j - j_p}{j} = 1 - \frac{j_p}{j} \sim \text{Log} \frac{j}{j_p}$$

La grandeur $\text{Log} j/j_p$ utilisée dans cette étude peut donc être considérée comme un indicateur moyen de la part de la prime de risque incluse dans le taux j .

46. Auxquelles il semble bien que l'on puisse ajouter la monnaie (voir note 33).

SECONDE PARTIE

LA MODIFICATION DES ARBITRAGES DES INVESTISSEURS
SELON L'IMPORTANCE DU RISQUE GÉNÉRAL :
ESSAI D'INTERPRÉTATION THÉORIQUE

L'objet de cette seconde partie est de montrer que la théorie contemporaine des choix de portefeuille en incertitude est susceptible de fournir une explication simple des observations empiriques présentées dans la première partie de cet article.

En l'état actuel des choses, il n'a pas été possible d'effectuer un passage formalisé entre la théorie et les vérifications empiriques de la première partie; c'est pourquoi la partie théorique de l'article se situe après l'exposé des résultats empiriques, afin de ne pas assujettir ces derniers aux hypothèses très limitatives sur lesquelles repose la théorie des choix de portefeuille. On se limitera à montrer ici que cette théorie paraît être vérifiée au stade de ses conséquences, en admettant a priori la validité des hypothèses sur lesquelles elle repose.

Rappelons brièvement en quoi consiste la théorie des choix de portefeuille en incertitude (§A) avant d'essayer d'interpréter les résultats empiriques de la première partie au regard de cette théorie (§B).

A — LA THÉORIE DES CHOIX DE PORTEFEUILLE : RAPPEL

Supposant l'existence d'un marché secondaire parfait, la théorie contemporaine des choix de portefeuille propose une analyse de la détention d'actifs financiers en situation d'incertitude⁽⁴⁷⁾. L'avenir étant incertain, l'investisseur ne peut qu'anticiper la rentabilité future de ses actifs financiers. Il en résulte que pour le choix des actifs, la rentabilité espérée d'un portefeuille ne suffit pas pour déterminer une opportunité d'investissement. Il devient nécessaire de prendre en compte les écarts possibles entre le taux de rentabilité réalisé et le taux espéré, ce qui ajoute au critère de rentabilité espérée celui de risque.

Bien que bon nombre de travaux cherchent à perfectionner cette théorie, sa forme la plus simple paraît suffire pour déduire les principaux résultats utiles pour notre propos. Nous supposons donc qu'il n'existe que deux actifs : un actif sans risque et un actif risqué représenté par le portefeuille de marché qui élimine le risque non systématique⁽⁴⁸⁾. Sous certaines conditions⁽⁴⁹⁾, on peut remplacer le couple rendement espéré/risque par le couple espérance mathématique du rendement/écart-type du rendement, soit E/σ ⁽⁵⁰⁾. Sur la surface E/σ , la théorie s'est en outre dotée de deux instruments d'analyse

47. Les ouvrages de base sont MARKOWITZ (1959), SHARPE (1970) et MOSSIN (1973). En langue française, je tiens à signaler le chapitre 5 de l'ouvrage de LACQUE-LABARTHE (1980), qui donne un exposé clair et synthétique de l'essentiel de la théorie, ainsi que l'excellent ouvrage de JACQUILLAT et SOLNIK (1974), particulièrement le chapitre 4.

48. En effet, le « théorème de séparation » de TOBIN démontre que tout investisseur (quelles que soient sa richesse et son aversion pour le risque) détient à l'équilibre (position optimale) une combinaison qui lui est propre entre l'actif sans risque et tout portefeuille (dont le portefeuille de marché). C'est aussi une conséquence du M.E.D.A.F. (Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers).

49. Distribution normale du taux de rendement des actifs risqués ou bien fonction d'utilité quadratique de l'investisseur. Il n'est pas possible ici d'analyser les limites ou insuffisances de ces hypothèses.

50. Généralement, le taux de rendement d'un actif financier se définit par la somme des plus values en capital et du revenu de l'actif (intérêt, dividendes), rapportée au prix de l'actif. Le rendement d'un actif financier est considéré comme une variable aléatoire distribuée normalement, notée \tilde{R} . Le taux de rentabilité espéré est défini par l'espérance mathématique de ce rendement, soit :

$$E(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \tilde{R}_i$$

où chaque \tilde{R}_i représente un résultat possible et chaque p_i la probabilité associée à ce résultat, qui est supposée être la même dans le passé et le futur.

essentiels. La *frontière efficiente* et la *courbe d'indifférence* permettent en effet de déterminer la proportion que l'investisseur va détenir en actif risqué (ici, le portefeuille de marché) ou en actif non risqué (dont on suppose l'existence).

1. La frontière efficiente

A l'instant (t) , s'il n'existait pas d'actif sans risque, les choix que l'on peut qualifier d'efficients seraient nécessairement situés sur la courbe $F(t)$ du *Graphique IV*, qui représente les caractéristiques en termes de E/σ des portefeuilles « efficients » pouvant être constitués à partir des différents actifs existant sur le marché. En effet, chaque point de la courbe $F(t)$ donne le portefeuille de rentabilité maximale pour un risque donné, ou bien de risque minimal pour une rentabilité espérée donnée. Notons que le portefeuille de marché appartient à la courbe $F(t)$.

Mais, comme il existe un actif sans risque de rendement $R_0(t)$ et de risque $\sigma_0 = 0$, la droite $R_0(t)N(t)$ constitue la nouvelle frontière efficiente⁽⁵¹⁾. En effet, les portefeuilles composites (actif sans risque et portefeuille de marché) situés sur cette droite ont pour un risque donné une rentabilité supérieure à celle de tout autre portefeuille et pour une rentabilité espérée donnée un risque qui est inférieur aux autres portefeuilles possibles.

Les points situés à droite du point de tangence $M(t)$ ⁽⁵²⁾ correspondent à des situations dans lesquelles l'investisseur considéré emprunte au taux $R_0(t)$ pour investir en actif risqué en proportion supérieure à ses possibilités d'auto-financement⁽⁵³⁾. Les points de la droite $R_0(t)N(t)$ situés entre $R_0(t)$ et $M(t)$ correspondent à des portefeuilles composés à la fois de l'actif sans risque et de l'actif risqué, la proportion de ce dernier étant d'autant plus grande que le point considéré est proche de $M(t)$ ⁽⁵⁴⁾. En d'autres termes, un point se déplaçant de la gauche vers la droite sur la ligne $R_0(t)N(t)$ correspond à une proportion grandissante de l'actif risqué dans le portefeuille composite.

A ce stade de l'analyse, on a simplement précisé les différentes situations possibles sous l'hypothèse d'une axiomatique simple de la rationalité (risque minimum pour un rendement donné ou rendement maximum pour un risque donné). Mais nous ne pouvons pas encore déterminer la propor-

51. La droite R_0N , commune à tous les investisseurs, est obtenue très simplement en supposant que le portefeuille est constitué de l'actif sans risque en proportion $(1 - x)$ et du portefeuille de marché en proportion x . L'espérance mathématique de ce portefeuille composite est la moyenne pondérée des espérances mathématiques des deux actifs entrant dans la composition de ce portefeuille :

$$E(\tilde{R}) = (1 - x) \cdot R_0 + x \cdot E(\tilde{R}_m)$$

ou \tilde{R}_m est le rendement du portefeuille de marché. On peut également montrer que le risque du portefeuille composite est proportionnel au risque du portefeuille de marché :

$$\sigma = x \cdot \sigma_m$$

Ces deux relations permettent d'établir une relation linéaire entre la rentabilité espérée du portefeuille composite et son risque total :

$$E(\tilde{R}) = R_0 + A \cdot \sigma, \text{ avec } A = \frac{E(\tilde{R}_m) - R_0}{\sigma_m} \text{ (pente de la droite } R_0N)$$

Par ailleurs, on démontre que tout portefeuille efficient $[E(\tilde{R}), \sigma]$ appartenant à la droite R_0N est parfaitement corrélé avec le portefeuille de marché $[E(\tilde{R}_m), \sigma_m]$, soit $\text{cov}(\tilde{R}, \tilde{R}_m)/\sigma\sigma_m = 1$. Comme le coefficient bêta du portefeuille « efficient » est $\beta = \text{cov}(\tilde{R}, \tilde{R}_m)/\sigma\sigma_m$, on en déduit que, pour tout portefeuille appartenant à la droite R_0N , on a $\beta = \sigma/\sigma_m$. Par conséquent, l'équation

$$E(\tilde{R}) = R_0 + \frac{E(\tilde{R}_m) - R_0}{\sigma_m} \cdot \sigma$$

peut encore s'écrire $E(\tilde{R}) = R_0 + \beta [E(\tilde{R}_m) - R_0]$. On retrouve donc bien le « modèle de marché » de Sharpe-Lintner, montrant que le seul risque rémunéré est le risque systématique.

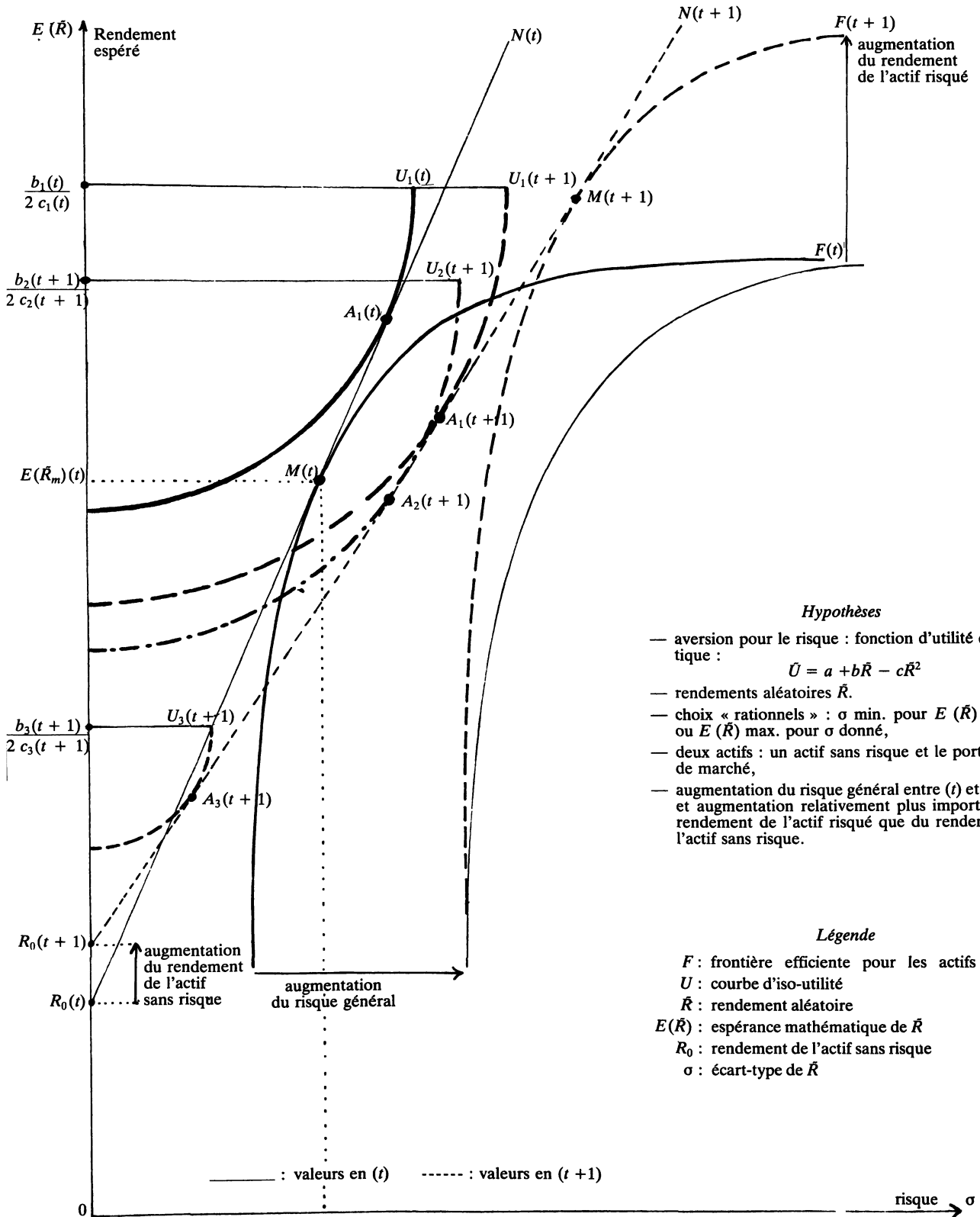
52. Le portefeuille correspondant au point $M(t)$ représente bien le portefeuille de marché de rendement $E(R_m)$ et de risque σ_m . En effet, bien que le niveau désiré du risque puisse être obtenu en prêtant ou en empruntant plus ou moins, tous les investisseurs investissent dans le même portefeuille de titres risqués. Ce portefeuille ne peut donc être formé que de tous les titres qui sont cotés en bourse. Il ne peut donc être que le portefeuille de marché.

53. Dans ce cas on a $x > 1$. On suppose donc ici que le taux sans risque est le même pour le prêteur et pour l'emprunteur.

54. Dans ce cas, on a $0 < x < 1$.

GRAPHIQUE IV

Modification entre (t) et (t + 1) des préférences des investisseurs lors d'une augmentation « exogène » du risque général
Cas de deux actifs



tion des actifs risqués et non risqués détenus par un investisseur quelconque, pour une raison évidente : nous ne connaissons pas ses préférences, sa plus ou moins grande aversion pour le risque. Les courbes d'indifférence vont permettre de lever cette indétermination.

2. Les courbes d'indifférence

L'hypothèse couramment faite selon laquelle l'utilité liée à un investissement financier est une fonction quadratique du rendement aléatoire de cet investissement, correspond à une attitude d'aversion pour le risque, la fonction étant concave (55). Une conséquence directe de cette hypothèse est que les points de même espérance d'utilité $E_0(\tilde{U})$ décrivent dans le plan E/σ une courbe d'indifférence convexe (ou courbe d'iso-utilité) qui est le quart sud-est d'un cercle dont le centre est situé sur l'axe des $E(\tilde{R})$ au point d'ordonnée $b/2c$, b et c étant les paramètres de la fonction d'utilité (56). Le rayon du cercle de la courbe d'indifférence est d'autant plus grand que $E_0(\tilde{U})$ est petit, l'ensemble des courbes d'indifférence de même centre mais de rayon variable représentant une même carte d'indifférence.

3. Le choix des proportions de l'actif sans risque et de l'actif risqué dans le portefeuille composite à l'instant (t)

Dans le plan E/σ , la droite $R_0(t) N(t)$ donne le domaine du « possible rationnel » alors que les courbes d'indifférence fixent les points d'égale espérance d'utilité. Le niveau maximum d'utilité compatible avec la « contrainte rationnelle $R_0(t) N(t)$ » est obtenu au point de tangence $A_1(t)$ entre la courbe d'indifférence $U_1(t)$ (centrée en $b(t)/2c(t)$) et la droite $R_0(t) N(t)$.

B — MODIFICATION ENTRE LES INSTANTS (t) ET (t + 1) DES CHOIX DES INVESTISSEURS

Assimilons maintenant l'actif sans risque aux obligations de plus haut rang (57) et l'actif risqué à un portefeuille composé par des obligations de bas rangs et d'actions. Les résultats empiriques de la première partie (« Economic Drift ») peuvent être classés en quatre cas (58) :

Modifications du marché entre t et t + 1	Augmentation du risque général	Baisse du risque général
Augmentation générale des rendements	$a > 1$ 26 % des cas	$a < 1$ 20 % des cas
Baisse générale des rendements	$a > 1$ 21 % des cas	$a < 1$ 33 % des cas

55. Voir SHARPE (1970), pp. 187-201 et ARROW (1974), pp. 90-109. Une fonction d'utilité quadratique peut s'écrire :

$$\tilde{U} = a + b \cdot \tilde{R} - c \cdot \tilde{R}^2 \quad (b \text{ et } c > 0)$$

où \tilde{U} est l'indice d'utilité lié au taux de rendement aléatoire \tilde{R} . L'utilité n'est définie que pour $U' > 0$, c'est-à-dire pour des rendements inférieurs à $c/2b$. Dans ce domaine de définition, on a toujours la condition $U'' = -2 \cdot c > 0$, ce qui signifie qu'en tout point de U , l'aversion pour le risque existe bien. Dans cet exposé dont l'objet se limite à illustrer les interprétations possibles, nous n'aborderons pas les critiques adressées aux fonctions d'utilité quadratique.

56. Voir SHARPE (1970), pp. 199-200. L'équation de la courbe d'indifférence déduite est la suivante :

$$\left[E(\tilde{R}) - \frac{b}{2c} \right]^2 + \sigma^2 = \frac{a - E_0(\tilde{U})}{c} + \frac{b^2}{4c^2}$$

- $E(\tilde{R})$: espérance mathématique du rendement du portefeuille
- σ : écart-type du rendement du portefeuille
- $E_0(\tilde{U})$: espérance mathématique de l'utilité du portefeuille
- a, b, c : paramètre de la fonction d'utilité quadratique (voir note 55).

Cette équation est donc bien celle d'un cercle centré au point $[b/2c, \sigma = 0]$ de l'axe des $E(\tilde{R})$.

57. Cette hypothèse n'est rigoureuse que pour le risque de défaut, que l'on peut raisonnablement supposer nul pour les obligations d'État par exemple. En outre, compte tenu des résultats exposés dans la note 33 de la Partie I, il semble aussi envisageable d'assimiler l'actif sans risque à la monnaie. R_0 serait alors le rendement non pécuniaire de la monnaie (service de liquidité).

58. Il est exceptionnel que les rendements des obligations de bas et de hauts rangs ne varient pas dans le même sens (voir le Tableau I de la Partie I). Rappelons que les observations empiriques portent sur les États-Unis (1857-1936), les données étant mensuelles.

La condition $a > 1$ ($a =$ pente de la Ligne Sigma) traduit une modification du choix des investisseurs en faveur de l'actif sans risque. La condition $a < 1$ traduit au contraire une modification des choix en faveur de l'actif risqué (obligations de bas rangs et actions). On se souvient également qu'à la condition $a > 1$ correspond une augmentation du risque général sur le marché financier, tandis qu'à la condition $a < 1$ correspond une baisse du risque général.

Il est à présent possible d'interpréter ces résultats à l'aide des concepts et instruments d'analyse rappelés ci-dessus. On se limitera à illustrer cette interprétation avec le premier cas (augmentation générale du risque en période de croissance généralisée des rendements). Cependant, des mêmes conclusions seraient obtenues avec les trois autres cas.

Imaginons donc entre les instants (t) et $(t + 1)$ une augmentation « exogène »⁽⁵⁹⁾ du risque général simultanément à une augmentation des rendements de l'actif sans risque et de l'actif risqué. Cette hypothèse peut se traduire sur le Graphique IV par un déplacement de la courbe $F(t)$ en $F(t + 1)$ et par une augmentation du rendement de l'actif sans risque de $R_0(t)$ à $R_0(t + 1)$.

Le nouveau point de tangence entre la droite $R_0 N$ et la courbe F se déplace donc de $M(t)$ en $M(t + 1)$. Notons que ce déplacement tient compte à la fois d'une augmentation du risque général (déplacement vers la droite de la courbe F) et d'un accroissement relativement plus grand du rendement de l'actif risqué que du rendement de l'actif sans risque (déplacement de la courbe F vers le haut, de telle manière que le rapport des ordonnées des points $M(t + 1)$ et $R_0(t + 1)$ soit supérieur au rapport des ordonnées des points $M(t)$ et $R_0(t)$), ce qui est conforme aux observations empiriques⁽⁶⁰⁾.

Le nouvel équilibre pour l'investisseur va se déplacer de $A_1(t)$ en $A_1(t + 1)$, point de tangence entre la nouvelle frontière efficiente $R_0(t + 1) N(t + 1)$ et une nouvelle courbe d'indifférence $U_1(t + 1)$ appartenant à la même carte d'indifférence que la courbe $U_1(t)$, c'est-à-dire ayant le même centre en $b_1(t)/2c_1(t)$. L'utilité espérée de l'investisseur diminue donc, sa nouvelle situation optimale étant caractérisée par un risque plus grand et un rendement espéré plus faible qu'en (t) .

On constate donc qu'entre (t) et $(t + 1)$ les *préférences* de l'investisseur (au sens de sa fonction d'utilité) restent inchangées, alors que ses *choix* (au sens de la proportion désirée d'actifs risqués et non risqués) se sont au contraire modifiés, puisqu'en $A_1(t + 1)$ l'individu cherchera à détenir une partie de son portefeuille en actif sans risque, alors qu'en $A_1(t)$, la part de l'actif sans risque dans le portefeuille composite est négative, l'individu empruntant au taux $R_0(t)$ pour acheter de l'actif risqué au-delà de ses possibilités d'autofinancement.

Par conséquent, ce déplacement ayant lieu dans le même sens pour tous les investisseurs, *on voit bien qu'une augmentation du risque général implique des arbitrages en faveur de l'actif sans risque lorsque le risque général du marché s'accroît*⁽⁶¹⁾. De la même manière, on pourrait montrer qu'une baisse générale du risque impliquerait des choix en faveur de l'actif risqué. Il est ici essentiel de voir que les *choix* des individus se modifient alors que leurs *préférences* (fonctions d'utilité) restent stables.

En d'autres termes, lorsque le risque augmente, l'investisseur cherche à se protéger en détenant une part plus grande d'actif sans risque dans son portefeuille, précisément parce qu'il cherche à garder stable le risque de son portefeuille, ou du moins à l'augmenter moins que le risque du marché.

59. Cette augmentation est « exogène » en ce sens qu'elle est supposée s'imposer à l'investisseur qui « subit » le marché.

60. En effet, rappelons qu'à une hausse du risque général est associée une augmentation du rapport j/j_p entre le rendement des obligations de rang le plus haut, ainsi qu'une baisse du cours moyen des actions (et donc, toutes choses égales d'ailleurs, une hausse de leur rendement associée à une hausse de la prime de risque contenue dans le taux d'actualisation). Une hypothèse implicite faite ici est donc que le rendement d'un actif est égal au rapport entre le revenu nominal (intérêts ou dividendes) et le cours du titre, l'élément plus-value n'intervenant pas. Cette hypothèse est sans doute acceptable pour une grande partie des investisseurs en obligations; elle est très restrictive pour les investisseurs en actions.

61. L'ajustement s'effectue ici par le *prix relatif* entre l'actif risqué et l'actif sans risque. Une augmentation moins forte du prix de l'actif risqué que de l'actif sans risque en période de hausse du risque général (on suppose toujours que la situation est caractérisée par une hausse générale des rendements sur le marché financier) conduit à une part moins grande de l'actif risqué dans le portefeuille.

En $A_1(t+1)$, l'investisseur est-il parvenu à maintenir constant le risque de son portefeuille en dépit de l'augmentation de risque général? Non, car l'abscisse du point $A_1(t+1)$ est supérieure à celle du point $A_1(t)$. Peut-il y parvenir? Oui, si les paramètres b et c de sa fonction d'utilité se modifient d'une manière appropriée de telle manière que $A_1(t+1)$ se déplace en $A_2(t+1)$ *le long* de la droite $R_0(t+1)$ $N(t+1)$. Il faut souligner qu'en $A_2(t+1)$, l'aversion absolue pour le risque reste égale à sa valeur en $A_1(t+1)$ ⁽⁶²⁾. Cette possibilité d'une variation au cours du temps des paramètres de la fonction d'utilité augmente donc la possibilité qu'ont les investisseurs de maintenir stable le risque de leur portefeuille en période de variation du risque général, sans pour autant que leur aversion pour le risque ne soit modifiée ⁽⁶³⁾.

Mais, bien entendu, l'aversion absolue pour le risque est elle-même susceptible de varier au cours du temps sous l'effet d'une augmentation exogène du risque général, par des effets de contagion ou d'exagération. S'il en était ainsi, on pourrait parvenir à un point d'équilibre tel que $A_3(t+1)$ ⁽⁶⁴⁾.

CONCLUSION

La théorie des choix de portefeuille en incertitude permet une interprétation simple et pourtant très structurée des modifications observées des choix des investisseurs selon les conditions du marché. Trois phénomènes peuvent expliquer pourquoi, lorsque le risque général augmente, les individus ont une préférence *apparente* ⁽⁶⁵⁾ accrue pour les titres les plus sûrs (obligations de plus hauts rangs), tandis que lorsque le risque général sur le marché diminue, les individus manifestent dans leur ensemble une préférence *apparente* accrue pour les titres les plus risqués (obligations de bas rangs et actions) ⁽⁶⁶⁾ :

1) Avec une aversion stable pour le risque et une fonction d'utilité stable, la théorie peut expliquer les modifications apparentes des préférences des investisseurs, *ces derniers se bornant à adapter leurs choix aux conditions nouvelles offertes par le marché*;

2) Il est aussi possible que *les paramètres des fonctions d'utilité varient au cours du temps* en fonction des nouvelles conditions du marché, sans pour autant nécessiter une modification de l'aversion absolue pour le risque;

3) Enfin, il est encore possible que *l'aversion absolue pour le risque augmente en période de hausse du risque et s'abaisse en période de baisse du risque*; cette hypothèse ne saurait être écartée en l'état actuel des choses.

62. ARROW (1954), p. 94 définit l'aversion *absolue* pour le risque par la grandeur suivante :

$$\alpha = - U''(\bar{R})/U'(\bar{R})$$

Pour une fonction d'utilité quadratique du type

$$\bar{U} = a + b\bar{R} - c\bar{R}^2 \quad (b \text{ et } c > 0),$$

on obtient

$$\alpha = \frac{1}{b/2c - \bar{R}}$$

Cette valeur montre que si la variation de $b/2c$ est égale à la variation de \bar{R} , la variation absolue pour le risque mesurée par α reste stable. Sur le Graphique I, on a cette condition, avec $\Delta \bar{R} = \Delta E(\bar{R}) = \Delta(b/2c)$. L'aversion *relative* pour le risque ne sera pas abordée ici.

63. Encore faudrait-il préciser *pourquoi* les paramètres des fonctions d'utilité peuvent se modifier au cours du temps, et en fonction de quels facteurs.

64. En effet, entre $A_1(t+1)$ et $A_3(t+1)$, la grandeur $b/2c$ a diminué plus que le rendement espéré $E(\bar{R})$. Là encore, il reste à démontrer et à préciser pourquoi l'aversion pour le risque pourrait être une fonction croissante du risque général.

65. Les modifications des préférences sont *apparentes* dans la mesure où elles sont observées. Elles ne peuvent être considérées comme des modifications réelles effectives que dans la mesure où les fonctions d'utilité varient au cours du temps.

66. Les raisonnements suivis dans cette partie ne sont valables que si l'on peut assimiler l'actif sans risque aux obligations les plus sûres. C'est là une hypothèse qui est peut être moins forte qu'elle peut paraître, dans la mesure où ce qui importe est que les investisseurs considèrent (à tort ou à raison) subjectivement que le risque afférent à ces actifs est négligeable.

Au regard des résultats empiriques présentés dans la première partie, il n'est pas envisageable de prendre position en faveur de l'une ou de l'autre des trois interprétations énoncées, qui d'ailleurs ne s'excluent pas entre elles. Des progrès importants doivent être accomplis avant d'être en mesure d'apprécier les importances respectives des trois phénomènes possibles dégagés par la théorie.

Cependant, on doit souligner le fait que la première hypothèse, qui est la plus restrictive (stabilité des fonctions d'utilité et de l'aversion absolue pour le risque) paraît — à ce stade de l'analyse — suffire pour expliquer les observations empiriques, ceci devant être considéré comme un argument en faveur de la théorie.

BIBLIOGRAPHIE

- ARROW (K.J.) : (1974) — *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1974 (1^{re} Éd. en 1970), 278 p.
- BANK CREDIT ANALYST (The) : (1975) — *The Outlook 1975*, A supplement to the *Bank Credit Analyst*, Montreal, Canada.
- BENSON (E.D.) and ROGOWSKI (R.J.) : (1978) — The Cyclical Behavior of Risk Spread on Municipal Issues, *Journal of Money, Credit and Banking*, August 1978, pp. 348-62.
- BIERMAN (H.J.) and HASS (E.J.) : (1975) — An Analytic Model of Bond Risk Differentials, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, décembre 1975, pp. 757-74.
- BIERWAG (G.O.) : (1978) — Measures of Duration, *Econ. Inquiry*, Vol. 16, N° 4, Oct. 1978, pp. 497-507.
- BRANCH (B.) : (1976) — The Predictive Power of Stock Market Indicators, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1976, pp. 269-85.
- COHAN (A.) : (1971) — *Essays on Interest Rates*, voir Chapitre 5 : « The Ex-Ante Quality of Direct Placements 1951-1961, Vol. II, Guttentag, Ed., N. Y. 1971.
- COOK (T.Q.) and HENDERSHOTT (P.H.) : (1978) — The Impact of Taxes, Risk and Relative Security Supplies on Interest Rate Differentials, *The Journal of Finance*, Sept. 1978, pp. 1173-86.
- COX (J.C.), INGERSOLL (J.F.) and ROSS (S.A.) : (1979) — Duration and the Measurement of Basis Risk, *Journal of Business*, vol. 52, N° 1, Jan. 1979, pp. 51-61.
- DE BOISSIEU (C.) : (1976) — La structure des Taux d'Intérêt, Paris, 1976, *Economica*.
- DOW-JONES INVESTOR HANDBOOK (The) : (1975). — Publication annuelle de la *Dow-Jones Company* (U.S.A.).
- FAIR (R.C.) and MALKIEL (B.G.) : (1971) — The Determination of Yield Differentials between Debt Instrument of the Same Maturity, *Journal of Money, Credit and Banking*, Nov. 1971, pp. 733-49.
- FAMA (E.F.) : (1965) — The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, January 1965, pp. 34-105.
- FISHER (L.) : (1959) — Determinants of Risk Premiums on Corporate Bonds, *The Journal of Political Economy*, June 1959, pp. 217-37.
- GIRAUD (C.), MONTIER (B.) et de MURARD (G.) : (1974) — L'actualisation sur le marché des actions, *Analyse Financière*, quatrième trimestre 1974, pp. 75-83.
- HEINS (A.) : (1962) — The Interest Rate Differential Between Revenue Bonds and General Obligation Bonds : A Regression Model, *National Tax Journal*, December 1962, pp. 399-405.
- HICKMAN (W.B.) : (1958) — Corporate Bond Quality and Investment Experience, *NBER, Princeton University Press*, 1958, 211 p.
- JACQUILLAT (B.) et SOLNIK (B.) : (1974) — Les marchés financiers et la gestion de portefeuille, *Dunod*, 1974, Paris, 179 p.
- JAFFEE (D.M.) : (1975) — Cyclical Variations in the Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Monetary Economics*, August 1975, pp. 309-25.
- JEN (F.C.) and WERT (J.E.) : (1967) — The Effects of Call Risk on Corporate Bond Yields, *Journal of Finance*, December 1967, pp. 637-51.

- JOHNSON (R.E.) : (1967) — Term Structure of Corporate Bond Yields as a Function of Risk of Default, *The Journal of Finance*, May 1967, pp. 313-50.
- KIDWELL (D.S.) and KOCH (T. W.) : (1982) — The Behavior of the Interest Rate Differential Between Tax-Exempt Revenue and General Obligation Bonds : A Test of Risk Preferences and Market Segmentation, *The Journal of Finance*, Vol. 37, N° 1, March 1982, pp. 73-85.
- KIDWELL (D.S.) and TRZCINKA (C.A.) : (1979) — The Risk Structure of Interest Rates and the Pe Central Crisis, *Journal of Finance*, June 1979, pp. 751-60.
- KRAFT (J.) and KRAF (A.) : (1977) — Determinants of Common Stock Prices : a Time Series Analysis, *The Journal of Finance*, May 1977, pp. 417-25.
- LACQUE-LABARTHE (D.) : (1980) — Analyse Monétaire, *Dunod*, Paris, 1980, 474 p. Voir Chapitre 5 « La détention d'actifs financiers », pp. 162-201.
- MACAULAY (F.R.) : (1938) — Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, *National Bureau of Economic Research*, New York, 1938, 240 p. + 351 p. d'annexes numériques.
- MARKOWITZ (H.M.) : (1959) — Portfolio Selection — efficient diversification of investment, a Cowles Foundation Monograph (N° 16), *Yale University Press*, 1970, 351 p.
- MOSSIN (J.) : (1973) — Theory of Financial Markets, *Englewood Cliffs*, N.J., Prentice Hall, 1973.
- PEAVY (J.W.) and EDGAR (M.S.) : (1982) — Long-Run Implications of Industrial Bond Ratings as Risk Surrogates, *Journal of Economics and Business*, 34, pp. 331-41.
- PINCHES (G.E.) and SINGLETON (J.C.) : (1978) — The Adjustment of Stock Prices to Bond Rating, *The Journal of Finance*, March 1978, pp. 29-44.
- POGUE (T.F.) and SOLDOVSKY (R.M.) : (1969) — What's in a Bond Rating? *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1969, pp. 201-28.
- PRAT (G.) : (1982) — La Bourse et la Conjoncture Économique, Chap. IV : Le Risque Financier Général et le Cours Moyen des Actions, *Economica*, 1982, Paris, 315 p.
- SHARPE (W.F.) : (1970) — Portfolio Theory and Capital Markets; *Mc Graw-Hill Book Company*, New York, 1970, 316 p.
- SILBERLING (N.J.) : (1943) — The Dynamic of Business, *Mc Graw Hill Book*, New York, 759 p.
- SLOANE (P.E.) : Determinants of Bond Yield Differentials : 1954 to 1959 in (1967) — « Financial Markets and Economic Activity, *Hester (D.D.) and Tobin (J.) Editors*, 1967, New York, pp. 189-245.
- SOLDOVSKY (R.M.) : (1968) — Yield Risk Performance Measurement, *Financial Analysts Journal*, Sept.-Oct. 1968, pp. 130-39.
- SOLDOVSKY (R.M.) and MILLER (R.L.) : 1969 — Risk Premium Curves for Different Class of Long Term Securities, 1950-1966, *The Journal of Finance*, June 1969, pp. 429-45.
- SWENSON (P.-R.) : (1974) — The Cyclical Behavior of the Net Interest Cost Differential Between General Obligation Bonds and Revenue Bonds, *National Tax Journal*, March 1974, pp. 23-40.
- VAN HORNE (J.-C.) : (1970) — Function and Analysis of Capital Market Rates, Englewood Cliffs, N.J., *Prentice-Hall Inc*, 1970.
- YAWITZ (J.B.) : (1978) — Risk Premia on Municipal Bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sept. 1978, pp. 475-85.