

JEAN-LUC CHASSÉ

JEAN-MARIE LEGAY

**Étude des courbes de croissance de la population de quelques communes  
de la communauté urbaine de Lyon (Courly) de 1876 à 1975**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 121, n° 3 (1980), p. 143-152

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1980\\_\\_121\\_3\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1980__121_3_143_0)

© Société de statistique de Paris, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

### III

## ARTICLES

# ÉTUDE DES COURBES DE CROISSANCE DE LA POPULATION DE QUELQUES COMMUNES DE LA COMMUNAUTÉ URBAINE DE LYON (COURLY) DE 1876 A 1975

Jean-Luc CHASSÉ et Jean-Marie LEGAY

Laboratoire de biométrie — Université LYON 1

*Les courbes de croissance des communes de la Courly peuvent être classées en quatre types. Pour des communes des différents types nous essayons de décrire la croissance par le modèle de Volterra-Kostitzin. Si ce modèle, qui généralise les modèles exponentiel et logistique, fournit de bonnes descriptions, ses paramètres ne permettent pas de discriminer les types de croissance. Notre interprétation est que nous sommes pour ces communes (sauf Lyon) dans une phase encore initiale de croissance et que, si des effets limitants ou inhibiteurs existent déjà, la taille atteinte par ces communes ne permet pas encore leur expression objective lors de l'ajustement.*

*The growth curves of the communes of La Courly can be classified according to four types. For communes of different types, we try to describe their growth through the Volterra-Kostitzin model. Although this model, which generalizes the exponential and logistic models, gives good descriptions, its parameters do not permit to discriminate between the growth types. Our interpretation is that we are, regarding these communes (except for Lyon), in a still initial stage of growth, and that, if limiting and inhibiting effects already exist, the size attained by these communes does not yet permit their objective expression during the adjustment.*

*Die Wachstumskurven der Gemeind von La Courly können in vier Typen eingeteilt werden : Für die Gemeinden der verschiedenen Typen versuchen wir das Wachstum mit dem Modell von Volterra-Kostizin zu beschreiben. Wenn dieses Modell, das die exponentiellen und logistischen Modelle verallgemeinert, gute Beschreibungen gestattet, seine Parameter gestatten nicht die Wachstumstypen zu unterscheiden. Unsere Erklärung ist, dass wir für diese Gemeinden (mit Ausnahme von Lyon) in einer Anfangsphase des Wachstums sind und wenn diese beschränkenden und hindernden Tatsachen bestehen, die schon erreichte Grösse dieser Gemeinden gibt noch nicht einen objektiven Ausdruck hinsichtlich ihrer Anpassung.*

## I — INTRODUCTION

La communauté urbaine de Lyon, instance administrative créée le 1<sup>er</sup> janvier 1969, est constituée de 55 communes représentant, en 1975, une population de 1 120 805 habitants pour une superficie de 48 721 hectares.

La Courly recouvre une très grande diversité :

— quantitative : superficie, nombre d'habitants, densité de population des communes... (ainsi en 1975 Lyon représente 40 % de la population totale).

— qualitative : activités, mode d'habitat, composition socio-professionnelle, perception de l'environnement.

C'est dire que nous sommes en présence d'un système complexe, multivarié.

Nous avons étudié, en relation avec un contrat dans le domaine de l'écologie urbaine [1], l'évolution dans le temps d'un des caractères quantitatifs : *la taille de population* de chaque commune, à partir des 17 recensements (source I.N.S.E.E.) portant sur une période de 100 ans, de 1876 à 1975.

Notre objectif a été de nous intéresser davantage à la forme de l'évolution qu'aux aspects quantitatifs de l'évolution des communes. D'un point de vue purement démographique les 128 habitants « gagnés » par la petite commune de Curis-au-Mont d'Or en 100 ans sont négligeables par rapport aux 107 502 « gagnés » par Villeurbanne durant la même période. Pourtant nous avons accordé, *a priori*, le même intérêt à la forme de la courbe de croissance de la population de Curis-au-Mont d'Or qu'à celle de Villeurbanne. L'analyse des données nous a ainsi permis de définir des types de croissance et de classer les communes selon ces types [1]. Pour ce faire nous avons utilisé des techniques classiques d'analyse multivariée : l'analyse des correspondances [2] et une méthode de classification non hiérarchique descendante [3].

L'emploi de ces méthodes est très lié à notre point de vue. Nous n'avons pas voulu faire œuvre de démographes (ce que nous ne sommes pas), mais aborder l'étude de la population de la Courly en utilisant des techniques appliquées aujourd'hui à la dynamique des populations, que celles-ci soient constituées d'organismes vivants (plantes ou animaux), ou d'objets biologiques (cellules, organites, macromolécules...).

Nous avons montré qu'il était possible de classer en un nombre restreint de catégories (quatre) les courbes de croissance des communes de la Courly. La figure 1 illustre cette classification dans le plan des deux premiers facteurs F1 et F2 qui représentent 97 % de l'inertie totale. Le facteur F1 oppose les communes à croissance faible aux communes à croissance forte; le facteur F2 sépare Villeurbanne et l'oppose aux communes à croissance tardive. Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les courbes de croissance de quelques communes appartenant aux différentes catégories mises en évidence, en résumant leur description à un modèle.

## II — MÉTHODES

Les modèles qui ont été le plus couramment utilisés en démographie sont le modèle exponentiel (Malthus, 1798) ou logistique (Verhulst, 1838), ajustés *a priori* et utilisés parfois ensuite comme modèles prédictifs.

Nous essayerons de décrire les croissances par le modèle de Volterra-Kostitzin que nous avons déjà utilisé en dynamique de population [4] :

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 - cN \int_0^t N(\tau) d\tau \quad (1)$$

$N$  représente la taille de la population

$t$  le temps

$a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes.

La relation (1) nous indique la forme générale du modèle, mais il est clair que nous pourrions utiliser des sous-modèles de (1) obtenus lorsque un ou deux des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont nuls. Les plus connus des sous-modèles sont précisément les modèles exponentiel ( $b = c = 0$ ) et logistique ( $c = 0$ ). Historiquement le modèle de Volterra-Kostitzin a été conçu pour rendre compte de l'évolution de populations en *milieu limité et avec intoxication du milieu*, ce qui lui confère un intérêt très actuel. L'une de ses applications les plus connues, sous ces hypothèses (qui impliquent que les trois paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  soient positifs), est son utilisation par Kostitzin lui même dans l'étude de la croissance embryonnaire [5].

Mais l'intérêt général de ce modèle est de pouvoir rendre compte, dans des situations très variées, de plusieurs types de courbes de croissance qui correspondent aux diverses combinaisons possibles des paramètres suivant leur état (nul, positif, négatif).

Nous nous proposons de décrire, en utilisant ce modèle, la croissance des communes suivantes : Bron, Caluire, Lyon, Vaulx-en-Velin, Vénissieux, Villeurbanne. Ces six communes représentent environ 70 % de la population totale de la Courly. Elles appartiennent aux quatre catégories suivantes, selon notre classification :

- Catégorie I : Lyon;
- Catégorie II : Caluire;
- Catégorie III : Bron, Vaulx-en-Velin, Vénissieux;
- Catégorie IV : Villeurbanne.

#### *Technique d'ajustement au modèle*

Les paramètres ont été estimés par une méthode des « moindres carrés » non linéaire. La minimisation de la somme des carrés des écarts entre valeurs calculées et observées a été obtenue par l'algorithme de Gauss-Marquardt (modifié par Fletcher [6]), adapté pour les modèles dynamiques exprimés sous forme implicite de systèmes différentiels [7]. On peut trouver dans Pavé [8] un exposé détaillé des techniques employées.

Pour toutes les communes nous avons utilisé les unités suivantes :

- unité de population : 1 000 habitants
- unité de temps : 10 ans.

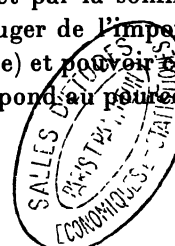
L'existence d'une dépression aux recensements de 1946 et 1954, due à la guerre, modifie profondément (pour cette période) l'allure des courbes de croissance pour l'ensemble de la Courly et pour Lyon. Pour les autres communes cet effet est beaucoup moins net. Nous avons donc, pour l'ajustement des données de la ville de Lyon, « éliminé » les deux valeurs correspondantes.

En outre pour certaines communes la description n'a pas débuté en 1876. C'est le cas de Vénissieux pour laquelle on observe une première phase décroissante de 1876 à 1896, date à partir de laquelle nous avons effectué l'ajustement. De même Vaulx-en-Velin présente une population stable jusqu'en 1906.

La qualité de l'ajustement peut être appréciée graphiquement et par la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées et calculées (SCE). Pour juger de l'importance de cette somme des carrés des écarts (qui est liée à la taille de la commune) et pour pouvoir comparer les ajustements nous avons défini un indice d'écart. Cet indice correspond au pourcentage  $\alpha$  de variation à affecter à chaque point expérimental  $n_t$  et tel que :

$$\sum_t (n'_t - n_t)^2 = \text{SCE avec } n'_t = n_t + \alpha n_t$$

Le calcul de cet indice est immédiat puisque l'on a  $\alpha^2 = \frac{\text{SCE}}{\sum_t n_t^2}$ .



## III — RÉSULTATS

Les représentations graphiques des ajustements sont fournies par la figure 2. Les estimations des paramètres, les sommes des carrés des écarts et les indices d'écart sont les suivants (tableau 1) :

TABLEAU 1

*Estimations des paramètres (a, b, c), somme des carrés des écarts entre valeurs observées et calculées (SCE) et indices d'écart*

Commune et sa catégorie	a	b	c	SCE	Indice d'écart $\alpha$
Lyon (I) . . . . .	0,0490	-0,00023	0,000058	2 102	2,3 %
Caluire (II) . . . . .	-0,0096	-0,00279	-0,001939	32	7,1 %
Bron (III) . . . . .	0,3140	0,07706	-0,029320	115	14,7 %
Vaulx (III) . . . . .	1,6700	0,86825	-0,409850	95	20,3 %
Vénissieux (III) . . . . .	0,1670	-0,01393	0,001718	82	9,0 %
Villeurbanne (IV) . . . . .	0,7480	0,01133	-0,001150	473	7,8 %

Nous pouvons considérer que la qualité des ajustements est bonne dans l'ensemble, très bonne pour Lyon, un peu moins bonne pour Vaulx-en-Velin.

## IV — DISCUSSION

L'emploi du modèle de Volterra-Kostitzin devait, nous le pensions, permettre de relier la typologie de croissance aux valeurs estimées pour les paramètres (a, b, c), correspondance qui a déjà été notée dans de situations différentes (courbes de synthèse de divers ARN de transfert [8]). Or l'examen du tableau 1, même si les ajustements ont été effectués pour peu de communes, montre qu'on ne trouve pas cette équivalence; il n'est qu'à constater les estimations pour des communes considérées comme proches : Vaulx-en-Velin et Vénissieux.

A notre avis il faut, compte tenu de la qualité descriptive obtenue, nous interroger sur deux points :

- le choix du modèle,
- ses « vertus » prédictives.

Ces deux points ne sont évidemment pas indépendants.

Pour illustrer cette discussion nous allons considérer l'évolution de la population totale de la Courly (comptes de 1936 à 1954 exclus). L'ajustement au modèle de Volterra-Kostitzin conduit au résultat suivant :

$$a_1 = 0,347 \quad b_1 = 0,000455 \quad c_1 = -0,000028$$

$$SCE = 10632 \quad \text{Indice d'écart} = 4 \%$$

L'ajustement est donc de très bonne qualité. On constate que le paramètre  $c$  semble proche de zéro; peut-être est-il possible de se contenter du sous-modèle dans lequel ce paramètre est nul, c'est-à-dire la loi logistique? On obtient alors :

$$a_2 = 0,245 \quad b_2 = 0,000205$$

$$SCE = 18069 \quad \text{Indice d'écart} = 4,9 \%$$

L'ajustement est encore de très bonne qualité.

Quel modèle choisir? Le premier doit être rejeté en tant que modèle prédictif puisque  $-c$  étant négatif — il conduit à une population de taille infinie. Le deuxième, modèle logistique, conduit à prévoir la stabilité de la population à 1 200 000 individus ce qui est sans intérêt et probablement faux. Rien, à partir des données, ne nous autorise à dire que la population de la Courly tende vers une limite. On voit bien ici que la qualité de l'ajustement au modèle logistique ne peut être un critère de validité de l'hypothèse logistique.

Formulons maintenant une hypothèse : la population de la Courly finira par décroître comme celle de Lyon. En considérant un modèle de Volterra Kostitzin dans lequel  $c$  est fixée arbitrairement à la valeur 0,000005 on obtient :

$$a_3 = 0,187 \qquad b_3 = 0,000105 \qquad c_3 = 0,000005 \text{ (fixé)}$$

$$\text{SCE} = 13816 \qquad \text{Indice d'écart} = 4,3 \%$$

L'ajustement est légèrement meilleur que celui obtenu pour le modèle logistique.

Les courbes correspondantes sont représentées sur la figure 3. Nous avons également porté sur cette figure le simple modèle exponentiel :

$$a = 0,095$$

$$\text{SCE} = 32968 \qquad \text{Indice d'écart} = 6,6 \%$$

L'ajustement est moins bon mais encore très acceptable.

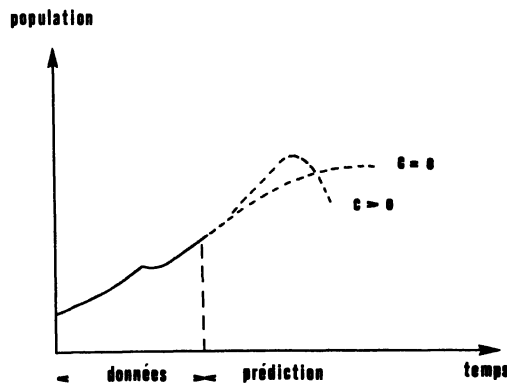
Si l'on examine le critère « qualité de l'ajustement » on observe :

	Indice d'écart
Modèle exponentiel ( $b = c = 0$ )	6,6 %
Modèle logistique ( $c = 0$ )	4,9 %
Modèle Volterra-Kostitzin $c > 0$	4,3 %
$c < 0$	4,0 %

Le choix du modèle ne peut donc être fondé sur le seul critère de qualité de l'ajustement. Si l'on souhaite un modèle descriptif il faut sans doute choisir le plus simple, qui dans cet exemple serait... le modèle linéaire :

$$N = 383,7 + 64,32 t$$

qui fournit une somme des carrés des écarts égale à 10638 (Indice d'écart = 3,7 %), et dont l'apparente adéquation n'est que le résultat de toute une série de compensations. Si l'on désire un modèle prédictif, nous sommes ici en présence d'une impossibilité d'un choix *objectif* de la prévision  $c = 0$  ou  $c > 0$ . Cette impossibilité du choix objectif est, à notre sens, liée au fait que nous sommes actuellement dans la phase initiale de la croissance :



## IV — CONCLUSION

L'étude des courbes de croissance de la population des communes de la Courly nous a permis, lors d'un précédent travail, de définir un certain nombre de types de croissance. Nous avons ensuite essayé de caractériser chacun de ces types par des combinaisons particulières des paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  du modèle de Volterra-Kostitzin. Or si ce modèle décrit bien les courbes de croissance il ne discrimine pas (sauf Lyon et Caluire), les types. Notre interprétation est que nous sommes pour toutes ces communes (à l'exception de Lyon) dans une phase encore initiale de croissance et que si les effets limitants (paramètre  $b$ ) ou inhibiteurs (paramètre  $c$ ) existent déjà, la taille actuellement atteinte par ces communes ne permet pas leur expression objective au niveau de l'ajustement. Dès lors toute prédiction sur la forme ou la durée de la croissance de la population de ces communes n'est pas fondée.

Par contre pour Lyon, commune démographiquement mûre dans le cadre d'un certain type de développement, pour laquelle le modèle de Volterra-Kostitzin est très explicatif, on devrait prévoir au moins à court terme la poursuite d'un recul démographique.

Nous en profitons pour souligner l'intérêt du modèle de Volterra Kostitzin en dynamique de populations et le caractère arbitraire d'une limitation aux modèles exponentiel et logistique, présentés le plus souvent en termes d'alternative.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Recherches préliminaires d'Écologie urbaine sur la Communauté Urbaine de Lyon. Rapport au Comité « Espace et cadre de vie », Ministère de l'Environnement et du cadre de vie.
- [2] FAGES, R. 1978. Journées de la Société française de classification, p. 99.
- [3] BENZECRI, J.-P. 1973. Analyse des données. Dunod, Paris.
- [4] CHASSÉ J.-L., LEGAY J.-M., PAVÉ A. 1977. Le modèle de Volterra-Kostitzin en dynamique des populations. Ajustement et interprétation des paramètres. Ann. Zool. Ecol. anim., 9 (3), 425-441.
- [5] KOSTITZIN V. A. 1937. Biologie mathématique. A. Colin, Paris.
- [6] FLETCHER R. 1970. A new approach to variable metric algorithm. Comp. Journ. 13, 317-322.
- [7] BARD Y. 1974. Non linear parameters estimation. Academic Press, New York.
- [8] PAVÉ A. 1980. Contribution à la théorie et à la pratique des modèles mathématiques pour l'analyse dynamique des systèmes biologiques. Étude de quelques cas typiques en Biologie cellulaire et moléculaire. Thèse, Lyon.

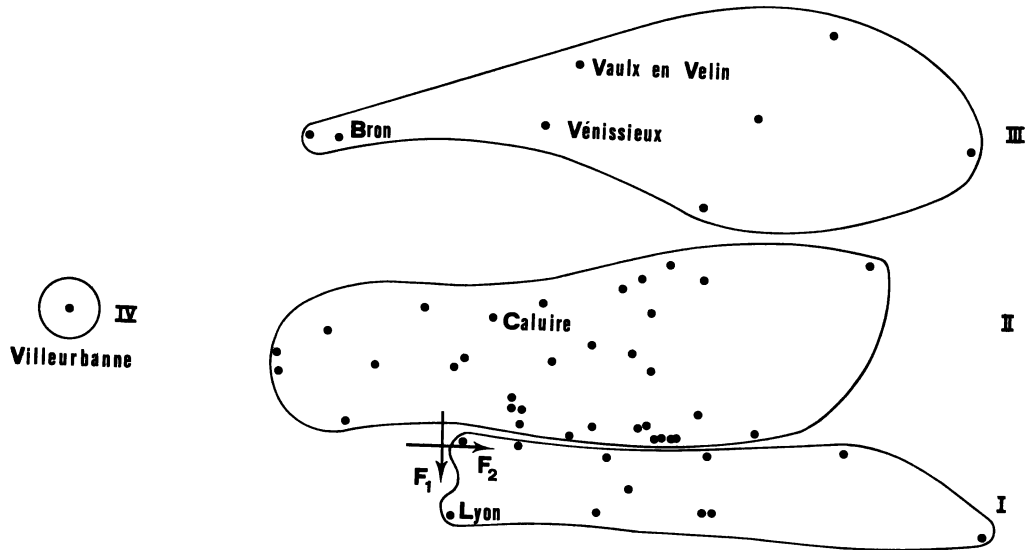


FIG. 1. — Représentation des communes de la Courly dans l'espace des deux premiers facteurs ( $F_1$ ,  $F_2$ ) de l'analyse des correspondances et catégories de communes (I, II, III, IV) déterminées par classification automatique

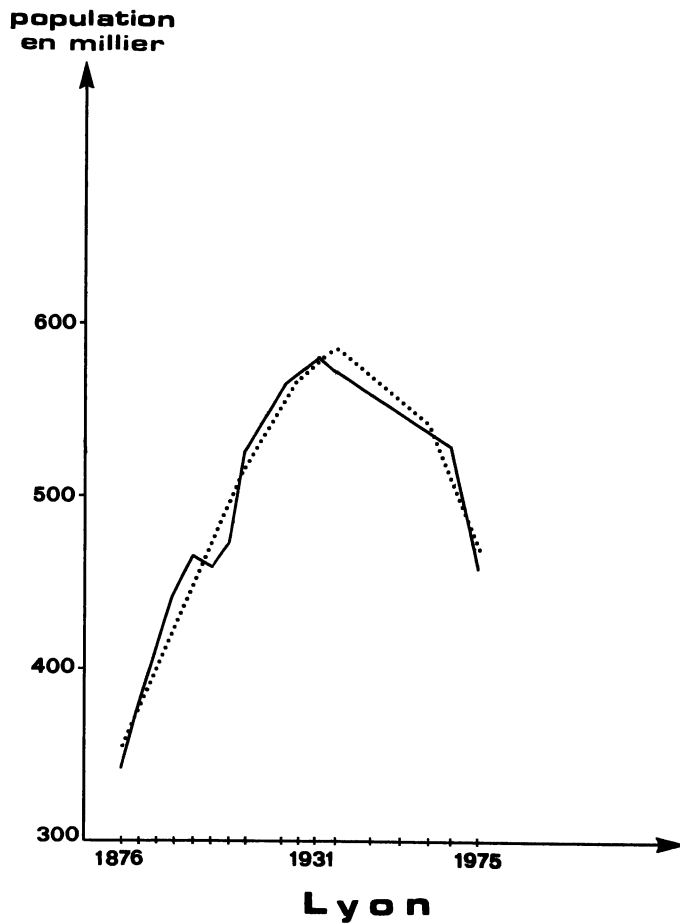
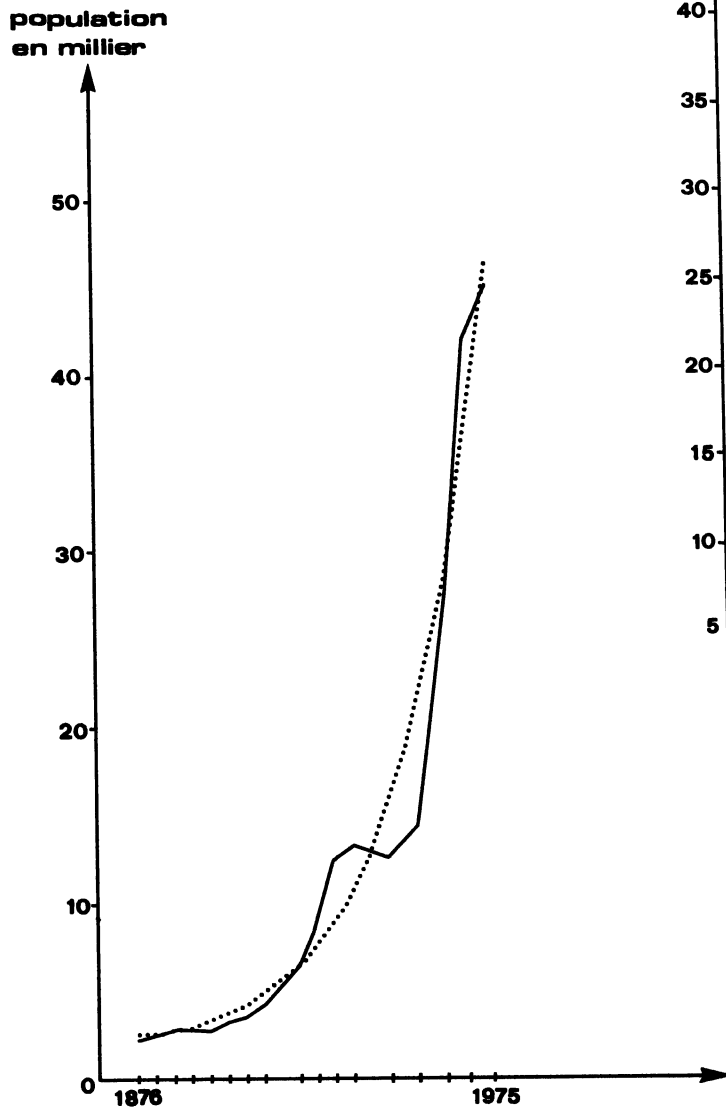
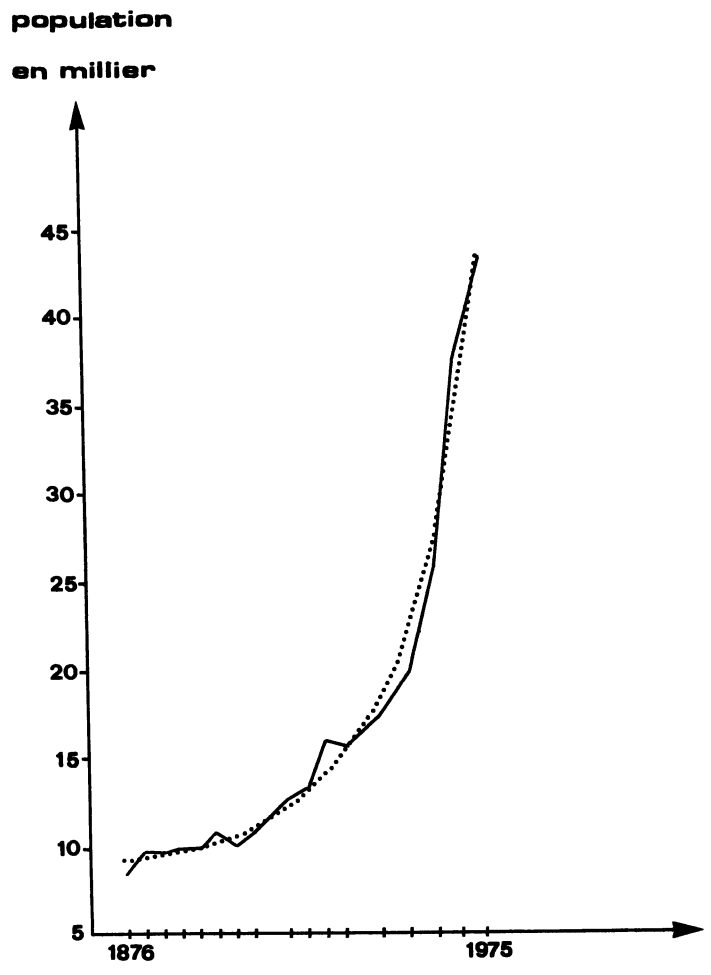


FIG. 2. — Évolution de la population de différentes communes de la Courly (trait plein). Ajustement au modèle de Volterra Kostitzin (pointillé)



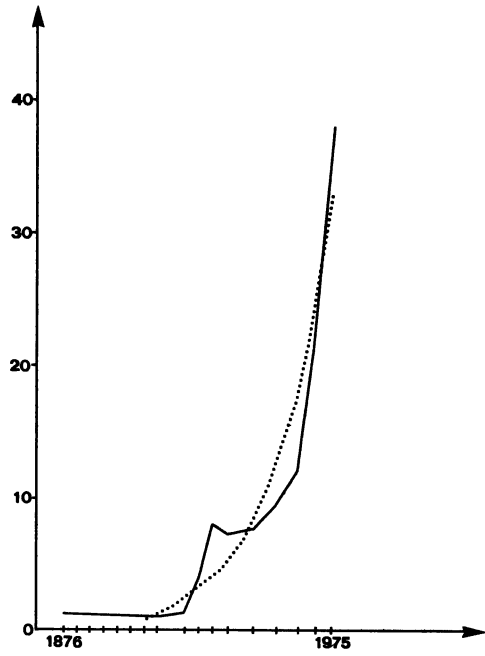


**Bron**



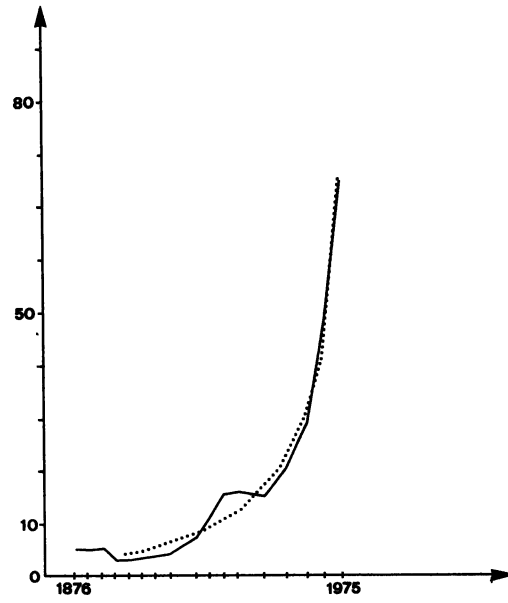
**Caluire**

population  
en millier



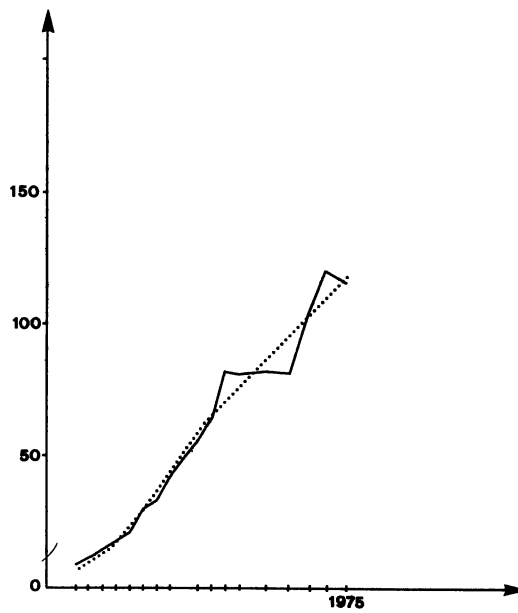
**Vaux en Velin**

population  
en millier



**Vénissieux**

population  
en millier



**Villeurbanne**

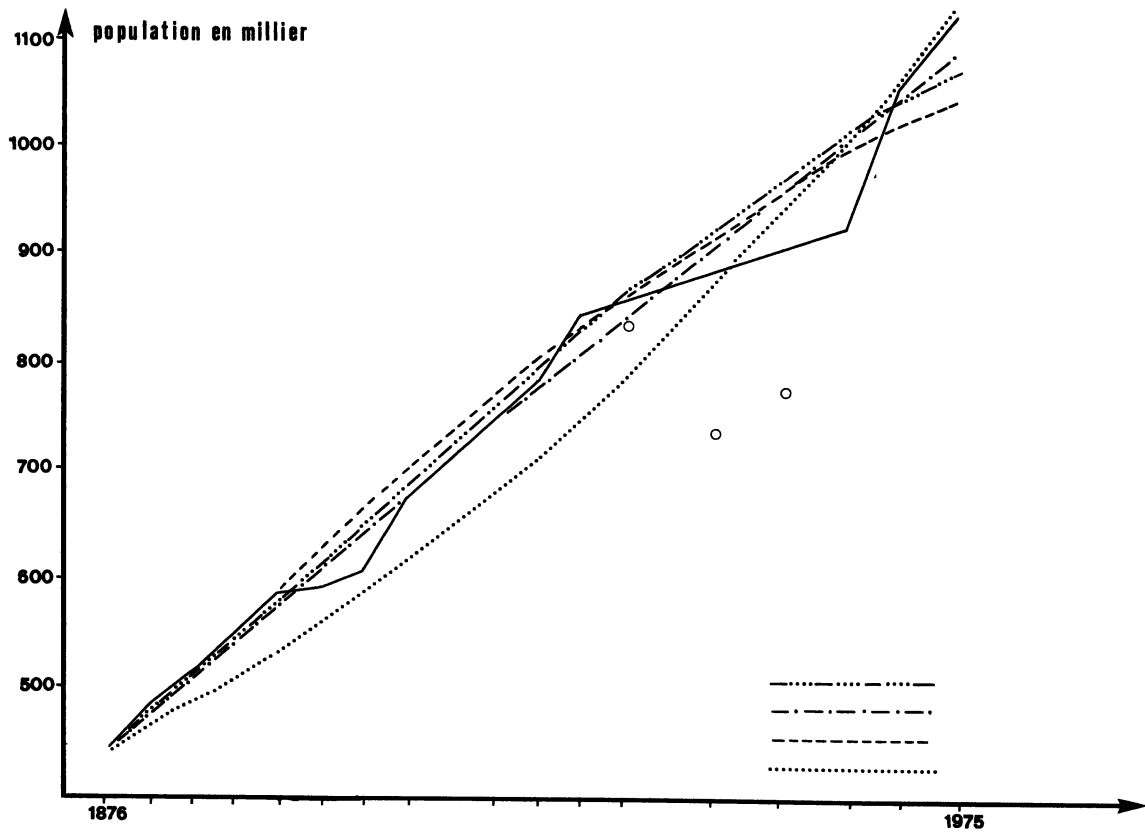


FIG. 3. — Évolution de la population totale de la Courly, comptes de 1936 à 1954 exclus (0) (trait plein).

Ajustements à différents modèles :  
 modèle de Volterra-Kostitzin  $c > 0$  .....  
 modèle de Volterra-Kostitzin  $c < 0$  - · - · - ·  
 modèle logistique - - - - -  
 modèle exponentiel .....  
 .....