

# JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

OLEG ARKHIPOFF

## **La notion de bien-être national**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 117 (1976), p. 25-36

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1976\\_\\_117\\_\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1976__117__25_0)

© Société de statistique de Paris, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LA NOTION DE BIEN-ÊTRE NATIONAL

*L'étude porte sur la signification et la consistance de la notion de bien-être national. Sont dénoncées certaines procédures qui prétendent cerner ce concept. Sont aussi envisagées brièvement des solutions au problème d'agrégation en forme de « moyenne » et l'on rencontre alors le paradoxe de Quételet. Enfin, l'étude se termine par un projet de recherche sociologique et une méditation sur le concept de vérité opposée à celle de l'individu.*

*This paper deals with the meaning and the nature of the national welfare notion. Some procedures that claim to define the concept are criticized. We discuss too solutions for the aggregation problem as a mean and Quetelet's paradox. Finally, the paper deals with a project of sociological research and the concept of Truth versus the one of the individual.*

*Die Untersuchung beschäftigt sich mit der Definition und dem Inhalt der Idee vom nationalen Wohlbefinden. Es werden einige Methoden denunziert, die behaupten diese Auffassung zu umschreiben. Es werden auch kurz in Betracht gezogen Lösungen für das Problem der « Agrégation » in der Form von « Durchschnitten » und man kommt so zu dem Paradox von Quételet. Die Untersuchung schliesst dann mit dem Vorschlag einer soziologischen Untersuchung und einer Betrachtung über den Begriff der Wahrheit im allgemeinen im Gegensatz zu der des Individuums.*

### I — INTRODUCTION

Le présent article reprend en la résumant d'une part et en la complétant de l'autre, une communication présentée au XIV<sup>e</sup> Congrès de l'International Association for Research in Income and Wealth. Ce congrès s'est tenu à Aulanko, en Finlande, du 18 au 23 août 1975 [1], [2].

Le thème essentiel de notre communication est un problème : peut-on produire une mesure numérique du bien-être national, compte tenu des préférences de tous les membres de la collectivité?

Il nous a paru toujours évident qu'une telle question était d'abord et avant tout un problème essentiellement technique : comment agréger les préférences individuelles en une préférence nationale et cela de façon « convenable »? Il nous a semblé clair, également et toujours, qu'un tel problème formel était susceptible de s'appliquer aussi à de nombreuses questions autres que celle relative au bien-être national; en d'autres termes, le contenu du concept est chose accessoire au premier stade de la réflexion [3].

Or, il nous est apparu par la suite, lentement mais non moins sûrement, que de telles évidences n'étaient pas partagées par tous, car l'on semble considérer parfois que le problème formel évoqué il y a un instant était sinon résolu, du moins purement académique et sans

rapport aucun avec le *vrai* problème qu'on pourrait peut-être résumer en ces termes : la théorie de l'optimum montre que le produit national, si l'on fait abstraction de ses imperfections actuelles, reflète le bien-être national. Donc, il s'agit de décanter l'agrégat, en y retranchant ce qui ne contribue pas au bien-être et en ajoutant ce qui y contribue mais ne figure pas dans le produit national. Ce faisant, on détermine un ensemble assez hétéroclite de statistiques nouvelles qu'il convient de présenter en un cadre cohérent (lire : comptable), prolongement du système actuel des comptes nationaux, et d'évaluer ces nouveaux éléments avec assez de discernement pour conserver l'acquis de la théorie de l'optimum économique.

Dans de telles conditions, nous avons cru peut-être utile de présenter une communication qui montrerait qu'une telle pseudo-argumentation conduisait à une impasse absolue et ramènerait au seul et vrai problème, celui de l'agrégation des échelles de préférence.

Nous prendrons donc le problème à l'envers. Supposons donc qu'effectivement la consommation des ménages, d'après la théorie de l'optimum, représente le bien-être national lié au maximum des satisfactions des consommateurs, n'était-ce la maladresse des conceptions de premiers théoriciens de la comptabilité nationale ou des statisticiens, ou bien encore l'imperfection des marchés : assurément, certaines rubriques du produit national ne devraient pas y figurer, alors que d'autres, très — trop — nombreuses y font défaut.

Telle est donc l'idée de départ de la Measure of Economic Welfare [4], du Net National Welfare of Japan [5] ou bien celle d'une autre communication présentée par Ashok Rudra et M. Mukherjee à la même session de I. A. R. I. W. (« On a Measure of National Development »).

Avec ou sans référence au bien-être national, il faut très certainement un cadre comptable élargi pour présenter de façon cohérente et exhaustive les nombreuses et nouvelles statistiques dont on doit désormais tenir compte : tel est, du moins croyons-nous, le pourquoi de deux autres communications présentées à I. A. R. I. W., toujours lors de la même session (« The Measurement of Economic and Social Performance » — de N. et R. Ruggles — et « TISA : The Total Income System of Accounts » — de R. Eisner).

## II — POURQUOI LA COMPTABILITÉ?

A lire l'abondante littérature sur le sujet, il semble clair à beaucoup que cohérence et exhaustivité sont nécessairement synonymes de comptable. La chose nous paraissant à nous peu évidente, nous tenterons donc de trouver une quelconque justification à ce point de vue. Pour cela et conformément à ce qui nous semble être une saine épistémologie, nous tenterons d'abord de donner une définition de ce qu'on appelle un *système comptable*.

Aussi nous introduirons la formalisation partielle suivante :

### a) Termes et expressions considérées comme données

Période comptable, début et fin de cette période, objet comptable à enregistrer, valeur  $v(t)$  de celui-ci, ensemble  $T$  des objets comptables  $t$ , compte  $i$ , son crédit  $c_i$ , son débit  $d_i$ , son solde d'entrée  $s_i$  et de sortie  $s_i$  relativement à une période comptable donnée, ensemble  $I$  des comptes  $i$ , débiter ou créditer un compte  $i$  de  $v(t)$ .

Nous noterons  $D$  et  $C$ , respectivement, la somme des quantités (supposées toutes positives)  $d_i$  et  $c_i$  pour l'ensemble des comptes  $i$ ,  $S$  et  $S'$ , respectivement, la somme des

quantités  $s_i$  et  $s'_i$  supposées, elles, algébriques,  $S^+$  et  $S^-$  la somme des quantités  $s_i$  qui sont positives et celles des quantités  $s_i$  négatives (prises en valeur absolue) :

$$S = S^+ - S^-, \quad S' = S'^+ - S'^-$$

Nous appellerons *bilan d'entrée*, un tableau à deux colonnes dont celle de gauche dite « actif » reprend les soldes  $s_i$  négatifs et celle de droite « passif » les soldes  $s_i$  positifs. Nous définirons de la même façon un *bilan de sortie*, avec les soldes  $s'_i$ .

#### b) Axiomatique

On pose quatre axiomes.

*Axiome de la double écriture* : quel que soit  $t$  il existe un et un seul compte  $i$  qui se voit créditer de  $v(t)$  et un et un seul compte  $j$  (le cas échéant  $i = j$ ) qui se voit débiter de  $v(t)$ . La comptabilisation de tous les  $t$  de  $T$  aboutit à  $C = D$ .

*Axiome des soldes d'entrée et de sortie* : pour tout  $i$ ,

$$s_i - d_i + c_i = s'_i$$

*Axiome du bilan* :  $S = 0$  (c'est-à-dire :  $S^+ = S^-$ ).

*Axiome du report à nouveau* : quel que soit  $i$ , le solde d'entrée  $s_i$  d'une période est identique au solde de sortie  $s_i$  de la période qui précède.

Il est alors clair que ces quatre axiomes sont indépendants les uns des autres et que, puisque tel axiome n'implique pas nécessairement tel autre, la définition d'un système comptable reste affaire de convenance personnelle : la comptabilité ordinaire se flatte d'obéir aux quatre axiomes à la fois (on peut en douter) et la comptabilité nationale souffre manifestement de rester confinée au premier seulement (et même ce peu pourrait être contesté).

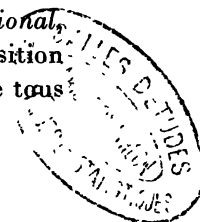
Comme la comptabilité qu'elle soit traditionnelle ou nationale est, de l'avis général, l'instrument de cohérence par excellence, il est dès lors manifeste que les vertus prêtées à la comptabilité dépendent de façon plutôt lâche du ou des axiomes qui la sous-tendent. Aussi la comptabilité est loin d'avoir le monopole de la « cohérence » et de « l'exhaustivité ». Par conséquent, l'initiateur d'un système comptable est tenu de nous dire pourquoi il estime nécessaire de nous imposer une formulation comptable.

Faute de justification, nous nous sentons libre de toute attache comptable pour étudier le bien-être national et cela d'autant plus que l'histoire montre que le revenu national a été d'abord conçu en dehors de toute référence à un quelconque cadre comptable.

### III — POURQUOI UN PRODUIT NATIONAL IDÉAL?

Il nous reste maintenant à nous débarrasser encore du produit national lui-même, pour aborder l'esprit libre l'étude des vrais problèmes touchant au bien-être.

La théorie de l'optimum est implicitement avancée comme justification du produit-bien-être national, quand, par exemple, on se désole de ce que les prix du marché, mesurant le produit, ne correspondent plus aux utilités marginales. Or, appliquée au bien-être national, la théorie de l'optimum n'est qu'un habillage pseudo-théorique du sophisme de composition vulgaire : « mon revenu augmente avec ma satisfaction personnelle, donc si le revenu de tous augmente, la satisfaction générale augmente également ».



La traduction analytique de ce sophisme est la préférence dite de Pareto (bien mal nommée, car ce n'est pas la préférence qui est « de Pareto » mais la détermination dictatoriale de celle-ci) qui instaure un banal préordre partiel (non total) sur le champ des consommations individuelles. Il est clair que cette préférence agrégée ne peut être une préférence *nationale* (à supposer que les mots ne soient pas détournés de leur sens), non pas parce qu'elle n'est pas totale, comme on le dit quelquefois, mais tout simplement parce qu'elle est de Pareto, c'est-à-dire la préférence d'un seul.

Il est donc nécessaire de trouver une meilleure justification du produit-bien-être national, à moins, bien entendu, qu'on ne se satisfasse du sophisme explicité *in limine*, nonobstant les innombrables critiques dont fait l'objet celui-ci et ceci de façon périodique, si l'on en juge d'après la littérature spécialisée dans le bien-être national.

Il ne nous reste plus qu'à remarquer que beaucoup de discussions sur le bien-être national se dispensent d'une définition quelconque de celui-ci et qu'il est donc nécessaire, avant d'examiner brièvement le problème formel, de donner une définition de l'entité que nous nous proposons d'analyser. Est-il besoin de souligner qu'une définition préalable est toujours nécessaire en toute matière pour, tout d'abord, savoir au moins de quoi l'on parle et ensuite, et surtout, pour pouvoir s'assurer que celle-ci « existe » (théorème d'existence).

#### IV — DÉFINITION DU BIEN-ÊTRE NATIONAL

On définit une échelle de préférence comme étant une relation *transitive*. On considère ensuite un ensemble  $X$  d'états socio-économiques  $x, y, z, \dots$  dont le contenu est *sans intérêt* à ce stade de l'analyse (or, trop souvent, on discute du contenu avant d'avoir même envisagé le problème formel sous-jacent). On se donne ensuite une échelle de préférence particulière, sur  $X$ , échelle dite *collective*. On définit enfin le bien-être national comme la donnée du couple  $(X, \text{préférence collective})$ .

Il s'agit, bien sûr, de justifier d'une façon ou d'une autre, le qualificatif « collectif » donné à l'échelle de préférence associée à  $X$  et, en premier lieu, de tenir compte de toutes les préférences individuelles  $R_i$  que tout membre  $i$  de la collectivité nationale  $N$  établit sur  $X$ . L'agrégation  $F$  apparaît donc comme une fonction déterminant la préférence collective  $R$  à partir des préférences individuelles  $R_i$ .

$$R = R(R_1, R_2, \dots, R_n)$$

$n$  étant le nombre d'électeurs  $i$  de  $N$ .

Il est nécessaire, ensuite, de sauvegarder plusieurs principes dont un *principe d'unanimité* (principe dit, bien à tort, de Pareto) : si  $R_1 = R_2 = \dots = R_n$ , alors  $R = R_1 = R_2 = \dots = R_n$ , un *principe de majorité* : si  $k$  électeurs unanimes imposent leurs préférences, c'est-à-dire (supposons que ce soit les  $k$  premiers) :

$$R = R_1 = \dots = R_k,$$

alors tout groupe unanime incluant le précédent donnera le même résultat final  $R$ ; et un *principe de non dictatorialité* : aucun individu  $i_0$  ne peut, quel que soit le scrutin, imposer son échelle de préférence à la collectivité :

Tel est le problème formel à résoudre : trouver un modèle d'agrégation (ou une procédure de vote) convenable  $F$ . Il est on ne peut plus clair que de nombreux problèmes se ramènent à ce problème formel. En particulier, on peut montrer que la notion de dévelop-

pement est, à cet égard, équivalente à la notion de croissance ou de bien-être [3]. Le très actuel et intéressant sujet traité par Ashok Rudra et M. Mukherjee relève bien de notre analyse.

## V — LE PROBLÈME FORMEL

La communication présentée à I. A. R. I. W. était donc essentiellement une justification de la priorité accordée à la problématique de l'agrégation des échelles de préférence individuelles en une échelle collective.

Le théorème d'Arrow [6] permet de conjecturer une réponse négative au problème posé : il est impossible de déterminer « démocratiquement » une échelle de préférence collective, compte tenu des préférences de chacune; la préférence « collective » est toujours celle d'un dictateur et il est dès lors *inutile* de recourir à un scrutin. Mais ce théorème ne recouvre qu'un cas de figure très particulier et, de plus, ne donne pas de condition *nécessaire et suffisante*. Aussi, nous avons été conduits à reformuler et surtout à généraliser ledit théorème [7], [8].

Il n'est peut-être pas utile ici de revenir en détail là-dessus et il suffira de dire que notre analyse *renforce et précise* le résultat négatif général suggéré par le théorème d'Arrow : *on ne peut procéder à une détermination satisfaisante de la préférence collective que si et seulement si il existe un et un seul dictateur et aucun groupe dictatorial autonome permettant de le contrebalancer.*

C'est donc bien dire que toute la problématique du bien-être national est un faux problème, un problème mal posé, que la *notion de bien-être national est contradictoire dans ses termes mêmes.*

On se bornera seulement ici à rappeler le paradoxe de Condorcet qui a l'avantage de montrer la nature des difficultés de l'agrégation des échelles de préférence *et d'être une agrégation qui échappe précisément au théorème d'Arrow.*

Considérons donc trois candidats  $A, B, C$  que doivent classer chacun pour son compte trois électeurs 1, 2, 3. Comment déterminer de façon « convenable » une préférence collective à partir des préférences de 1, 2 et 3?

Supposons que les échelles individuelles soient les suivantes :

électeur n° 1	$A$ préféré à $B$ préféré à $C$
électeur n° 2	$B$ préféré à $C$ préféré à $A$
électeur n° 3	$C$ préféré à $A$ préféré à $B$

Essayons d'instaurer une préférence collective à partir d'un *vote à la majorité simple.*

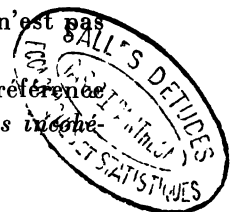
On a :

$A$ préféré à $B$	deux voix sur trois
$B$ préféré à $C$	deux voix sur trois
$A$ préféré à $C$	une voix sur trois.

Le résultat collectif est donc :

$A$  préféré à  $B$ ,  $B$  préféré à  $C$  et  $A$  non préféré à  $C$  : la préférence collective n'est pas transitive ! C'est ce qu'on appelle le paradoxe de Condorcet.

Le théorème d'Arrow stipule que pour un type particulier d'échelles de préférence (transitives et strictement antisymétriques), une procédure de vote ne peut éviter des incohé-



rences du type de celle mise à jour dans le paradoxe de Condorcet que si l'échelle collective est déterminée dictatorialement.

Que le théorème d'Arrow soit insuffisant pour la problématique du bien-être, cela est évident quand on considère que la condition nécessaire et suffisante pour agréger des relations transitives en une relation collective transitive est, dans le cas des scrutins majoritaires, que le vote soit celui effectué à l'unanimité (donc *pas* de dictateur précisément) [7], [8]. D'autre part, l'existence nécessaire d'un dictateur peut être rendue tolérable par l'introduction d'un autre dictateur ou d'une assemblée dictatoriale venant contrebalancer le premier dictateur (solutions à la Montesquieu), ce que *n'exclut pas* le théorème d'Arrow et, effectivement, il existe des cas où l'existence de deux dictateurs (cela n'est pas contradictoire, comme on l'a montré *in* [7]) permet de déterminer correctement des échelles collectives satisfaisantes, dans la mesure où l'on se contente d'une « neutralisation » des dictateurs l'un par l'autre. Nous avons démontré que si l'on souhaitait avoir une échelle collective susceptible d'être décrite fidèlement par un nombre (utilité collective), on ne pouvait avoir ni solution sans dictateur, *ni de solution à la Montesquieu*, assertion qui n'apparaît pas dans le théorème d'Arrow (où n'est donnée qu'une condition nécessaire de possibilité : ... il faut qu'il y ait au moins un dictateur —, qui n'est pas suffisante).

## VI — PRINCIPALES CRITIQUES RENCONTRÉES

On ne saurait dire que nos conclusions aient été accueillies avec ferveur, parce que « négatives » (nous pourrions remarquer que pourtant, pour *chaque* cas de figure, nous avons donné non un théorème d'impossibilité mais *une condition nécessaire et suffisante de possibilité*). Bref, l'essentiel des critiques peut se résumer en une question : que faire alors ? — en une condamnation : « cela n'est guère utile pour l'homme politique ».

Nous croyons cependant que la reconnaissance d'un problème *mal posé* est chose utile doublement :

— parce qu'elle évite d'être dorénavant dupe ;

— parce que, loin d'être un frein, elle invite à repenser entièrement le problème et à abandonner des recherches stériles dont l'aboutissement est à présent certain.

Il nous est évidemment difficile de prévoir ce que sera le nouvel énoncé de la problématique du bien-être national, mais on peut, sans trop s'avancer, penser que la définition de celui-ci « moins démocratique ». Et dans ce sens, certains développements de points abordés au paragraphe VIII pourraient, peut-être, constituer une bonne amorce de solution.

Voyons maintenant quelques critiques de détail (auxquelles notre communication répondait par avance, pour certaines d'entre elles).

On nous a reproché de ne pas distinguer bien-être national et bien-être économique (national?)...

On nous a également reproché d'adopter un point de vue de puriste face au praticien confronté avec la dure réalité et qui, obscurément et patiemment, fraie son chemin vers le bien-être national. Nous ne sommes certainement pas ennemis des approximations, bien au contraire, mais faut-il encore que la chose à approximer existe de façon factuelle ou nécessaire ; or, le bien-être national conçu au paragraphe IV n'existe d'aucune manière (nous y reviendrons à propos du paradoxe de Quételet).

On a encore et *quand même* dit que, par exemple, la connaissance du nombre des docteurs contribuait à la connaissance du bien-être national, parce que, bien évidemment,

l'augmentation du nombre des docteurs augmente le bien-être national (mais supposons, un instant, que le corps médical soit animé d'un esprit corporatiste étroit; ce corps médical sera-t-il, lui, satisfait davantage? ou faut-il exclure les docteurs de la collectivité dont on mesure le bonheur, précisément au moment où l'importance de cette corporation digne pourtant d'estime commençait à prendre de l'ampleur?).

On a également envisagé un bien-être national « vectoriel ». C'est là une éventualité dont nous avons nous-mêmes parlé et, ce fait mérite d'être souligné, n'est nullement exclu de la définition très générale du paragraphe IV. Seulement, on peut remarquer que l'impossibilité d'agréger n'est pas particulière à l'ordre numérique, mais s'étend à de nombreuses variétés de relations de préférence non numériques.

On suggère également quelquefois de remettre en question la transitivité dans la définition du bien-être national. Nous ne pensons pas que cette réformulation du problème soit en fin de compte souhaitable et cela pour de multiples raisons. C'est renoncer au numérique *ipso facto* et c'est, quelquefois, mal distinguer les relations entre plan individuel et plan collectif : au cas où l'on veut une préférence collective transitive, on montre facilement que la préférence individuelle doit nécessairement être *au moins* transitive; c'est dire que l'argument des préférences irrationnelles à la base n'améliore nullement la situation!

Nous montrerons *in* « Peut-on mesurer le bien-être national », à paraître début 1976 dans les Collections de l'I. N. S. E. E., série C n° 41, que ce qu'il est convenu d'appeler l'impossibilité d'agréger ne dépend nullement d'une relation élémentaire telle que la transitivité mais de la complexité du concept : les conditions nécessaires et suffisantes de possibilité générales démontrées dans ladite étude sont pour ainsi dire identiques à celles dégagées pour les préférences *in* [7], [8]. C'est dire qu'abandonner la transitivité dans le concept de préférence, c'est heurter inutilement le sens commun pour retrouver exactement les mêmes difficultés retransposées dans un contexte insolite.

On a, enfin, soutenu qu'une solution radicale au problème nécessitait un génie pareil à celui de l'Archimède du « eurêka », donc un génie dont les manifestations sont infiniment rares, et qu'il était plus prudent de continuer les errements déjà exposés avec une persévérance qui sera à coup sûr récompensée et cela de façon bien plus rapide; nous nous bornerons à suggérer que la probabilité de voir naître un nouvel Archimède est quand même plus forte que celle de trouver quelque chose d'inexistant.

## VII — LE PARADOXE DE QUETELET

Nous aimerions tout d'abord souligner que l'énoncé du problème que nous avons tenté de traiter nous a été finalement imposé tel quel (quoique de façon absolument non délibérée), malgré une première tentative, disons, plus réaliste, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction de l'étude à paraître prochainement évoquée il y a un instant (voir en particulier [3], où il est manifeste que, fin 1973, nous ne tenions pas particulièrement à nous engager dans des histoires d'agrégation que nous soupçonnions avec raison être inextricables).

En fait, on peut se demander si, au fond, le théoricien n'est pas plus royaliste que le roi et cela pour au moins deux bonnes raisons : il est douteux que l'homme de la rue fasse un rapprochement étroit et quasi viscéral entre ses propres paramètres du bien-être, à supposer qu'il les connaisse, et les paramètres du bien-être national —et, ensuite, certains modes d'agrégation, quoique manifestement non arrowien, sont fort bien admis de tous et



consacrés par le dicton *in medio stat virtus*. Nous voulons évidemment parler des moyennes dont on fait un usage abondant jusque dans le non-mesuré, sinon le non-mesurable, usage parfois surprenant, quoique toujours définitif.

Il vaut donc la peine d'esquisser le sujet.

Étant donnés  $n$  objets à agréger ( $n$  sera supposé toujours fini), il est naturel de songer à choisir un objet se trouvant « au milieu » desdits objets, à condition de raisonner dans un espace où est définie une distance (voire même seulement un écart). On peut alors définir le *diamètre* d'un ensemble  $E$  (maximum des distances de tous les points de  $E$  pris deux à deux), l'*écartement* d'un point  $x$  de  $E$  (la plus grande distance  $d(x, y)$ ,  $y$  étant un point quelconque de  $E$ ), un *centre* de  $E$  (point d'écartement minimum, s'il existe, cet écartement étant alors dit *rayon*  $r$  de  $E$ ) et un *point périphérique* de  $E$  (point d'écartement maximum, s'il existe, cet écartement étant dit *diamètre*  $d$  de  $E$ ). Une telle procédure détermine donc un point situé au milieu des  $n$  points en question (s'il existe, ce point est un des points à agréger, ce qui n'est pas chose négligeable) et les notions ainsi mises en œuvre généralisent des propriétés bien connues et auxquelles on tient : étant donné un point central  $a$  (il peut en exister plusieurs, d'où un petit arbitraire possible), la boule de centre  $a$  et de rayon  $r$  contient  $E$  — on a  $d \leq 2r$  — s'il existe un point périphérique, il en existe alors au moins deux et deux points situés à un diamètre l'un de l'autre sont périphérique. Disons encore que l'intersection de  $E$  et de la sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  n'est pas vide et que, si  $d = 2r$ , un centre est toujours équidistant de deux points situés à un diamètre l'un de l'autre.

On pourrait également généraliser la notion de médiane en recherchant, lorsque la structure mathématique s'y prête, un point médian tel qu'il laisse à peu près autant de points à agréger à droite qu'à gauche. Mais cela est délicat même à partir de trois objets seulement, puisque l'opération médiane exige pour être définie univoquement et de façon valable qu'on se situe au moins dans un lattis distributif et pour retrouver la notion familière d'un point situé entre deux autres, il faut alors se placer au niveau d'une chaîne, ce qui n'est pas loin de nous ramener à la droite numérique.

On pourrait encore examiner les possibilités de généralisation des moyennes simples et pondérées ou du mode, mais peu importe ici : nous retiendrons seulement qu'on peut *généraliser* des notions bien connues et séduisantes sur le plan de l'agrégation quoique violant tel ou tel principe « démocratique » (on peut néanmoins noter que ces procédures satisfont toutes au principe d'unanimité) et cela dans des espaces plus ou moins éloignés de la bonne vieille droite numérique.

Mais ces procédures d'agrégation très attrayantes, malgré les complications mathématiques, présentent naturellement quelques défauts (ainsi la première procédure analysée ne tient absolument pas compte du nombre quand les objets sont groupés et un seul, par son excentricité dans tous les sens du terme, risque de déplacer la décision en sa faveur contre tous) et surtout peuvent rencontrer un paradoxe, dit de Quételet (ce n'est pas le cas de la toute première procédure, par exemple) : si on fait la moyenne des côtés (correspondants : mais cela même n'est pas clair) de  $n$  triangles rectangles le triangle moyen *n'est pas*, en général, *rectangle*. L'essence de ce paradoxe est facile à saisir. L'espace des objets à agréger possède une structure intrinsèque propre à la nature des objets considérés ; l'opération-détermination d'une caractéristique centrale, elle, nécessite une structuration d'espace en général différente. Si l'espace des objets individuels peut être considéré comme un sous-espace de l'espace des caractéristiques centrales et si l'on peut définir une *topologie satisfaisante* dans ce dernier, les choses s'arrangeront peut-être si le résultat est *toujours* « voisin »

d'un point de l'espace des objets à agréger (*ce dernier doit donc être dense dans l'espace des caractéristiques*). Sinon l'agrégation échoue.

Ces quelques remarques, croyons-nous, débloquent une situation, puisque des agrégations « non démocratiques » (elles obéissent seulement au principe d'unanimité, mais non au principe majoritaire qui, d'ailleurs, n'a plus de sens ici) sont fort bien acceptées de tous (et, cela, à tort et à travers quelquefois). Mais ces remarques indiquent également l'obstacle, le paradoxe de Quételet et il convient d'être très clair ici également : tout l'arbitraire peut alors se réfugier dans le choix d'une topologie nécessaire pour surmonter le paradoxe.

On peut encore revenir sur une objection déjà examinée : l'insistance sur l'impossibilité d'agréger n'est que méconnaissance de ce qu'est le rôle capital de l'approximation (et, effectivement, si ce reproche était fondé, ce sera là assurément un vice rédhibitoire de notre étude). Pour nous signifier cela, on a précisément lancé un argument qui n'est qu'un cas particulier du paradoxe de Quételet : « après tout, où existe-t-il des familles de 3.4 enfants ou bien celles qui constituent la moyenne canadienne »?

Une telle critique tombe évidemment à plat, parce qu'elle est en dehors de la question en ce qui concerne le bien-être national, parce que :

— ceux qui essaient d'affiner le produit national ne semblent pas, ou du moins ils ne le disent pas, viser un bien-être moyen (au sens de la procédure d'agrégation);

— les nombres 3.4, 3 et 4 sont parfaitement définis et *cela sans contradictions* et, ensuite, 3.4 est généralement estimé comme « voisin » de façon satisfaisante aussi bien de 3 que de 4;

— il y a deux sortes d'utilisation de la moyenne, celle de l'homme de la rue (si l'on ose encore parler comme cela, après avoir mentionné le paradoxe de Quételet) et celle des autres. De la moyenne 3.4 l'homme de la rue en rit quelquefois encore, mais sans méchanceté, et la seule signification qu'a ce chiffre pour lui, au sens bloomfieldien du mot, est la réaction : « tiens, j'ai trois enfants, je suis donc dans les normes ». On peut espérer que d'autres font un usage plus fructueux de la moyenne, mais dans ce cas, pensons-nous, ils se soucient fort peu de la signification qu'attache à celle-ci le profane;

— et, quoi qu'il en soit, jamais nous ne prendrons sur nous de raconter à quiconque que nous nous proposons, en calculant des moyennes de triangles rectangles avec une infinie patience, de cerner un jour le triangle rectangle à quatre côtés.

### VIII — VÉRITÉS INDIVIDUELLES, VÉRITÉ COLLECTIVE

Les quelques développements qui vont suivre ont un but essentiellement heuristique.

Énonçons d'abord un principe directeur de recherche sociologique (principe d'ailleurs aisément généralisable) : *étant donnée une société réalisant une certaine agrégation, dont on a reconnu le type et la condition nécessaire et suffisante de possibilité, expliquer les mécanismes concrets qui réalisent effectivement le schéma théorique d'agrégation et sans l'existence duquel cette société perdrait sa raison d'être*. On peut ici noter, aux fins taxonomiques, que pour une classe d'agrégation étendue, le nombre des différentes conditions de possibilité est très réduit (une demi-douzaine de variétés), comme nous l'avons démontré dans l'article à venir prochainement, évoqué au paragraphe VII.

Sachant maintenant les difficultés de l'agrégation et étant donné que l'algèbre des propositions (et des prédicats) engendre un ordre *sui generis* sur l'ensemble des propositions, il est légitime de s'inquiéter du passage de la vérité selon l'individu à la vérité tout court.

Nous allons essayer de poser une problématique à l'aide d'un modèle dont le caractère simpliste ne nous échappe pas.

Considérons l'ensemble des propositions qu'on peut faire sur le monde : au-delà, c'est l'indicible qu'il convient de taire, si l'on adopte le point de vue de Wittgenstein. Une représentation du monde sera tout ensemble de propositions auxquelles ont été données des valeurs de vérité compte tenu des liaisons logiques (de façon plus précise, c'est une interprétation au sens logique du terme).

L'hypothèse faite très généralement est qu'*une et une seule* de toutes les représentations est « vraie », au sens intuitif donné à ce mot. On peut appeler réalité cette représentation et les propositions vraies (au sens des valeurs de vérité) dans cette représentation distinguée sont vraies au sens intuitif du terme. On ajoute même quelquefois que cette représentation privilégiée constitue un maximum d'une certaine échelle de préférence (dont on oublie de donner une définition tant soit peu précise), ce qui nous ramène encore à d'autres difficultés... On suppose également qu'il existe des propositions qui sont vraies dans toute représentation possible (vérité nécessaire ou analytique); d'aucuns diront ici qu'on démontre cette dernière hypothèse, en se plaçant dans le cadre de la logique formelle ordinaire; nous pourrions ajouter que la propriété d'avoir une vérité nécessaire n'est pas particulière à cette logique, mais on pourrait concevoir d'autres algèbres où cela ne serait plus : résoudre cette difficulté c'est d'abord poser la question de l'adéquation de la langue à l'objet auquel elle s'applique.

Ceci étant, chaque individu a une représentation du monde personnelle (ou, du moins, essaie d'en avoir une) « approchant » de la réalité. Il existe aussi *une* vérité commune — ou du moins nous le supposons — qui est la représentation agrégée des représentations individuelles. Il est convenu de penser que cette vérité commune est « plus proche » de la réalité que ne le sont les représentations individuelles. Elle n'est pas la réalité (si ce n'est par hasard extraordinaire) puisque des propositions ont été niées dans le passé, puis affirmées, puis niées à nouveau (ainsi la rotondité de la terre), mais elle peut être *une* réalité, par convention, si l'on met en doute l'existence d'une quelconque représentation privilégiée.

Comment concevoir cette agrégation des représentations? Le schéma qui s'appliquerait ici nous semble être celui où étant donnés  $n$  objets à agréger d'un ensemble ordonné de façon convenable (tout sous-ensemble fini devant posséder une borne inférieure), on prend la borne inférieure de ces  $n$  objets comme objet réalisant l'agrégation. Ce schéma est évidemment non arrowien mais obéit encore au principe d'unanimité (ce qui sous-entend la nécessité de l'idempotence pour l'opération borne inférieure). Ici, on agrège les sous-ensembles vrais de chacune des représentations en prenant l'intersection  $V$ . Cette intersection n'est pas vide puisque chaque représentation inclut l'ensemble des vérités nécessaires dans celui des vérités caractéristiques de ladite représentation individuelle.

Cette dernière affirmation péremptoire néglige souverainement le fait que certains individus ne sont pas logiques ou, du moins, ont un système de vérités nécessaires qui diffère du système classique. On peut en conclure déjà que l'agrégation scientifique violera le plus fondamental des principes d'une agrégation démocratique : tenir compte de l'électeur dont le choix est anormal. Et effectivement, par des mécanismes qu'il serait intéressant de démontrer, la cité scientifique qui sécrète  $V$  élimine ceux, dont Bachelard a dit qu'ils sont « des gens avec lesquels on ne discute pas » [10]. Ici, nous sommes tenus de mentionner l'analyse pénétrante de T. S. Kuhn [11].

Ce premier point étant acquis, ou du moins, exposé du mieux que nous avons pu, on peut se demander ce qui se passerait si l'on invitait les membres de la cité scientifique à voter sur l'ordre des propositions. En fait, à notre connaissance, jamais la question n'a

jamais été posée de cette façon mais, plutôt, on a toujours suggéré que la cité scientifique devait toujours être unanime. Comme, toujours à notre connaissance, on n'a jamais précisé pourquoi une telle unanimité était nécessaire, on peut penser qu'on cherche, par ce qui n'est qu'une incantation, à se prémunir contre quelque chose d'indéfini.

Ici, l'affaire devient amusante. On pourrait penser *a priori* qu'une synthèse des différents points de vue des savants devrait prendre la forme d'un scrutin à l'unanimité, en conséquence du principe très vague précité.

Le théorème, que nous avons démontré *in* [7], [8], sur l'agrégation des relations qui sont au moins transitives en une relation transitive et qui dit que la condition nécessaire et suffisante de possibilité est que la famille des ensembles d'électeurs dictatoriaux constitue un filtre, montre qu'effectivement, dans la classe des scrutins majoritaires, seul le scrutin à l'unanimité remplit cette condition (voir la partie consacrée aux scrutins majoritaires dans l'étude à venir déjà citée au § VII) et semble fonder la manière de voir que nous avons explicitée et justifier celle-ci puisque l'ordre *sui generis* de l'algèbre logique est réflexif, transitif et *non total* (et l'on pourrait même, peut-être, s'émerveiller sur cette toute dernière propriété). On se bornera à ajouter qu'une telle manière de voir est quand même erronée parce que le scrutin à l'unanimité *ne* répond *pas* à toutes les agrégations quant au type des relations à agréger (et l'algèbre des propositions donne un lattis booléien, ce qui est plus qu'un pré-ordre non total — mais nous n'avons pas poussé plus loin nos recherches, car cela est inutile) et, à titre de curiosité, on peut signaler un scrutin où les ensembles dictatoriaux sont tous centrés sur un ensemble dictatorial minimal, qui pourrait être considéré comme une école incontestée, fait tout aussi bien l'affaire à ce point de vue.

En fait, les dés sont pipés quant l'agrégation sur les algèbres, puisqu'une et une seule logique est exigée de tout adhérent à la cité scientifique, sous peine d'exclusion. Aussi l'unanimité est toujours réalisée du fait du langage commun imposé à tous, ce qui viole, encore un des principes d'agrégation démocratique (il va sans dire que nous ne nous permettons aucun jugement de valeur sur cette absence de démocratie, d'autant plus que beaucoup diront ici que c'est la « Réalité » qui nous impose ces (ses?) choix, ce qui est encore matière à problème).

Ainsi, au cas où les fidèles se compteraient, il n'y a aucun risque d'aboutir à des incohérences sur le plan de la logique, puisque l'agrégation des langages a déjà été faite. C'est à ce dernier niveau que commencent les problèmes et c'est là où l'on pourrait ne plus être d'accord avec Wittgenstein, Leibniz et quelques autres.

Oleg ARKHIPOFF,  
*administrateur de l'I. N. S. E. E.*

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] I. A. R. I. W., Secrétariat, Box 2 020, Yale Station, New Haven, Connecticut 06520, États-Unis.
- [2] ARKHIPOFF O. — *Le bien-être national et la possibilité de sa mesure*. 14<sup>e</sup> Congrès de l'I. A. R. I. W., Aulanko, Finlande, 18-23 août 1975.
- [3] ARKHIPOFF O. — *Tiers Monde : de la mesure de la croissance à celle du développement*, in *Bulletin de l'Économie et des Finances*, n° 65, janvier-mars 1974. Ministère de l'Économie et des Finances, Paris.

- [4] NORDHAUS W. et TOBIN J. — *Is Growth Obsolete?* in *Economic Growth*. National Bureau of Economic Research, Columbia University Press, 1972.
- [5] *Measuring Net National Welfare of Japan*. N. N. W. Measurement Committee, Economic Council of Japan, Tokyo, mars 1973.
- [6] ARROW K. J. — *Social Choice and Individual Values*. 2<sup>e</sup> édition, John Wiley and Sons, 1963.
- [7] ARKHIPOFF O. — *Le problème de l'agrégation dans la mesure de la qualité de la vie : formulation et généralisation du théorème d'Arrow*, in *Revue de Science financière*, t. LXVI, n<sup>o</sup> 4, pp. 879-934, Paris, 1975.
- [8] ARKHIPOFF O. — *Reformulation du théorème d'Arrow et généralisations*, in *Annales de l'I. N. S. E. E.*, n<sup>o</sup> 18, I. N. S. E. E., Paris, 1975.
- [9] GUILBAUD G. Th. — *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation, et L'avantage collectif*, in *Économie appliquée*, t. V, n<sup>o</sup> 4, octobre-décembre 1952, P. U. F., Paris.
- [10] BACHELARD G. — *Le rationalisme appliqué*, P. U. F., Paris, 1970.
- [11] KUHN T. S. — *La structure des révolutions scientifiques*. Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, Paris, 1972.