JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CLAUDE BERGE

Sur un nouveau calcul symbolique et ses applications

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 29 (1950), p. 245-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1950_9_29__245_0>

Sur un nouveau calcul symbolique et ses applications ;

PAR CLAUDE **BERGE**.

Tableaux des correspondances générales.

Fonction originale.	Deuxième image.	Première image.
(I) $C_1\varphi_1(n)+C_2\varphi_2(n)$	$C_1\mathcal{F}_1(p)+C_2\mathcal{F}_2(p)$	$C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$
(II) $\varphi(n+q)^*$ (q entier >0)	$p^q\mathcal{F}(p)-p^{q-1}\varphi(0)-p^{q-2}\varphi(1)-\ldots-\varphi(q-1)$	$f^{(q)}(x)$
(q entier <0)	$p^q\mathcal{F}(p)$	$\left(\int_0^x\ldots dx\right)^{(q)} f(x)$
(III) $\lambda^n\varphi(n)$	$\mathcal{F}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$	$f(\lambda x)$
(IV) $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(n,\lambda)$	$\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}(p,\lambda)$	$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(x,\lambda)$
(V) $n^q\varphi(n)^*$ (q entier >0)	$(-1)^q\left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^{(q)}\mathcal{F}(p)$	$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(q)} f(x)$
(VI) (q entier <0)	$\left(\int_p^\infty \frac{dp}{p}\right)^{(-q)}\mathcal{F}(p)$	$\left(\int_0^x\frac{dx}{x}\right)^{(-q)}f(x)$
$\frac{n!}{(n+q)!}\varphi(n+q)^*$ (q entier >0)	$p\left(\int_p^\infty dp\right)^{(q)}\mathcal{F}(p)$	$\frac{f(x)}{x^q}$
(q entier <0)	$(-1)^q p\frac{\partial^{-q}}{\partial p^{-q}}\left[\frac{\mathcal{F}(p)}{p}\right]$	*id.*
(VII) $n!\,\varphi(n)$	$p\int_0^\infty e^{-pt}\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)dt$	$\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}}f(t)\,dt$
(VIII) $[\varphi_1(i)+\varphi_2(j)]^n$	$p\int_0^\infty e^{-pt}f_1(t)f_2(t)\,dt$	$f_1(x)f_2(x)$

Tableaux des correspondances générales (*suite*).

Fonction originale.	Deuxième image.	Première image.
(IX) $\sum_{i+j=n} \varphi_1(i)\varphi_1(j)$	$\mathcal{F}_1(p)\mathcal{F}_2(p)$	$\frac{d}{dx}\int_0^x f_1(t)f_2(x-t)\,dt$
(X) $\varphi_1(n)\varphi_2(n)$	$\frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \mathcal{F}_1\left(\frac{p}{z}\right)\mathcal{F}_2(z)\frac{dz}{z}$	$\frac{1}{2i\pi x}\int_{(c)}\int_{t=0}^{\infty} e^{\frac{-tz}{x}} f_1(t)f_2(z)\,dz\,dt$
$[\varphi(i)+a^j]^n$	$\frac{p}{p-a}\mathcal{F}(p-a)$	$e^{ax}f(x)$
$\begin{cases} \varphi(0) & \text{si } n=0 \\ [\varphi(i+1)+a^j]^{n-1} & \text{si } n>0 \end{cases}$	$\mathcal{F}(p-a)$	$\int_0^x e^{ax}\,df(x)+f(0)$
$\varphi^{(q)}(n+q\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 1)$	$(p-1)^q\mathcal{F}(p)$	$[f^{(i)}-1]^q$
$\frac{n!}{\left(\frac{n}{q}\right)!}\varphi\left(\frac{n}{q}\right)^{\star}$	$\frac{p}{q}\int_0^{\infty} t^{\frac{1}{q}-1} e^{p-\sqrt[q]{t}} f(t)\,dt$	$f(x^q)$
$\varphi\left(\frac{n}{q}\right)^{\star}$	$\mathcal{F}(p^q)$	
$\Delta\varphi(n)=\varphi(n+1)-\varphi(n)$	$(p-1)\mathcal{F}(p)$	
$\sum_0^{n-1}\varphi(n)=\varphi(0)+\varphi(1)+\ldots+\varphi(n-1)$	$\frac{\mathcal{F}(p)}{p-1}$	

N. B. — Le symbole

$[g(i)+h(j)]^n$ signifie : $g(n)h(0)+C_n^1 g(n-1)h(1)+C_n^2 g(n-2)h(2)+\ldots+g(0)h(n)$;

$\psi(n)^{\star}$ signifie : la fonction égale $\psi(n)$ pour la valeur de n où elle est définie, et égale à zéro pour les autres valeurs de n;

$(\ldots)^{(q)}f(x)$ signifie : qu'il faut répéter q fois l'opérateur indiqué entre les parenthèses.

Tableaux des correspondances particulières.

Original.	Deuxième image.	Première image.
(3) a^n	$\frac{p}{p-a}$	e^{ax}
(4) $n\,!$	$p\int_0^{\infty} e^{-pt}\frac{dt}{1-t}$	$\frac{1}{1-x}$
(5) $\rho^n \cos n\theta \quad (\rho e^{i\theta} = a + ib)$	$\frac{p(p-a)}{(p-a)^2+b^2}$	$e^{ax}\cos bx$
(5′) $\rho^n \sin n\theta$	$\frac{pb}{(p-a)^2+b^2}$	$e^{ax}\sin bx$
$\frac{1+(-1)^n}{2}$	$\frac{p^2}{p^2-1}$	$\mathrm{ch}\, x$
$\frac{1-(-1)^n}{2}$	$\frac{p}{p^2-1}$	$\mathrm{sh}\, x$
(6) $\frac{q\,!}{(q-n)\,!}$ *	$e^p p^{-q}\int_p^{\infty} p^q e^{-p}\, dp$	$(1+x)^q$
(6′) $\frac{(n+q-1)\,!}{(q-1)\,!}$ *	$e^{-p} p^{-q}\int_{-\infty}^{-p} p^{-q} e^{-p}\, dp$	$\frac{1}{(1-x)^q}$
$\frac{(-1)^n}{n\,!}$	$e^{-\frac{1}{p}}$	$J_0(2\sqrt{x})$ (fonction de Bessel)
$\frac{1}{n}$ *	$\mathrm{Log}\,\frac{p}{p-1}$	$\int_0^x \frac{e^x}{x}\,dx - \log x$
$\frac{1}{n^{\lambda}}$ *	$\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^1 \log\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1}\frac{dt}{p-t}$	
$\frac{1}{\Gamma(n\lambda+1)}$ (Γ : fonction eulérienne)	$E_{\lambda}\left(\frac{1}{p}\right)$ (fonction de Mittag-Lefller)	
$\frac{\Gamma(n\lambda+1)}{\Gamma(n+1)}$	$\int_0^{\infty} e^{-t+\frac{t^{\lambda}}{p}}\,dt$	
$J_n(y)$ (fonction de Bessel)	$\frac{p}{y}e^{-\frac{yp}{2}}\int_0^y t\,J_0(t)\,e^{\frac{t^2}{2}p}\,dt$	
$T_n(y)$ (pol. de Bernoulli)	$\frac{p(p-y)}{p^1-2py+1}$	
$P_n(y)$ (pol. de Legendre)	$\frac{p}{\sqrt{p^2-2py+1}}$	

Tableaux des correspondances particulières (*suite*).

Original.	Deuxième image.	Première image.
$Qn(y)$ (pol. de Bernoulli)	$p\int_0^{\infty}\frac{e^{t(y-p)}\,e^{t(1-p)}}{e^{t}-1}\,dt$	$-\frac{e^{x(y-1)}-1}{e^{-x}-1}$
$\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$	$\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}$	$\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\,dt$
$\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{n\pi}{2}$	$\operatorname{Arc\,th}\frac{1}{p}$	
$\frac{a^n(2n)!}{(n!\,2^n)^2}$	$\frac{p}{\sqrt{p(p-a)}}$	
C_q^n	$\left(\frac{p+1}{p}\right)^q$	
C_n^q	$\frac{p}{(p-1)^{q+1}}$	

I. — Première correspondance.

1. Définition. — Soit $\varphi(t)$ une fonction, définie au moins pour les valeurs de t entières et $\geqq 0$. Dans ce chapitre, nous conviendrons d'appeler image de $\varphi(t)$ la fonction

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n!}x^n. \tag{1}$$

Pour que la série converge dans un certain intervalle, nous supposerons que $\varphi(n)=O(h^n n^n)$.

Réciproquement, à toute fonction $f(x)$ holomorphe au voisinage de l'origine, nous pouvons associer une fonction $\varphi(t)$ définie pour les valeurs de t entières et non négatives par la formule

$$\varphi(n)=\frac{n!}{2i\pi}\int_{(C)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz, \tag{2}$$

où (C) est un cercle suffisamment petit centré sur l'origine. Nous dirons que $f(x)$ a pour original $\varphi(n)$, et nous écrirons

$$f(x)\doteqdot\varphi(n).$$

Exemples. — L'image de $\varphi(t) = a^t$ sera

$$f(x) = 1 + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2!} + \ldots = e^{ax}$$

ou

$$(3)\qquad a^t \doteqdot e^{ax}.$$

L'image de $\varphi(t) = \Gamma(t-1)$ sera

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

ou

$$(4)\qquad \Gamma(t-1) \doteqdot \frac{1}{1-x}.$$

2. Règles générales du calcul ainsi défini. — Théorème I. — *Si*

$$\varphi_1(n) \doteqdot f_1(x), \qquad \varphi_2(n) \doteqdot f_2(x),$$

on a

$$C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) \doteqdot C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \qquad (C_1 \text{ et } C_2 \text{ étant des constantes}).$$

En effet, la série entière étant absolument convergente pour les valeurs de x comprises dans le cercle de convergence, on peut écrire

$$C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) \doteqdot \sum \frac{x^n}{n!}[C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n)] = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x).$$

Application. — Cherchons l'image de

$$\varphi_1(n) = \rho^n \cos n\theta \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(n) = \rho^n \sin n\theta.$$

On a

$$\varphi_1(n) + i\varphi_2(n) = \rho^n e^{in\theta} = (a+ib)^n,$$

en posant

$$a + ib = \rho e^{i\theta};$$

on a donc, d'après la formule (3),

$$\varphi_1(n) + i\varphi_2(n) \doteqdot e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos bx + i e^{ax}\sin bx,$$

d'où

$$(5)\qquad \begin{cases} \rho^n \cos n\theta \doteqdot e^{ax}\cos bx, \\ \rho^n \sin n\theta \doteqdot e^{ax}\sin bx. \end{cases}$$

Théorème II. — *Si* $\varphi(n) \doteqdot f(x)$, *l'image de* $\varphi(n+1)$ *sera* $f'(x)$,

$$\varphi(n+1) \doteqdot f'(x).$$

En effet, si l'on considère des valeurs de x dans le cercle de convergence,

$$\varphi(n+1) \div \varphi(1) + \frac{x}{1\,!}\varphi(2) + \ldots = f'(x).$$

Corollaire. — *Soit* $\varphi(n-1)^{\star}$ *la fonction égale à* $\varphi(n-1)$ *si* $n > 0$, *et égale à zéro si* $n = 0$.

On aura

$$\varphi(n-1)^{\star} \div \varphi(0)\frac{x}{1\,!} + \frac{\varphi(1)}{2\,!}x^2 + \ldots = \int_0^x f(x)\,dx.$$

Théorème III. — *Si* $\varphi(n) \div f(n)$, *on a aussi*

$$\lambda^n \varphi(n) \div \Sigma x^n \frac{\lambda^n \varphi(n)}{n\,!} = f(\lambda x).$$

Application. — Cherchons l'image de $\varphi(n) = 2^n n!$ On a vu que

$$n\,! \div \frac{1}{1-x},$$

on aura donc

$$2^n n\,! \div \frac{1}{1-2x}.$$

Théorème IV. — *Si* $\varphi(n)$ *dépend d'un paramètre* λ, *on a*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(n, \lambda) \div \frac{\partial}{\partial\lambda}f(x, \lambda).$$

On a, en effet,

$$\varphi(n, \lambda) \div f(x, \lambda), \qquad \varphi(n, \lambda+\Delta\lambda) \div f(x, \lambda+\Delta\lambda)$$

et, en vertu du théorème I,

$$\frac{\varphi(n, \lambda+\Delta\lambda) - \varphi(n, \lambda)}{\Delta\lambda} \div \frac{f(x, \lambda+\Delta\lambda) - \varphi(x, \lambda)}{\Delta\lambda}.$$

Comme une série entière est uniformément convergente dans un intervalle intérieur à l'intervalle de convergence, la limite de la somme sera la somme des limites, et, par conséquent, en faisant tendre $\Delta\lambda$ vers zéro, on obtient la formule annoncée.

Application. — Quel est l'original de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$?

On a

$$\frac{1}{\lambda - x} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1 - \frac{x}{\lambda}} \doteqdot \frac{1}{\lambda^{n+1}} n\,!$$

dérivons par rapport à λ,

$$(-1)\frac{1}{(\lambda-x)^2} \doteqdot -\frac{(n+1)}{\lambda^{n+2}} n\,!$$

$$(-1)(-2)\frac{1}{(\lambda-x)^3} \doteqdot (-1)^2 \frac{(n+1)(n+2)n\,!}{\lambda^{n+3}}$$

en faisant $\lambda = 1$, on a

$$\frac{1}{(1-x)^{q+1}} \doteqdot \frac{(n+q)\,!}{q\,!}. \tag{6}$$

Théorème V. — *Si $\varphi(n) \doteqdot f(x)$, on a*

$$n\,\varphi(n) \doteqdot x f'(x)$$

et

$$\frac{\varphi(n)^{*}}{n} \doteqdot \int_0^x \frac{f(x)}{x}\,dx,$$

l'astérisque signifiant que l'on doit prendre zéro pour valeur de la fonction lorsque $n = 0$, car alors elle n'est pas définie.

Pour démontrer la première relation, par exemple, on remarque que

$$\lambda^n \varphi(n) \doteqdot f(\lambda x);$$

dérivons par rapport à λ les deux membres

$$n\lambda^{n-1}\varphi(n) \doteqdot x f'(\lambda x),$$

en faisant $\lambda = 1$, on a la relation annoncée. Plus généralement, on aura

$$n^q \varphi(n)^{*} \doteqdot \left(x\frac{\partial \ldots}{\partial x}\right)^{(q)} f(x) \qquad \text{si} \quad q \text{ entier} > 0,$$

$$\doteqdot \left(\int \cdots \frac{dx}{x}\right)^{(q)} f(x) \qquad \text{si} \quad q \text{ entier} < 0.$$

Théorème VI. — *Si q est un nombre entier, positif ou négatif, on a*

$$\frac{f(x)}{x^q} \doteqdot \frac{n\,!}{(n+q)\,!}\varphi(n+q)^{*},$$

l'astérisque indiquant encore que, si q est négatif on doit prendre pour valeur du second membre la fonction

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{(n+q)!}\varphi(n+q) && \text{si} \quad n \geqq -q, \\ &= 0 && \text{si} \quad n < -q. \end{aligned}$$

On a, en effet,

$$\int_0^x f(x)\,dx \doteqdot \varphi(n-1)^*,$$

$$\int_0^{\lambda x} f(x)\,dx \doteqdot \lambda^n \varphi(n-1)^*;$$

dérivons par rapport à λ,

$$xf(\lambda x) \doteqdot n\lambda^{n-1}\varphi(n-1)^*,$$

ou en faisant $\lambda = 1$,

$$xf(x) \doteqdot n\varphi(n-1)^*$$

en répétant cette formule q fois, on a la relation annoncée pour $q < 0$.

Si $q > 0$, on voit que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \frac{\varphi(1)}{1!} + \frac{\varphi(2)}{2!}x + \ldots \doteqdot \frac{\varphi(n+1)}{n+1},$$

ce qui donne encore la formule annoncée, en faisant la convention, semblable à celle de Dirac, de supposer $\psi(n) = \varphi(n+1) = 0$ pour $n = -1$.

Théorème VII. — *On a*

$$n!\,\varphi(n) \doteqdot \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} f(t)\,dt.$$

c'est là une propriété connue de l'intégrale de Carson.

Théorème VIII. — *$f_1(x)f_2(x)$ a pour image*

$$\varphi_1(n)\varphi_2(0) + C_n^1\varphi_1(n-1)\varphi_2(1) + C_n^2\varphi_1(n-2)\varphi_2(2) + \ldots + C_n^n\varphi_1(0)\varphi_2(n),$$

ce que nous écrirons symboliquement, par analogie à la formule du binôme,

$$f_1(x)f_2(x) \doteqdot [\varphi_1(i) + \varphi_2(i)]^n.$$

Nous verrons plus loin l'utilité de cette écriture.

3. Application au wronskien réduit. — On sait que la condition nécessaire et suffisante, pour que trois fonctions $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ soient linéairement indépendantes, et que

$$(\mathrm{A}) \qquad \Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & y'_3(t) \\ y''_1(t) & y''_2(t) & y''_3(t) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Au lieu de prendre le wronskien relatif à la dérivation, on peut prendre celui relatif à tout autre opérateur linéaire, et l'on a alors une condition seulement nécessaire :

$$(\mathrm{B}) \qquad \mathrm{D}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1(t+1) & y_2(t+1) & y_3(t+1) \\ y_1(t+2) & y_2(t+2) & y_3(t+2) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Si zéro n'est pas une singularité pour les fonctions $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, on sait que l'on peut remplacer la condition nécessaire et suffisante (A) par une autre plus simple, $\Delta(0) \not\equiv 0$.

De même, *montrons que si* $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ *ont des images* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, *on peut remplacer la condition* (B) *par une autre plus simple* $\mathrm{D}(0) \not\equiv 0$ et qui sera nécessaire et suffisante.

En effet, d'après le théorème I, la condition nécessaire et suffisante pour que $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$ soient linéairement indépendantes est que $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ le soient, donc, puisque ces fonctions sont holomorphes à l'origine, que

$$\begin{vmatrix} f_1(0) & f_2(0) & f_3(0) \\ f'_1(0) & f'_2(0) & f'_3(0) \\ f''_1(0) & f''_2(0) & f''_3(0) \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & y_3(0) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) \\ y_1(2) & y_2(2) & y_3(2) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

4. Application a la résolution d'une équation aux différences finies linéaire a coefficients constants. — Soit à résoudre

$$\varphi(n+p) + a_1\varphi(n+p-1) + \ldots + a_p\varphi(n) = \Phi(n),$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des constantes.

Si

$$\varphi(n) \doteqdot y(x), \qquad \Phi(n) \doteqdot \mathrm{F}(x),$$

on aura

$$y^{(p)}(x) + a_1 y^{(p-1)}(x) + \ldots + a_p y(x) = \mathrm{F}(x)$$

dont la solution est de la forme

$$\begin{aligned} y = \mathrm{Y}(x) + \mathrm{C}_1 e^{r_1 x} + \mathrm{C}_2 e^{r_2 x} + e^{s_1 x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots) + \ldots \\ + e^{a_1 x}(\beta_1 \cos bx + \beta_2 \sin bx) + \ldots . \end{aligned}$$

Or, on a $\mathrm{Y}(x) \doteqdot \psi(n)$, $\psi(n)$ étant une solution particulière de l'équation aux différences finies; en outre

$$\begin{aligned} e^{r_1 x} &\doteqdot r_1^n & &[\textit{cf.} \text{ formule } (3)], \\ e^{s_1 x} x^q &\doteqdot \frac{n\,!}{(n-q)\,!}\,\mathrm{S}_1^{n-q} & &(\textit{cf.} \text{ Théorème VI}), \\ e^{a_1 x}\cos bx &\doteqdot \rho^n \sin n\theta & &[\textit{cf.} \text{ formule } (5)], \\ e^{a_1 x}\sin bx &\doteqdot \rho^n \cos n\theta & &[\textit{cf.} \text{ formule } (5)], \end{aligned}$$

et l'on a, par conséquent, pour les valeurs entières de la variable t, la solution cherchée

$$\varphi(n) = \psi(n) + \mathrm{C}_1 r_1^n + \ldots + \alpha_1 s_1^n + \alpha_2 n s_1^{n-1} + \ldots + \rho_1^n(\beta_1 \cos n\theta_1 + \beta_2 \sin n\theta_1), \ldots .$$

Sans ce jeu d'images, on aurait été obligé de faire toute une suite de raisonnements rigoureusement analogues à ceux que l'on utilise pour la résolution des équations différentielles correspondantes.

3. Application aux équations différentielles. — Soit à résoudre

$$xy''' + 2(1-2x)y'' + (x-6)y' + y = 0,$$

on a

$$\begin{array}{r|r} y \doteqdot \varphi(n) & 1 \\ y' \doteqdot \varphi(n+1) & -\ 6 \\ xy' \doteqdot n\,\varphi(n) & +\ 1 \\ y'' \doteqdot \varphi(n+2) & 2 \\ xy'' \doteqdot n\,\varphi(n+1) & -\ 4 \\ xy''' \doteqdot n\,\varphi(n+2) & 1 \end{array}$$

en additionnant membre à membre après multiplication par les nombres de droite, il vient

$$(n+2)\,\varphi(n+2) - 2(2n+3)\,\varphi(n+1) + (n+1)\,\varphi(n) = 0.$$

Sachant que

$$\varphi(0) = y(0), \qquad \varphi(1) = y'_0,$$

on a ainsi, de proche en proche, $\varphi(n)$, et

$$y(x) = \sum_0^\infty \frac{\varphi(n)}{n!} x^n.$$

Nous ne développerons pas ici ce point de vue, ni la légitimité du développement, qui a déjà été étudiée par Borel et Poincaré. Qu'il nous suffise seulement d'indiquer ici que le calcul symbolique donne un développement formel de la solution $y(x)$, sans avoir à raisonner par récurrence pour connaître la loi de formation des coefficients; or on sait que tout raisonnement par récurrence exige au préalable une connaissance du résultat à légitimer.

6. Application aux nombres et polynomes de Bernoulli. — Indiquons enfin que les formules établies nous permettent d'établir, sans tâtonnements aucun, les propriétés des polynomes $Q_n(y)$ de Bernoulli.

D'après leur définition, on a, en effet,

$$Q_n(y) \doteqdot \frac{e^{yx} - e^x}{e^x - 1},$$

à condition de poser $Q_0(y) = y - 1$. Les nombres de Bernoulli sont tels que

$$i^n B_{\frac{n}{2}} \doteqdot \frac{-x}{e^x - 1},$$

à condition de poser $B_0 = 1$, $B_{\frac{1}{2}} = -\frac{i}{2}$, $B_{\frac{3}{2}} = B_{\frac{5}{2}} = \ldots = 0$.

On obtient :

1° $$Q_n(y+1) = y^n + Q_n(y).$$

En effet,

$$Q_n(y+1) - Q_n(y) \doteqdot \frac{e^{(y+1)x} - e^x - (e^{yx} - e^x)}{e^x - 1} = e^{yx} \doteqdot y^n$$

2° Si $y = m$ entier, on obtient $Q_n(m)$. En effet,

$$Q_n(m) \mathrel{:\!\cdot\!:} \frac{e^{mx} - e^x}{e^x - 1} = e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(m-1)x} \mathrel{:\!\cdot\!:} 1 + 2^n + \ldots + (m-1)^n.$$

3° Cherchons la relation de récurrence qui donne les Q_n et les B_n. On a

$$\begin{array}{rcl|c}
i^n B_{\frac{n}{2}} & \mathrel{:\!\cdot\!:} & \dfrac{-x}{e^x - 1} & 1 \\[2ex]
n\, Q_{n-1} & \mathrel{:\!\cdot\!:} & x\,\dfrac{e^{xy} - 1}{e^x - 1} - x & -1 \\[2ex]
\dfrac{\partial Q_n}{\partial y} & \mathrel{:\!\cdot\!:} & \dfrac{x\, e^{yx}}{e^x - 1} & 1
\end{array}$$

d'où, en additionnant, après multiplication avec les nombres de droite,

$$Q'_{2p+1} = (2p+1)\, Q_{2p},$$
$$(-1)^p B_p + Q'_{2p} = 2p\, Q_{2p-1}.$$

4° Cherchons à exprimer les B_n en fonction des $Q_n\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) i^n B_{\frac{n}{2}} \mathrel{:\!\cdot\!:} \frac{-x}{e^x - 1}\;\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}} - 1} = \frac{1}{2}\left[x\,\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^x - 1}\right].$$

Comme

$$n\, Q_{n-1}(y) = x\,\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{e^{xy} - e^x}{e^x - 1}\,dx = x\,\frac{e^{xy} - 1}{e^x - 1} - x,$$

on a

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) i^n B_{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}\, Q_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'où les relations

$$\left\{\begin{aligned}
B_n &= \frac{(-1)^n\, 2^{2n}\, n\, Q_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n} - 1}, \\
Q_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.
\end{aligned}\right.$$

II. — Deuxième correspondance.

1. Définition. — Soit $\varphi(n)$ une fonction, définie au moins sur l'ensemble des entiers > 0. Nous lui avons fait correspondre une première image $f(x)$ au sens de la première correspondance.

L'image $\mathcal{F}(p)$ de $f(x)$, au sens du calcul symbolique d'Heaviside, sera

$$\mathcal{F}(p) = p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx.$$

Nous appellerons désormais $\mathcal{F}(p)$ deuxième image de $\varphi(n)$, ou image tout court, aucune confusion n'étant possible avec la première image $f(x)$, et nous écrirons

$$\varphi(n) \mathrel{\underline{\subset\!\supset}} \mathcal{F}(p).$$

Si $\sum_0^\infty \frac{\varphi(n)}{p^n}$ converge dans un certain intervalle, on aura

$$\mathcal{F}(p) = \sum_0^\infty \frac{\varphi(n)}{p^n},$$

car

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \frac{\varphi(n)}{p^n} &= p\sum \frac{\varphi(n)}{n\,!}\,\frac{1}{p^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u} u^n\, du \\ &= p\sum \frac{\varphi(n)}{n\,!}\int_0^\infty e^{-px} x^n\, dx = p\int_0^\infty e^{-px}\left[\sum \frac{\varphi(n)}{n\,!}x^n\right] dx.\end{aligned}$$

Mais si la série ne converge pas, $\mathcal{F}(p)$ sera la somme (B), c'est-à-dire par le procédé de sommation de Borel.

Dans le cas où $\mathcal{F}(p)$ admet l'infini pour point ordinaire ou pour point singulier isolé, on aura également

$$\varphi(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\mathrm{C})} \frac{\mathcal{F}\left(\frac{1}{z}\right) dz}{z^{n+1}}$$

ou, en appelant (L) un cercle arbitrairement grand centré sur O,

$$\varphi(n) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\mathrm{L})} \frac{\mathcal{F}(z)}{z}\, z^n\, dz,$$

cette formule, qui donne l'original connaissant l'image, jouit des mêmes propriétés que celle de Bromwich-Mellin

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\mathrm{C})} \frac{\mathcal{F}(z)}{z}\, e^{zx}\, dz.$$

2. Calcul des images. — Si l'on applique les formules du calcul symbolique classique aux formules démontrées dans le premier chapitre, on obtient

(Th. I) $$C_1\varphi_1(n)+C_2\varphi_2(n) \risingdotseq C_1\mathcal{F}_1(p)+C_2\mathcal{F}_2(p),$$

(Th. II) $$\varphi(n+1) \risingdotseq p[\mathcal{F}(p)-\varphi(0)],$$

$$\varphi(n-1)^* \risingdotseq \frac{\mathcal{F}(p)}{p},$$

(Th. III) $$\lambda^n\varphi(n) \risingdotseq \mathcal{F}\left(\frac{p}{\lambda}\right),$$

(Th. IV) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(n,\lambda) \risingdotseq \frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{F}(p,\lambda),$$

(Th. V) $$n\varphi(n) \risingdotseq p\frac{\partial}{\partial p}\mathcal{F}(p),$$

$$\frac{\varphi(n)^*}{n} \risingdotseq \int_p^\infty \frac{\mathcal{F}(p)}{p}\,dp, \;\ldots,$$

on retiendra ces formules, ainsi que :

(3) $$a^n \risingdotseq \frac{p}{p-a},$$

(5) $$\rho^n\cos n\theta \risingdotseq \frac{p(p-a)}{(p-a)^2+b^2},$$

$$\rho^n\sin n\theta \risingdotseq \frac{pb}{(p-a)^2+b^2}, \qquad (\rho e^{i\theta}=a+ib).$$

Le théorème II nous montre que cette transformation *joue, auprès des équations aux différences finies, le même rôle que le calcul symbolique classique auprès des équations différentielles et intégrales*; l'opérateur qui remplace t par $t+1$ peut, comme l'opérateur de dérivation, être remplacé par une mise en facteur.

La structure des deux calculs symboliques est d'ailleurs la même, comme le montre les formules des tableaux préliminaires. Complétons maintenant notre répertoire.

Première formule du produit. — Proposons-nous de chercher l'image de $\varphi_1(n)\times\varphi_2(n)$.

Supposons que $\mathcal{F}_2(p)$ soit holomorphe à l'extérieur d'un cercle de rayon R_2.

On a

$$\varphi_1(n)\,\varphi_2(n) \doteq \sum \frac{\varphi_1(n)}{p^n}\,\varphi_2(n) = \frac{1}{2i\pi}\sum \frac{\varphi_1(n)}{p^n}\int_{(C)} \frac{\mathcal{F}_2(z)}{z}\,z^n\,dz,$$

où C est un cercle de rayon $r > R_2$,

$$\varphi_1(n)\,\varphi_2(n) \doteq \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \left[\sum \varphi_1(n)\frac{z^n}{p^n}\right]\frac{\mathcal{F}_2(z)}{z}\,dz,$$

car la série $\Sigma\varphi_1(n)\frac{z^n}{p^n}$ est absolument uniformément convergente, pour p bien choisi. Prenons

$$\frac{p}{r} > R_1, \qquad r < \frac{p}{R_1}.$$

On aura alors la formule fondamentale

$$\varphi_1(n)\,\varphi_2(n) \doteq \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \mathcal{F}_1\left(\frac{p}{z}\right)\mathcal{F}_2(z)\,\frac{dz}{z}, \qquad \left(\frac{p}{R_1} > r > R_2^1\right).$$

Application. — Comme $a^n \doteq \dfrac{p}{p-a}$, on a

$$a^n\,\varphi(n) \doteq \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \mathcal{F}\left(\frac{p}{z}\right)\frac{dz}{z-a} = \mathcal{F}\left(\frac{p}{a}\right),$$

résultat trouvé déjà par une voie différente.

Deuxième formule du produit. — Cherchons l'original $\psi(n)$ de $\mathcal{F}_1(p)\,\mathcal{F}_2(p)$. On a l'identité

$$\psi(0) + \frac{\psi(1)}{p} + \frac{\psi(2)}{p^2} + \ldots \equiv \left[\varphi_1(0) + \frac{\varphi_1(1)}{p} + \ldots\right]\left[\varphi_2(0) + \frac{\varphi_2(1)}{p} + \ldots\right]$$

et par conséquent

$$\psi(n) = \sum_{(i+j=n)} \varphi_1(i)\,\varphi_2(j).$$

Application. — Original de $\mathcal{F}(p) = \dfrac{p^2}{p^2 + 2bp + c}$.

En posant

$$\alpha = -b + \sqrt{b^2 - c} \qquad \text{et} \qquad \beta = b - \sqrt{b^2 - c}.$$

on peut écrire

$$\mathcal{F}(p) = \frac{p}{p-\alpha}\,\frac{p}{p-\beta}$$

comme

$$\frac{p}{p-\alpha} \risingdotseq \alpha^m, \qquad \frac{p}{p-\beta} \risingdotseq \beta^n,$$

on a

$$\mathcal{F}(p) \risingdotseq \sum_{(i+j=n)} \beta^i \alpha^j.$$

1° Si $b^2 > c$,

$$\varphi(n) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

2° Si $b^2 = c$,

$$\frac{p^2}{(p-\alpha)^2} \risingdotseq \mathcal{F}(p) = (n+1)\alpha^n.$$

en vertu de la formule $\frac{(p-1)}{p} \risingdotseq C_n^1$ que nous établirons plus loin.

3° Si $b^2 < c$, les racines imaginaires peuvent alors s'écrire $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ en posant

$$\rho = \sqrt{c} \qquad \text{et} \qquad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{c-b^2}}{b}.$$

On a, par conséquent,

$$\varphi(n) = \rho^n \frac{e^{i\theta(n+1)} - e^{-i\theta(n+1)}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \rho^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Original de $\frac{p}{p-a}\mathcal{F}(p-a)$. — On a

$$\mathcal{F}(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt,$$

$$\mathcal{F}(p-a) = (p-a)\int_0^\infty e^{-pt} e^{ta} f(t)\,dt.$$

On voit donc que l'image au sens d'Heaviside de $\frac{p}{p-a}\mathcal{F}(p-a)$ est $f(x)e^{ax}$, et par conséquent

$$\frac{p}{p-a}\mathcal{F}(p-a) \risingdotseq [\varphi(i) + a^j]^n.$$

Original de $\mathcal{F}(p+a)$. — Pour l'établir, nous allons avoir besoin de la correspondance d'Heaviside, que nous écrirons ici à l'aide du signe $\simeq$.

On sait que

$$\frac{1}{p}\mathcal{F}(p+a)\frac{p^2}{p+a} \simeq e^{-ax}f(x).$$

Or

$$\frac{p}{p+a} \simeq e^{-ax}, \qquad -p+\frac{p^2}{p+a} \simeq -ae^{-ax},$$

et par conséquent, en faisant intervenir la fonction $\delta(x)$ de Dirac,

$$\frac{p^2}{p+a} \simeq \delta(x) - ae^{-ax}.$$

Par ailleurs, la formule de Borel donne

$$\frac{1}{p}\mathcal{F}(p+a)\frac{p^2}{p+a} \simeq \int_0^x \mathrm{Y}(t)\left[\delta(x-t) - ae^{-a(x-t)}\right] dt,$$

où $\mathrm{Y}(x)$ est l'image de $\mathcal{F}(p+a)$

$$e^{-ax}f(x) = \int_0^x \mathrm{Y}(t)\delta(x-t)\,dt - a\int_0^x \mathrm{Y}(t)e^{-a(x-t)}dt = \mathrm{Y}(x) - ae^{-ax}\int_0^x \mathrm{Y}(t)e^{at}dt.$$

En dérivant par rapport à x, on a

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\mathrm{Y} - a\int_0^x \mathrm{Y}e^{at}\,dt\right) = e^{ax}\mathrm{Y}'(x),$$

$$\mathrm{Y}(x) = \int_0^x e^{-ax}f'(x)\,dx + \mathrm{C}$$

et comme $f(0) = \lim_{p=\infty}\mathcal{F}(p+a) = \lim_{x=0}\mathrm{Y}(x) = \mathrm{C}$, on trouve finalement

$$\mathcal{F}(p+a) \simeq \int_0^x e^{-ax}f'(x)\,dx + f(0).$$

Cette formule auxiliaire, que nous avons établie ici parce que nous ne l'avons trouvée dans aucune littérature, va maintenant nous donner l'image de $\mathcal{F}(p+a)$. On a, en effet,

$$f'(x) \doteqdot \varphi(n+1),$$

$$e^{-ax}f'(x) \doteqdot [\varphi(i+1) + (-a)^i]^n,$$

et par conséquent

$$\mathcal{F}(p+a) \doteq \psi(n) = \begin{cases} [\varphi(i+1)+(-a)^i]^n & \text{si } n \neq 0, \\ \varphi(0) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Première application. — Soit $\varphi(x)$ une fonction différentiable, au sens de Stolz-Fréchet, ainsi que ses dérivées. Proposons-nous de calculer

$$\psi(x) \equiv \varphi(x+q) - C_q^1 \varphi(x+q-1) + C_q^2 \varphi(x+q-2) + \ldots + (-1)^q \varphi(x).$$

Si $\mathcal{F}(p) \doteq \varphi(n)$, on a, en négligeant un polynome en p dont l'image est nulle,

$$\psi(n) \doteq p^q \mathcal{F}(p) - C_q^1 p^{q-1} \mathcal{F}(p) + \ldots = (p-1)^q \mathcal{F}(p)$$

et

$$(p-1)\mathcal{F}(p) \doteq \varphi(x+1) - \varphi(x) = \varphi'(x+\theta_1) \qquad (0 \leqq \theta_1 \leqq 1)$$

$$(p-1)^2 \mathcal{F}(p) \doteq \varphi'(x+\theta_1+1) - \varphi'(x+\theta_1) = \varphi''(x+\theta_1+\theta_2) \qquad (0 \leqq \theta_2 \leqq 1)$$

et l'on pourra donc écrire

$$\psi(x) = \varphi^{(q)}(x+\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_q) = \varphi^{(q)}(x+q\theta) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

(Cette formule peut être aussi démontrée à l'aide du théorème de Rolle, mais d'une façon moins simple.)

III. — Application à l'analyse combinatoire.

Fonction des combinaisons de m objets pris n a n. — Nous appellerons fonction des combinaisons de m objets pris n à n la fonction de n qui est égale à $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!\,n!}$ pour $n \leqq m$, et qui est nulle pour les autres valeurs de n; nous la désignerons plus simplement par C_m^n.

Son image dans le plan B est

$$\mathcal{F}(p) = C_m^0 + C_m^1 \frac{1}{p} + \ldots + C_m^m \frac{1}{p^m} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^m,$$

c'est-à-dire

(7) $$C_m^n \doteq \left(\frac{p+1}{p}\right)^m;$$

elle va nous permettre d'établir facilement plusieurs formules d'Analyse combinatoire.

1° *Calcul de*

$$S = C_m^n + C_{m+1}^n + C_{m+2}^n + \ldots + C_{m+q}^n.$$

Cette somme a pour image

$$\mathcal{F}(p) = \left(\frac{1+p}{p}\right)^m + \left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+1} + \ldots + \left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+q}$$

$$= \left(\frac{1+p}{p}\right)^m \frac{1 - \left(\frac{1+p}{p}\right)^{q+1}}{1 - \frac{1+p}{p}} = -p\left(\frac{1+p}{p}\right)^m + p\left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+q+1}.$$

En prenant l'original de cette expression, on obtient le résultat final

$$S = C_{m+q+1}^{n+1} - C_m^{n+1}.$$

2° *Calcul de*

$$S = C_m^n + C_{m+1}^{n+1} + C_{m+2}^{n+2} + \ldots + C_{m+q}^{n+q}.$$

Si l'on ne tient pas compte d'une série entière en p, dont l'image est nulle, on peut écrire

$$S_\gamma \sqsupset \left(\frac{1+p}{p}\right)^m + p\left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+1} + \ldots + p^q\left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+q} = \left(\frac{1+p}{p}\right)^m \frac{1-(1+p)^{q+1}}{1-(1+p)}$$

$$= -\frac{1}{p}\left(\frac{1+p}{p}\right)^n + p^q\left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+q+1}.$$

D'où le résultat final

$$S = C_{m+q+1}^{n+q} - C_m^{n-1}.$$

Cette formule aurait pu être déduite de la précédente à cause de la symétrie du triangle arithmétique.

Quand on additionne les cellules d'une même colonne, on fait la différence entre les cellules qui sont immédiatement en bas à droite de la dernière cellule et à droite de la première cellule; quand on additionne celles d'une même diagonale, on retranche celle qui est sous la dernière et celle qui est immédiatement à gauche de la première.

3° *Calcul de*

$$S = C_m^n + C_q^1 C_m^{n+1} + C_q^2 C_m^{n+2} + \ldots + C_m^{n+q},$$

son image est

$$\left(\frac{1+p}{p}\right)^m + C_q^1 \left(\frac{1+p}{p}\right)^m p + \ldots + C_q^q \left(\frac{1+p}{p}\right)^m p^q = \left(\frac{1+p}{p}\right)^m (1+p)^q$$
$$= p^q \left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+q}$$

et par conséquent

$$S = C_{m+q}^{n+q}.$$

En particulier, si $n = 0$, $m = q$, on voit que la somme des carrés des cellules d'une même ligne est $\sum_{n=0}^{n=q} (C_q^n)^2 = C_q^{2q}$.

4° *Calcul de*

$$S = C_m^{m-n} + C_q^1 C_m^{m-n+1} + C_q^2 C_m^{m-n+2} + \ldots + C_q^n.$$

On a

$$C_m^{m-n} = C_m^n \supseteq \left(\frac{1+p}{p}\right)^m$$
$$C_m^{m-n+1} = C_m^{n-1} \supseteq \frac{1}{p}\left(\frac{1+p}{p}\right)^m, \qquad \ldots.$$

On peut écrire, en ajoutant à S une série de termes nuls

$$S = C_m^{m-n} + C_q^1 C_m^{m-n+1} + \ldots + C_q^n C_m^m + C_q^{n+1} C_m^{m+1} + \ldots + C_q^q.$$

Son image est

$$\left(\frac{p+1}{p}\right)^m + C_q^1 \frac{1}{p}\left(\frac{p+1}{p}\right)^m + \ldots + C_q^q \frac{1}{p^q}\left(\frac{p+1}{p}\right)^m = \left(\frac{p+1}{p}\right)^m \left(1 + \frac{1}{p}\right)^q$$
$$= \left(\frac{p+1}{p}\right)^{m+q}$$

et par conséquent

$$S = C_{m+q}^n.$$

5° *Calcul de*

$$S = C_m^n - C_q^1 C_{m+1}^n + C_q^2 C_{m+2}^n - \ldots + (-1)^q C_{m+q}^n$$

son image est

$$\left(\frac{1+p}{p}\right)^m - C_q^1\left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+1} + \ldots + (-1)^q\left(\frac{1+p}{p}\right)^{m+q} = \left(\frac{1+p}{p}\right)^m\left(1-\frac{1+p}{p}\right)^q$$
$$= \frac{(-1)^q}{p^q}\left(\frac{1+p}{p}\right)^m$$

donc

$$S = (-1)^q C_m^{n-q}.$$

6° *Calcul de*

$$S = C_n^n C_q^n + C_{n+1}^n C_q^{n+1} + \ldots + C_q^n,$$

en ajoutant à S une série de termes tous nuls, on peut écrire

$$S = 1 + C_1^n C_q^1 + C_2^n C_q^2 + \ldots + C_q^n.$$

Son image est

$$1 + C_q^1\left(\frac{1+p}{p}\right) + C_q^2\left(\frac{1+p}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+p}{p}\right)^q = \left(1+\frac{1+p}{p}\right)^q = \left(\frac{1+2p}{2p}\right)^q \times 2^q,$$

ce qui donne, en vertu du théorème III,

$$S = 2^{q-n} C_q^n.$$

Fonction des combinaisons de n objets pris q à q. — Ce sera encore la fonction de n qui est égale à C_n^q pour n positif et $\geqq q$, et qui est nulle pour $n < q$ ou négatif. Cherchons son image; on sait que

$$\frac{p}{p-\lambda} \doteq \lambda^n.$$

Dérivons par rapport à λ successivement q fois,

$$\frac{p}{(p-\lambda)^2} \doteq n\lambda^{n-1},$$
$$\frac{p}{(p-\lambda)^3} \doteq \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^{n-2}, \quad \ldots, \quad \frac{p}{(p-\lambda)^{q+1}} \doteq \lambda^{n-q} C_n^q$$

ou, si l'on fait $\lambda = 1$,

(8) $$C_n^q \doteq \frac{p}{(p-1)^{q+1}}.$$

Cette formule a pour but d'évaluer des sommes de C_n^q dans lesquelles q a une valeur bien définie, et qui, par conséquent, ne peuvent pas être étudiées au moyen de l'image de C_q^n.

Mais donnons plutôt quelques exemples.

1° *Calcul de*

$$S = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n,$$

on peut ajouter à cette série les termes C_n^{n+1}, C_n^{n+2}, ..., qui sont tous nuls, et par conséquent

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} C_n^q \Delta p\left[\frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \ldots\right] = p\frac{1}{1-\dfrac{1}{p-1}} = p\frac{p-1}{p-2} = p + \frac{p}{p-2},$$

l'image de p est nulle; celle de $\frac{p}{p-2}$ est 2^n; donc

$$S = 2^n,$$

formule d'ailleurs évidente par elle-même.

2° *Calcul de*

$$S = 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots + C_n^n \quad (\text{ou } C_n^{n-1}).$$

L'image de cette série est encore

$$p\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{(p-1)^{2q+1}} = \frac{p}{p-1}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{(p-1)^2}} = p\frac{p-1}{p^2-2p} = \frac{p-1}{p-2}.$$

Comme on vient de voir que $p\frac{p-1}{p-2} \Delta 2^n$, on a

$$S = 2^{n-1}.$$

Traitons maintenant un exemple un peu plus compliqué.

3° *Calcul de*

$$S = C_n^1 - C_n^4 + C_n^7 - C_n^{10} + \ldots + (-1)^q C_n^{1+3q},$$

q étant le plus grand des nombres entiers tels que $1 + 3q \leqq n$.

En ajoutant toujours une série de termes nuls, on obtient pour image

$$p\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1^q)}{(p-1)^{2+3q}}=\frac{p}{(p-1)^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{(p-1)^3}}=\frac{p(p-1)}{p^3-3p^2+3p},$$

on vérifie sans peine que

$$\frac{p-1}{p^2-3p+3}\equiv\frac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{p-\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}}+\frac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{p-\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}},$$

S est donc égal à

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.$$

Les racines ayant pour module $2\sqrt{3}$ et pour argument $\pm\frac{\pi}{6}$, on peut écrire

$$(3+i\sqrt{3})^{n-1}=(2\sqrt{3})^{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{6}\pi+i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right),$$

$$(3-i\sqrt{3})^{n-1}=(2\sqrt{3})^{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{6}\pi-i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right),$$

et par conséquent

$$S=\frac{(2\sqrt{3})^{n-1}}{2^n}\left(2\cos\frac{n-1}{6}\pi-\frac{i\sqrt{3}}{2}2i\sin\frac{n-1}{6}\pi\right).$$

Nous obtenons donc finalement

$$S=3^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n-1}{6}\pi+\frac{3^{\frac{n}{2}}}{2}\sin\frac{n-1}{6}\pi.$$

Autre exemple : problème des additions (De Moivre). — Proposons-nous de chercher le nombre de façons de réaliser le total n en additionnant $m+1$ nombres, chaque addition différant par la nature des nombres employés ou par leur ordre. Pour généraliser encore le problème, on supposera qu'on a seulement à sa disposition les $s+1$ premiers nombres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad S,$$

chacun pouvant être employé plusieurs fois dans la même addition.

Soit F_n^m le nombre d'additions qui donnent le total n avec $m+1$ nombres. Si l'on veut former le total n avec $m+2$ nombres, on peut commencer par écrire le nombre S, ce qui donne F_{n-s}^m additions possibles; avec le nombre $S-1$, on aurait F_{n-s+1}^m additions possibles, et ainsi de suite. Donc

$$F_n^{m+1} = F_{n-s}^m + F_{n-s+1}^m + F_{n-s+2}^m + \ldots + F_n^m.$$

Si j'avais une idée du résultat, je pourrais raisonner par récurrence, montrer que s'il est vrai pour m, il est aussi vrai pour $m+1$; à défaut de celle-ci, je vais recourir au calcul symbolique.

Soit $y_m(p)$ l'image de F_n^m; on a

$$y_{m+1}(p) = y_m + \frac{1}{p}y_m + \frac{1}{p^2}y_m + \ldots + \frac{1}{p^s}y_m = \frac{\left(\frac{1}{p^{s+1}} - 1\right)}{\frac{1}{p} - 1}y_m,$$

$$y_{m+1}(p) = \frac{1}{p^s}\,\frac{p^{s+1}-1}{p-1}\,y_m(p);$$

l'équation de récurrence ayant deux variables, m et n, nous devons effectuer encore une fois la transformation.

En posant $p=\lambda$ l'image $Y,(p, \lambda)$ de $y_n(\lambda)$ vérifie

$$p[Y - y_0(\lambda)] = \frac{1}{\lambda^s}\,\frac{\lambda^{s+1}-1}{\lambda-1}\,Y$$

ou, comme $y_0(p)=1$,

$$Y = \frac{p}{p - \frac{\lambda^{s+1}-1}{\lambda-1}\,\frac{1}{\lambda^s}} \bumpeq \left(\frac{\lambda^{s+1}-1}{\lambda-1}\,\frac{1}{\lambda^s}\right)^n$$

et l'image de F_n^m est

$$y_m(p) = \left(\frac{p^{s+1}-1}{p-1}\,\frac{1}{p^s}\right)^m.$$

Si l'on avait donné une valeur déterminée à s et à m, nous aurions décomposé cette expression, et nous aurions son original F_n^m.

En particulier, si l'on dispose de tous les nombres pour faire les additions, $s=\infty$, et l'image devient

$$\frac{p^m}{(p-1)^m} = p^{m-1}\frac{p}{(p-1)^{m-1+1}}.$$

On a alors

$$F_n^m = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Cette méthode, bien entendu, n'est pas la plus intuitive, mais elle devait surement aboutir à un résultat.

IV. — Application aux séries divergentes.

Soit une série de terme u_n, convergente ou non, et formons les sommes itérées

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \\ S_n^{(1)} &= S_0 + S_1 + \ldots + S_n, \\ S_n^{(2)} &= S_0^{(1)} + S_1^{(2)} + \ldots + S_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Si $B_n^k \dfrac{S_n^{(k)}}{C_n^{n+k}}$ tend vers une limite L quand $u \to \infty$, on sait que L est la somme (C, k) de la série, c'est-à-dire la somme au sens généralisé de Césaro.

Proposons-nous d'étudier ce procédé de sommation par le calcul symbolique. Soit $G^{(k)}(p)$ l'image de $S_n^{(k)}$; on a

$$\begin{aligned} G^{(k)}(p) &= S_0^{(k-1)} + \frac{S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)}}{p} + \frac{S_0^{k-1} + S_1^{k-1} + S_2^{k-1}}{p^2} + \ldots \\ &= S_0^{k-1} \frac{p}{p-1} + \frac{1}{p} S_1^{k-1} \frac{p}{p-1} + \ldots \end{aligned}$$

$$G^{(k)}(p) = \frac{p}{p-1} G^{(k-1)}(p).$$

Ainsi, pour passer d'une somme itérée d'ordre $k-1$ à celle d'ordre k, il suffit de multiplier son image par $\dfrac{p}{p-1}$.

Dans ses *Leçons sur les séries divergentes*, M. Borel se propose de démontrer la formule

$$S_n^{(k)} = S_n + C_k^1 S_{n-1} + C_{k+1}^2 S_{n-2} + \ldots + S_{n+k+1}^n S_0.$$

La démonstration est immédiate par le calcul symbolique. On a, en effet,

$$G^{(k)}(p) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^k G^{(0)}(p);$$

comme

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^k \risingdotseq C^n_{n+k+1}, \qquad G^{(0)}_1(p) \risingdotseq S_n,$$

la formule du produit donne

$$S^{(k)}_n = \sum_{i+j=n} C^i_{i+k+1} S_j. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autre exemple :

$$u_n = S^k_n - C^1_{k+1} S^k_{n-1} + C^2_{k+1} \ldots (-1)^{k+1} S^k_{n-k-1}.$$

Cette formule, qui trouve aussi une application dans la théorie des séries divergentes, est immédiate,

$$u_n \risingdotseq G^{(k)}(p)\left(\frac{p-1}{p}\right)^{k+1},$$

comme

$$G^{(k)}(p) \risingdotseq S^{(k)}_n, \qquad \left(\frac{p-1}{p}\right)^{k+1} \risingdotseq (-1)^n C^n_{k+1},$$

la formule du produit nous donne le résultat annoncé. Plus généralement,

$$G^{(k+m)} = G^{(0)} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{(k+m)} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^m G^k(p)$$

donne

$$S^{k+m}_n = S^k_n + S^k_{n-1} C^1_{1+(m-1)} + \ldots + C^n_{n+(n-1)} S^k_0.$$

Autre exemple. — Soient

$$S_n = \sum_0^n u_n, \qquad S'_n = \sum_0^n v_n, \qquad S''_n = \sum_0^n w_n,$$

où

$$w_u = u_u v_0 + u_{n-1} v_1 + \ldots + u_0 v_n.$$

Cherchons à exprimer, avec M. Borel, les sommes itérées de la dernière série S'' à l'aide des sommes itérées $S'^{(k)}$ et $S^{(h)}$. On a

$$\begin{aligned} G''^{(h+k+1)} &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{h+k+2}\left[u_0 v_0 + \frac{(u_0 v_1 + v_0 u_1)}{p} + \ldots\right] \\ &= \left(\frac{p}{p-1}\right)^{h+1} G^{(0)}(p) \times \left(\frac{p}{p-1}\right)^{k+1} G'^{(0)}(p). \end{aligned}$$

Et la formule du produit donne

$$\mathrm{S}_n''^{(h+k+1)} = \mathrm{S}_n^{(h)}\mathrm{S}_0'^{(h)} + \mathrm{S}_{n-1}^{(h)}\mathrm{S}_1'^{(h)} + \ldots + \mathrm{S}_0^{(h)} + \mathrm{S}_n'^{(k)}.$$

V. — Résolution générale des équations de récurrence.

Proposons-nous de chercher les fonctions $\mathrm{P}_n(x)$ qui vérifient la relation de récurrence

$$(n+2)\mathrm{P}_{n+2} - (2n+3)x\mathrm{P}_{n+1} + (n+1)\mathrm{P}_n = 0$$

et qui soient tels que $\mathrm{P}_0(x) = 1$, $\mathrm{P}_1(x) = x$.

Autrement dit, on cherche la forme finie des polynomes de Legendre $\mathrm{P}_n(x)$, en ne supposant connu de ceux-ci que leur équation de récurrence.

Appelons $y(p, x)$ l'image de $\mathrm{P}_n(x)$. On a

$$\begin{array}{ll|c}
\mathrm{P}_n & \risingdotseq y & 1 \\
\mathrm{P}_{n+1} & \risingdotseq py - p & -3x \\
\mathrm{P}_{n+2} & \risingdotseq p^2y - p^2 - px & 2 \\
n\mathrm{P}_n & \risingdotseq -py' & 1 \\
n\mathrm{P}_{n+1} & \risingdotseq -p^2y' - py + p & -2x \\
n\mathrm{P}_{n+2} & \risingdotseq -2p^2y - p^3y' + 2p^3 + px & 1
\end{array}$$

En additionnant après multiplication avec les nombres de droite :

$$-p\frac{\partial y}{\partial y}(p^2 - 2px + 1) + y(1 - px) = 0.$$

L'intégration n'offre pas de difficulté; on a

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{1}{p}\,\frac{1 - px}{p^2 - 2px + 1} \equiv \frac{1}{p} + \frac{-\frac{1}{2}}{p - x + \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{-\frac{1}{2}}{p - x - \sqrt{x^2 - 1}},$$

ce qui donne

$$\log\frac{y}{\mathrm{C}(x)} = \log p - \frac{1}{2}\log\left(p - x - \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{1}{2}\log\left(p - x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$y(p, x) = \frac{p\,\mathrm{C}(x)}{\sqrt{p^2 - 2px + 1}}.$$

Si $p \to \infty$, $y \to C(x) = \varphi(0) = 1$, et par conséquent l'image de $P_n(x)$ est

$$y(p, x) = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2px + 1}}.$$

Il convient maintenant de transformer $y(p, x)$. Or, on a vu que

$$\sqrt{\frac{p}{p-\alpha}} \risingdotseq \alpha^n \frac{(2n)!}{(n!\,2^n)^2}$$

et l'on a, en appliquant la formule du produit,

$$\sqrt{\frac{p}{p - x - \sqrt{x^2-1}}}\sqrt{\frac{p}{p - x + \sqrt{x^2-1}}}$$
$$\risingdotseq \sum_{(i+j=n)} \frac{(2i)!\,(2j)!}{(i!\,j!\,2n)^2}(x + \sqrt{x^2-1})^i (x - \sqrt{x^2-1})^j$$

ou

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\left[\frac{(2i)!}{2^i i!}(x + \sqrt{x^2-1})^i + \frac{(2j)!}{2^j j!}(x - \sqrt{x^2-1})^j\right]^n.$$

Si l'on étudie simultanément les deux termes de ce développement équidistants des extrêmes, on voit que les radicaux disparaissent, et l'on vérifie que cette expression est équivalente à celle que l'on utilise habituellement

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

La première forme a sur celle-ci l'avantage de donner $P_n(x)$ pour une valeur déterminée de x.

Application aux séries de polynomes. — On aurait pu se proposer de calculer la somme

$$S(x, t) = P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + \ldots,$$

dite fonction génératrice de P_n. Cet autre problème se traite de la même façon, et l'on a

$$S(x, t) = y\left(\frac{1}{t}, x\right) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2tx + 1}}.$$

On appliquera ces considérations aussi bien aux fonctions de Bessel, en considérant, par exemple, l'équation de récurrence

$$x^{-n+1} J_{n+1} = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)]$$

[on trouvera

$$J_n(u) \risingdotseq \frac{p}{u} e^{-\frac{up}{2}} \int_0^u u J_0(u) e^{\frac{u^2 p}{2}} du \Big].$$

Enfin, signalons les renseignements qu'on peut tirer de l'image des polynomes de Legendre, par exemple,

$$\text{si} \quad x = 1, \qquad y(p, 1) = \frac{p}{p-1} \risingdotseq 1, \qquad \text{d'où} \qquad P_n(1) = 1;$$

$$\text{si} \quad x = -1 \qquad y = \frac{p}{p+1} \risingdotseq (-1)^n, \qquad \text{d'où} \qquad P_n(-1) = (-1)^n.$$

Par ailleurs, considérons les polynomes $Tn(x)$ de Tchebyscheff. définis par

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta).$$

D'après la formule (5),

$$\cos n\theta \risingdotseq \frac{p(p-a)}{(p-a)^2 + b^2}, \qquad \text{où} \qquad e^{i\theta} = a + ib;$$

$$a = \cos\theta, \qquad b = \sin\theta; \qquad \cos n\theta \risingdotseq \frac{p(p-\cos\theta)}{p^2 - 2p\cos\theta + 1};$$

et par conséquent

$$Tn(y) \risingdotseq \frac{p(p-y)}{p^2 - 2py + 1}.$$

Or on a, d'après la formule du produit,

$$\frac{p}{p^2 - 2py + 1} - y \risingdotseq \sum_{i+j=n} P_i(y) P_j(y) - y \sum_{(i+j=n-1)} P_i(y) P_j(y) = T_n(y).$$

Cette formule lie les polynomes de Legendre et de Tchebyscheff.

VI. — Application à quelques équations fonctionnelles autres que des équations aux différences finies.

Indiquons seulement ici une application de formules précédentes à l'équation d'Abel

$$f(x^m) + \lambda f(x) = \theta(x).$$

$\theta(u)$ étant une fonction donnée, λ étant une constante donnée, et $f(n)$ la fonction à déterminer. L'idée de cette application est due à M. Parodi.

Posons $x = e^p$

$$f(e^{mp}) + \lambda f(e^p) = \theta(e^p);$$

si

$$f(e^p) \risingdotseq \varphi(n), \qquad \theta(e^p) \risingdotseq \Phi(n),$$

on aura

$$\frac{1}{m^n}\varphi(n) + \lambda\varphi(n) = \Phi(n),$$

$$(m^{-n} + \lambda)\varphi(n) = \Phi(n),$$

$$\varphi(n) = \frac{\Phi(n)}{m^{-n} + \lambda}.$$

Utilisons la formule du produit [sans toutefois étudier sa validité, qui dépend de la fonction $\theta(x)$]

$$f(e^p) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c)} \mathcal{F}_\lambda\left(\frac{p}{z}\right)\theta(e^z)\frac{dz}{z},$$

où

$$\mathcal{F}_\lambda(p) \risingdotseq \frac{1}{m^{-n} + \lambda}.$$

On en conclut

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c)} \mathcal{F}_\lambda\left(\frac{\log x}{z}\right)\theta(e^z)\frac{dz}{z},$$

formule qui permet d'étudier les propriétés de la solution $f(x)$. Bien entendu, nous nous sommes borné ici à l'étude d'une équation à deux termes, mais cette restriction n'a rien d'essentiel.