JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BIBEN

Le dualisme « Ondes-corpuscules » et la démonstration de l'identité entre le principe de Fermat et le principe de Maupertuis

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 22 (1943), p. 55-69.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1943_9_22__55_0>

Le dualisme « Ondes-corpuscules » et la démonstration de l'identité entre le principe de Fermat et le principe de Maupertuis;

PAR GEORGES BIBEN.

I. — Introduction.

La théorie du champ massique et électromagnétique, malgré sa perfection et sa cohérence, n'est qu'une approximation. Adoptant le point de vue de M. Louis de Broglie, cette théorie doit être considérée comme étant l'approximation de l'optique géométrique par rapport à l'optique ondulatoire.

En nous plaçant dans le cadre de la mécanique ondulatoire des particules sans spin, nous verrons que les trajectoires du champ massique et électromagnétique sont aux ondes, ce que sont les lignes bicaractéristiques aux variétés caractéristiques d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre que nous appellerons *équation d'Ondes*.

Nous écrirons « l'équation d'ondes » sous la forme invariante donnée par MM. Cotton et Levi-Civita

$$\mathcal{J}(u) = \square_2 u + B^\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + Cu = 0. \tag{1}$$

$\square_2 u$ est le second paramètre différentiel de Beltrami-Lamé

$$\frac{1}{\sqrt{-\rho}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-\rho}\, A^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)$$

(nous n'avons pas écrit les signes sommatoires pour simplifier l'écriture) relatif à un espace de Riemann défini par la métrique

$$ds^2 = A_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

ρ est le discriminant de la forme quadratique du ds^2, de plus nous ferons l'hypothèse essentielle que le ds^2 a le caractère hyperbolique normal, c'est-à-dire qu'il comprend un carré positif et $(n-1)$ carrés négatifs. Nous avons pris $\sqrt{-\rho}$ parce que dans nos applications le nombre n sera pair.

Les ondes $\Omega(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, compatibles avec l'équation (1), sont, comme on le sait, données par la forme quadratique du second degré

$$A\left(x^\alpha, x^\beta, \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial\Omega}{\partial x^\beta}\right) = \square_1 \Omega = A^{\alpha\beta} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\Omega}{\partial x^\beta} = 0. \tag{2}$$

La surface définie par l'équation (2) est un conoïde qui devient un cône lorsque les coefficients $A^{\alpha\beta}$ sont constants. On sait qu'à l'intérieur de ce conoïde le problème de Cauchy est correctement posé, c'est-à-dire qu'il n'admet qu'une solution. Sur la surface, l'équation (1), en général, n'a pas de solution, ou au contraire elle en admet plusieurs. Les caractéristiques sont en fait des « Ondes » si l'on admet les conceptions d'Hugoniot, c'est-à-dire comme étant la surface de contact entre deux solutions.

Les lignes bicaractéristiques de M. Hadamard s'écrivent, en posant

$$P_\alpha = \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha},$$

$$\frac{dx^\alpha}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial P_\alpha}} = \frac{dP_\alpha}{-\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x^\alpha}} = d\theta. \tag{3}$$

En posant $A_1 = \frac{1}{2} A$, on écrit (3) sous la forme hamiltonienne

$$\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \frac{\partial A_1}{\partial P_\alpha}, \qquad \frac{dP_\alpha}{d\theta} = -\frac{\partial A_1}{\partial x^\alpha}. \tag{4}$$

En posant

$$\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \dot{x}^\alpha, \qquad \frac{dP_\alpha}{d\theta} = \dot{p}_\alpha, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial \dot{x}^\alpha} = \mathcal{P}_\alpha, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial \dot{p}_\alpha} = Q^\alpha,$$

et, en opérant la transformation de Legendre,

$$L = \mathcal{P}_\alpha \dot{x}^\alpha + Q^\alpha \dot{p}_\alpha - A_1.$$

Après un calcul élémentaire ([1]), les équations (4) s'écrivent sous la forme lagrangienne

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial p^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\alpha}\right) = 0. \tag{5}$$

Ce sont les équations de la dynamique des points libres. En général, la forme A étant indépendante des $\dot{p}_\alpha$, l'on a $Q^\alpha = 0$ et l'on obtient avec M. De Donder

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0, \qquad \frac{dx^\alpha}{d\theta} = \dot{x}^\alpha. \tag{5'}$$

De l'équation (3), on tire

$$\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_\alpha} = A^{\alpha\beta} P_\beta;$$

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, **208**, p. 1975.

en multipliant par $A_{\alpha\beta}$, on trouve

$$A_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\theta} = P_\beta,$$

d'où l'on déduit le théorème de M. De Donder

$$A^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta = A_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\theta}\frac{dx^\beta}{d\theta} = 0, \tag{2'}$$

c'est-à-dire que les bicaractéristiques sont des lignes de longueur nulle ($d\theta^2 = 0$).

Les deux formes (2) et (2′) sont équivalentes, mais l'une est écrite en coordonnées tangentielles tandis que l'autre est écrite en coordonnées ponctuelles.

Posons $\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \omega^\alpha$, et nous écrirons (2′) sous la forme

$$\mathcal{H}(x^\alpha, x^\beta, \omega^\alpha, \omega^\beta) = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta.$$

Remarquons que $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^\alpha} = A_{\alpha\beta}\omega^\beta = P_\beta$. La forme $\mathcal{H}$ étant homogène et de degré 2 par rapport aux variables ω^α, d'après le théorème d'Euler

$$P_\alpha\omega^\alpha = 2\mathcal{H}.$$

Par un calcul élémentaire, les équations (4) prennent la forme

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^\alpha}\right) - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^\alpha} = 0.$$

En effectuant la transformation de Legendre $H = P_\alpha\omega^\alpha - \mathcal{H}$, il vient

$$\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}, \qquad \frac{dP_\alpha}{d\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \tag{4'}$$

II. — Démonstration de l'identité entre le principe de Fermat et celui de Maupertuis.

Supposons que nous sachions intégrer les équations (4′), alors on en tirerait x^α, P_α en fonction de θ et de $2n$ constantes arbitraires; c'est-à-dire

$$H(x^\alpha, P_\alpha) = H(\theta, B_1, \ldots).$$

En différentiant par rapport à l'une des constantes, B_1 par exemple, on aurait

$$\frac{\partial H}{\partial B_1} = \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial B_1} + \frac{\partial H}{\partial P_\alpha}\frac{\partial P_\alpha}{\partial B_1}$$

et, en tenant compte des équations (4′),

$$\frac{\partial H}{\partial B_1} = -\frac{dP_\alpha}{d\theta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial B_1} + \frac{dx^\alpha}{d\theta}\frac{\partial P_\alpha}{\partial B_1} = -\frac{d}{d\theta}\left(P_\alpha\frac{\partial x^\alpha}{\partial B_1}\right) + \frac{\partial}{\partial B_1}\left(P_\alpha\frac{dx^\alpha}{d\theta}\right);$$

or nous savons que $P_\alpha \omega^\alpha = 2\mathcal{H}$, donc

$$\frac{\partial(H - 2\mathcal{H})}{\partial B_1} = - \frac{d}{d\theta}\left(P_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial B_1}\right).$$

En posant $S = 2\mathcal{H} - H = \mathcal{H}$, il vient en intégrant

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial B_1}\int_0^\theta S\,d\theta = \frac{\partial}{\partial B_1}\int_0^\theta \mathcal{H}\,d\theta = \left[P_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial B_1}\right]_0^\theta;$$

en prenant pour limite d'intégration, deux points A et B situés sur une ligne bicaractéristique, il vient

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial B_1}\int_A^B S\,d\theta = \frac{\partial}{\partial B_1}\int_A^B \mathcal{H}\,d\theta = \left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial B_1}\right]_A^B.$$

L'on peut poser sans ambiguïté $\frac{\partial}{\partial B_1} = \delta$ et nous obtenons

$$(7) \qquad \delta\int_A^B S\,d\theta = \delta\int_A^B \mathcal{H}\,d\theta = \left[\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^\alpha}\delta x^\alpha\right]_A^B.$$

L'intégrale $\int_A^B S\,d\theta$ n'est pas autre chose que l'action « maupertuisienne » quant à l'intégrale $\delta\int_A^B \mathcal{H}\,d\theta$; elle exprime, selon M. De Donder, *le théorème de Fermat généralisé.*

En effet, en vertu de la relation $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^\alpha} = P_\alpha = \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha}$ et du fait que $\mathcal{H} \equiv 0$, il vient

$$(8) \qquad \delta\int_A^B S\,d\theta = \delta\int_A^B \mathcal{H}\,d\theta = [\delta\Omega]_A^B = \delta\int_A^B d\Omega = 0.$$

En conclusion : parmi tous les chemins possibles pour aller du point A au point B, les rayons de l'onde Ω, aussi bien que les trajectoires du corpuscule suivent les lignes extrémales définies par les équations lagrangiennes

$$(9) \qquad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^\alpha}\right) = 0.$$

Réciproquement on peut démontrer que si les trajectoires du corpuscule satisfont aux équations (9), il y aura identité entre le principe de Maupertuis et le principe de Fermat. Dans le dualisme *Ondes-corpuscules* le caractère ondulatoire est représenté par la surface caractéristique, tandis que le caractère corpusculaire en est donné par les lignes bicaractéristiques.

III. — Sur les différentes formes du principe de moindre action.

Considérons avec M. Hadamard une forme quadratique quelconque

$$G(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n) = \Sigma A_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \qquad (G = 2\mathcal{H}),$$

l'intégrale

$$\int \sqrt{G(x^1, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)} = \int \sqrt{G\left(\frac{dx^1}{d\theta}, \ldots, \frac{dx^n}{d\theta}\right)} d\theta$$

représente la longueur d'un arc de courbe. Les lignes géodésiques sont définies par

$$\delta \int \sqrt{G\left(\frac{dx^1}{d\theta}, \ldots, \frac{dx^n}{d\theta}\right)} d\theta,$$

dont l'équation différentielle est

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\omega^\alpha}\right) = 0.$$

Nous avons vu que les équations lagrangiennes des lignes bicaractéristiques étaient $\left(\text{au facteur } \frac{1}{2} \text{ près}\right)$

$$\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial G}{\partial\omega^\alpha}\right) = 0.$$

Comme le remarque M. Hadamard « ces deux formes (qui correspondent à deux formes du principe de moindre action) ne sont pas exactement équivalentes, mais le deviennent moyennant une condition ». En effet

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\omega^\alpha}\right) = \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial G}{\partial\omega^\alpha}\right) = 0.$$

Comme ces équations sont inchangées par le changement de θ en $\varphi(\theta)$, si l'on suppose que θ soit choisi de manière à ce que $G = \text{const}$, alors dans ces conditions le dénominateur $\frac{1}{2\sqrt{G}}$ peut sortir du signe de différentiation et l'on obtient

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\omega^\alpha}\right) = \frac{1}{2\sqrt{G}}\left[\frac{\partial G}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial G}{\partial\omega^\alpha}\right)\right] = 0.$$

Dans ces conditions on peut écrire

$$(10) \qquad \delta\int_A^B S\, d\theta = \delta\int_A^B \sqrt{G}\, d\theta = \delta\int_A^B d\Omega = 0.$$

Dans le cas particulier des systèmes stationnaires, c'est-à-dire si nous supposons que la forme $\mathcal{H}$ ne dépend pas explicitement de la variable x^n, les équations de Lagrange donnent

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega^n}\right) = 0,$$

d'où l'on conclut que $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega^n}$ est un invariant le long de la ligne qui joint le point A au point B, c'est-à-dire que $\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega^n}\right)_A = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega^n}\right)_B$.

Si nous laissons les extrémités fixes, $\delta x^1 = \ldots = \delta x^{n-1} = 0$ et puisque $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega^n} = 1$,

$$(11) \qquad \delta \int_A^B S\, d\theta = \delta \int_A^B \mathcal{H}\, d\theta = \delta \int_A^B d\Omega$$
$$= \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega^n}\right)_B (\delta x^n)_B - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega^n}\right)_A (\delta x^n)_A = (\delta x^n)_B - (\delta x^n)_A = \delta \int_A^B dx^n.$$

La variable x^n étant la variable temporelle, on obtient la formule classique

$$(12) \qquad \delta \int_A^B S\, d\theta = \delta \int_A^B dt.$$

Si l'on pose $G = 2(T - U)$ (T étant l'énergie cinétique et U l'énergie potentielle), on peut écrire

$$(13) \qquad \delta \int_A^B \sqrt{2(T-U)}\sqrt{A_{ik}\, dx^i\, dx^k} = \delta \int_A^B dt \qquad (i, k = 1, \ldots, n-1).$$

IV. — Les diverses formes de l'équation de Jacobi.

Notre fonction S n'est autre que la fonction de Jacobi, qui, à notre point de vue, coïncide avec la fonction Ω. En écrivant l'intégrale d'action sous la forme classique

$$(14) \qquad S = \int [P_\alpha \omega^\alpha - \mathcal{H}]\, d\theta = \int P_\alpha\, dx^\alpha - \int \mathcal{H}\, d\theta,$$

d'où l'on tire

$$P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, \qquad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial \theta}.$$

De sorte que l'équation de la variété caractéristique est équivalente à l'équation

$$(15) \qquad A^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0,$$

car il faut tenir compte du fait que $\mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$.

La forme sous laquelle nous écrivons l'équation de Jacobi peut choquer à priori, mais nous allons montrer que notre point de vue est très naturel et très légitime, si l'on tient compte du caractère spécial que jouent nos formes quadratiques (A), (H) et ($\mathcal{H}$) qui sont identiquement nulles.

Considérons, avec M. Mieghem, l'expression

$$L^2(x, dx) = ds^2 = A_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

d'où l'on tire, en posant $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$,

$$L^2(x, dx) = A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = u^\alpha u_\alpha = A^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1;$$

en posant $u_\alpha = P_\alpha$ et $u^\alpha = \omega^\alpha$, on trouve

$$S = \int P_\alpha \, dx^\alpha - \int \mathcal{H} \, ds, \qquad \mathcal{H} = A_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta = 1;$$

on trouve alors

$$P_\alpha = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}, \qquad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial s} = 1,$$

et l'équation de Jacobi prend la forme

$$A^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 1.$$

Seulement l'équation de Jacobi, écrite sous cette forme présente, le grave défaut de ne pas être homogène. C'est pour remédier à ce défaut que M. De Donder introduit au lieu de la fonction S la fonction

$$\bar{S} = S - x_0$$

et il obtient la forme identique à la nôtre

$$A^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^\beta} - \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x^0} \right)^2 = 0 \qquad \text{puisque} \quad \frac{\partial \bar{S}}{\partial x^0} = -1.$$

Pour obtenir l'équation d'onde, appliquons le procédé de M. De Donder en posant

$$J(u) = A^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} = 0;$$

grâce à ce principe variationnel $\frac{\delta[\sqrt{-\rho}\, J(U)]}{\sqrt{-\rho}\, \delta u} = 0$, nous obtiendrons $\Box_2 u = 0$.

M. Louis de Broglie m'a fait remarquer que pour pouvoir assimiler les bicaractéristiques aux trajectoires, il faut ramener l'équation d'onde à la forme $\Box_2 u = 0$.

M. De Donder appelle fonction d'onde absolue, toute fonction $\Omega(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ qui satisfait identiquement à l'équation d'ondes; l'équation $\Omega = 0$ définira une onde absolue. Par contre toute fonction $\Omega(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, qui satisfait à l'équation d'ondes en vertu de $\Omega = 0$, définira une onde relative.

Supposons maintenant que l'équation $J(u)$ ne soit pas linéaire, dans ce cas il faudrait écrire, à la place de l'équation (2), l'équation

$$A(x^\alpha, \Omega, P_\alpha) = 0,$$

et les lignes bicaractéristiques de M. Hadamard s'écriraient

$$\frac{dx^\alpha}{\frac{\partial A_1}{\partial P_\alpha}} = \frac{dP_\alpha}{-\frac{\partial A_1}{\partial x^\alpha}} = \frac{d\Omega}{\sum_\alpha \frac{\partial A_1}{\partial \Omega} P_\alpha} = d\theta. \tag{3'}$$

Dans le cas où l'équation $J(u)$ est linéaire $\frac{\partial A_1}{\partial \Omega} = 0$, donc

$$\frac{dx^\alpha}{\frac{\partial A_1}{P\partial_\alpha}} = \frac{dP_\alpha}{-\frac{\partial A_1}{\partial x^\alpha}} = \frac{d\Omega}{0} = d\theta,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\Omega}{d\theta} \equiv 0. \tag{16}$$

De (3) et de (16) l'on déduit les deux théorèmes suivants dus à M. De Donder :

a. Si Ω est une fonction d'onde absolue, cette fonction est invariante le long de tout rayon.

b. Si Ω est une fonction d'onde relative, cette fonction est un invariant relatif le long de tout rayon.

Soit $\Omega(x^\alpha, \theta) \equiv 0$ une fonction d'onde. On aura, en vertu de (16),

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + P_\alpha\omega^\alpha = \frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \mathcal{H} = 0. \tag{17}$$

L'équation (17) a été appelée par M. Mieghem la *forme jacobienne* de l'équation d'onde; en fait elle est identique à notre équation (15) puisque le fait que $\mathcal{H}$ soit identiquement nulle entraîne aussi $\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} = 0$.

V. — Les différentes théories de la mécanique ondulatoire.

Nous avons dit que, pour pouvoir assimiler les bicaractéristiques aux trajectoires, il faut ramener l'équation d'ondes à la forme $\square_2 u = 0$. Pour cela considérons l'équation fondamentale de la mécanique ondulatoire pseudo-euclidienne, en l'absence de champ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = -\frac{4\pi^2}{h^2}m_0^2c^2\psi = \chi^2 m_0^2 c^2\psi \quad \left(\chi = \frac{2\pi i}{h}\right), \tag{18}$$

l'équation correspondante de la variété caractéristique sera

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{x,y,z}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{19}$$

Cette équation représente les surfaces d'ondes d'une propagation avec la vitesse c, et les lignes bicaractéristiques représentent des mouvements avec la vitesse c. Mais ces trajectoires ne sont pas celles dont la masse propre $m_0 \neq 0$, car l'équation de cette particule est

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{x,y,z}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 = m_0^2c^2, \tag{20}$$

et les trajectoires orthogonales représentent des mouvements s'effectuant avec une vitesse inférieure à c.

Or il est facile de ramener l'équation (18) à la forme $\square_2 \Psi = 0$; pour cela, on peut employer soit le procédé de M. de Broglie, soit le procédé de M. De Donder.

Dans le procédé de M. de Broglie, on pose

$$\psi = a(x, y, z)\, e^{\chi E t} \quad \text{(E étant une énergie donnée),}$$

ce qui signifie que ψ est une solution particulière de l'équation

$$\psi = \frac{1}{\chi E^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

l'équation (18) prend alors la forme

$$\text{(21)} \qquad A^{44} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi = 0 \qquad \text{avec} \quad A^{44} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2},$$

l'équation de la variété caractéristique de l'équation (21) s'écrit

$$\text{(22)} \qquad A^{\alpha\beta} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Omega}{\partial x^\beta} = \left(1 - \frac{m_0^2 c^2}{E^2}\right) \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)^2 \right] - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 = 0,$$

qui, pour $\Omega = Et - \Omega_t(x, y, z)$, donne l'équation de Jacobi

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)^2 - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 = m_0^2 c^2.$$

Dans l'équation de propagation (21), il faut tenir compte de la dispersion, car la vitesse de propagation des ondes au lieu d'être c est égale à

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^2}{E^2}}} = \frac{c}{n},$$

par analogie avec l'optique géométrique l'on pose $n = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^2}{E^2}}$, ce qui signifie que l'indice de réfraction varie avec la fréquence.

M. De Donder considère l'espace à quatre dimensions plongé dans un espace à cinq dimensions, ce qui conduit à poser

$$\frac{\partial^2 \psi}{(\partial x^0)^2} = \chi^2 m_0^2 c^2 \psi,$$

et si l'on pose

$$\Omega(x^1, x^3, x^3, x^4, x^0) = \overline{\Omega}(x^1, x^2, x^3, x^4) - m_0 c x^0,$$

on retrouve bien l'équation de Jacobi.

La théorie de M. De Donder permet de former l'équation relativiste des particules ponctuelles sans spin, en tenant compte du champ électromagnétique extérieur; il est donc naturel d'envisager une variété à cinq dimensions, car l'on sait depuis un Mémoire célèbre de MM. Einstein et Mayer qu'une telle variété permet de faire la théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité.

On peut alors partir de l'expression

$$ds^2 = \sum_1^4 g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + \varepsilon \Phi_\alpha\, dx^\alpha\, dx^0 + \varepsilon \Phi_\beta\, dx^\beta\, dx^0 + \varepsilon^2 \Phi_\alpha \Phi_\beta (dx^0)^2 - (dx^0)^2$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$$

(les $g_{\alpha\beta}$ sont les potentiels d'Einstein, et les Φ_α les potentiels du champ électromagnétique).

Si nous supposons

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^0} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x^0} = 0,$$

nous avons

$$\Gamma_{115} = \Gamma_{225} = \Gamma_{335} = \Gamma_{445} = \Gamma_{555} = 0, \qquad \Gamma^1_{25} = \varepsilon^2 \Phi^1 F_{21}, \qquad \Gamma^2_{15} = \varepsilon^2 \Phi^2 F_{12}, \qquad \ldots;$$

on retrouve, ainsi que nous l'avons déjà signalé [1], les équations de MM. Einstein-Mayer

$$\left(R_{ql} - \frac{1}{2} g_{ql} R\right) - \left(F_{kq} - \frac{1}{4} g_{qp} F_{kl} F^{kl}\right) = 0,$$

$$F^{pk}{}_{,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} F^{pk}) = 0.$$

M. De Donder écrit alors l'équation fondamentale de la mécanique ondulatoire sous la forme

$$(23) \qquad \square_2 u + 2\varepsilon \Phi^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha\, \partial x_0} + (\varepsilon^2 \Phi^\alpha \Phi_\alpha - 1) \frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Phi^\alpha \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^0} = 0$$

$$\left(\varepsilon = \frac{e}{m_0 c^2}\right);$$

si l'on tient compte de la relation complémentaire de Maxwell $\dfrac{\partial \sqrt{-g} \Phi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$, il vient

$$(24) \qquad \square_2 u + 2\varepsilon \Phi^\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha\, \partial x^0} + (\varepsilon^2 \Phi^\alpha \Phi_\alpha - 1) \frac{\partial^2 u}{(\partial x^0)^2} = 0.$$

Les ondes $\Omega(x^1, x^2, x^3, x^4; x^0)$ compatibles avec les équations (23), (24) sont

$$(25) \qquad g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^\alpha} + \varepsilon \Phi_\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial x^0}\right) \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x^\beta} + \varepsilon \Phi_\beta \frac{\partial \Omega}{\partial x^0}\right) - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}\right)^2 = 0;$$

si l'on pose

$$\Omega(x^1, x^2, x^3, x^4; x^0) = \overline{\Omega}(x^1, x^2, x^3, x^4) - m_0 c x^0,$$

[1] *C. R. Acad. Sc.*, **208**, 1939, p. 1975.

on obtient

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}\Phi_\beta\right) - m_0^2 c^2, \tag{26}$$

équation analogue à celle de Jacobi écrite plus haut, à la condition de remplacer $\frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha}$ par $\frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha$.

Si l'on remplace $\overline{\Omega}$ par S, nous aurons

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}\Phi_\beta\right) - m_0^2 c^2 = 0. \tag{27}$$

Posons $S = k\log\psi$ (k étant une constante), nous obtenons

$$g^{\alpha\beta}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha\psi\right)\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}\Phi_\beta\psi\right) - m_0^2 c^2\psi^2 = 0. \tag{28}$$

La forme (28) est équivalente à là forme

$$J(\psi) = k^2 g^{\alpha\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} - 2k\frac{e}{c}\Phi^\alpha\psi\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + \left[\frac{e^2}{c^2}\Phi^\alpha\Phi_\alpha - m_0^2 c^2\right]\psi^2 = 0;$$

l'équation d'ondes est alors donnée par le principe variationnel

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta[\sqrt{-g}\,J\,\Psi]}{\delta\Psi} = 0,$$

ce qui donne

$$k^2\Box_2\psi - 2k\frac{e}{c}\Phi^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - k\frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\Phi^\alpha)}{\partial x^\alpha}\psi + \left[\frac{e^2}{c^2}\Phi^\alpha\Phi_\alpha - m_0^2 c^2\right]\psi = 0 \tag{29}$$

ou

$$\Box_2\psi - \frac{2}{k}\frac{e}{c}\Phi^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{k}\frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{(\partial\sqrt{-g}\,\Phi^\alpha)}{\partial x^\alpha}\psi + \frac{1}{k^2}\left[\frac{e^2}{c^2}\Phi^\alpha\Phi_\alpha - m_0^2 c^2\right]\psi = 0. \tag{30}$$

Si l'on pose $k = \frac{h}{2\pi i}$, on obtient, avec M. De Donder, l'équation

$$\begin{aligned}\Box_2\psi - \frac{4i\pi}{h}\frac{e}{c}\Phi^\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{2i\pi}{h}\right)^2\left[\frac{e^2}{c^2}\Phi^\alpha\Phi_\alpha - m_0^2 c^2\right]\psi \\ - \frac{2i\pi}{h}\frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\Phi^\alpha\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\psi = 0.\end{aligned} \tag{31}$$

Théorème. — *L'équation* (29) *peut s'écrire*

$$\Box_2\overline{\psi} - \frac{1}{k^2}m_0^2 c^2\overline{\psi} = 0 \qquad \text{si} \quad \overline{\psi} = e^{-\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int\Phi_\alpha dx^\alpha}\psi. \tag{32}$$

En effet reprenons l'équation

$$J(\psi) = g^{\alpha\beta}\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha\psi\right)\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}\Phi_\beta\psi\right) - m_0^2 c^2\psi^2 = 0.$$

Nous avons

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha} = e^{-\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int\Phi_\alpha dx^\alpha}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{k}\frac{e}{c}\Phi_\alpha\psi\right],$$

d'où

$$k\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{c}\Phi_\alpha\psi = e^{\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int\Phi_\alpha dx^\alpha} k\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^\alpha}$$

et

$$J(\overline{\psi}) = k^2\,\Box_1\overline{\psi} - m_0^2 c^2\overline{\psi}^2 = 0;$$

grâce au principe variationnel

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta[\sqrt{-g}\,J(\overline{\psi})]}{\delta\overline{\psi}} = 0,$$

on obtient l'équation

$$k^2\,\Box_2\overline{\psi} - m_0^2 c^2\overline{\psi} = 0,$$

ce qui donne, pour $k = \frac{h}{2\pi i}$,

$$\Box_2\overline{\psi} - \left(\frac{2i\pi}{h}\right)^2 m_0^2 c^2\overline{\psi} = 0. \tag{33}$$

Ceci n'est d'ailleurs pas sans analogie avec la théorie des espaces tordus de la mécanique ondulatoire considérée par M. Roubaud-Valette.

Ce résultat va nous permettre de montrer que, même en tenant compte du champ électromagnétique, l'équation de Jacobi peut s'écrire sous la forme

$$\Box_1\overline{S}' - \left(\frac{\partial\overline{S}'}{\partial x^0}\right)^2 = 0.$$

En effet

$$\overline{S} = k\log\overline{\psi} \qquad \text{et} \qquad S = k\log\psi,$$

par conséquent

$$\overline{S} = S - \frac{e}{c}\int\Phi_\alpha\,dx^\alpha.$$

Mais, comme nous l'avons déjà dit, pour pouvoir assimiler les bicaractéristiques aux trajectoires, il faut ramener l'équation d'ondes à la forme $\Box_2 u = 0$; si nous posons

$$\frac{\partial^2\overline{\psi}}{(\partial x^0)^2} = \left(\frac{2i\pi}{h}\right)^2 m_0^2 c^2\overline{\psi},$$

nous aurons

$$\Box_2\overline{\psi} - \frac{\partial^2\psi}{(\partial x^0)^2} = 0 \tag{34}$$

et l'équation de la variété caractéristique prendra la forme

$$\Box_1\overline{S}' - \left(\frac{\partial\overline{S}'}{\partial x^0}\right)^2 = 0, \tag{35}$$

ou, si nous posons $\overline{S}' = \overline{S}(x^1, x^2, x^3, x^4) - m_0 c x^0$,

$$\Box_1\overline{S} = m_0^2 c^2. \tag{36}$$

On peut alors démontrer, avec M. Gehéniau, que les trajectoires des points massiques et électromagnétiques sont les lignes transversales à la surface $x^0 = \text{const}$.

Remarquons que, dans un système de coordonnées normales, ou isothermes suivant l'expression de M. Chazy, et grâce à la relation complémentaire de Maxwell, le procédé variationnel est équivalent à la méthode des opérateurs.

Partons de l'équation (26)

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{e}\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}\Phi_\beta\right) - m_0^2 c^2 = 0.$$

Si nous posons

$$P_\alpha = \frac{\partial\Omega}{\partial x^\alpha} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{x^\alpha}, \qquad P_\beta = \frac{\partial\Omega}{\partial x^\beta} = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

et si l'on tient compte de la relation de Maxwell $\frac{\partial\sqrt{-g}\Phi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$, l'équation (31) est identique à

$$(37) \qquad \left[g^{\alpha\beta}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \frac{e}{e}\Phi_\alpha\right)\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^\beta} - \frac{e}{c}\Phi_\beta\right) - m_0^2 c^2\right]\psi = 0,$$

puisque, dans un tel système, $\Box_2\psi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}$.

De même, si l'on associe à la quantité $m_0 c$ l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^0}$, et si l'on tient compte de la relation $\frac{e}{c}\Phi_\alpha = m_0 c\varepsilon\Phi_\alpha$, l'équation (24) est identique à

$$(38) \qquad \begin{aligned}\Big[g^{\alpha\beta}&\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \varepsilon\Phi_\alpha\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^0}\right)\\ &\times\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^\beta} + \varepsilon\Phi_\beta\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^0}\right) - \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^0}\Big]\psi = 0.\end{aligned}$$

En particulier, lorsque le ds^2 est galiléen, on retrouve l'équation classique de la mécanique ondulatoire dans le cadre de la relativité restreinte.

Nous avons consacré, à l'intégration de M. De Donder, quatre Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, et un Mémoire sur cette question est en préparation.

Avant de terminer, nous voudrions faire remarquer que la méthode de Jacobi permet de définir très simplement la notion d'intégrale première en mécanique ondulatoire.

Reprenons l'équation (17)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \mathcal{H} = 0.$$

On sait alors (Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées* *partielles du premier ordre*), que l'intégration de cette équation se ramène à celle de

$$\frac{dx^\alpha}{d\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\alpha}, \qquad \frac{dP_\alpha}{d\theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\alpha}$$

et que toute intégrale A de ce système doit vérifier la relation

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} + (\mathcal{H}, A) = 0. \tag{39}$$

Nous dirons alors que (A) est une intégrale première de la mécanique ondulatoire, si elle satisfait à l'équation (39). Cette définition est équivalente à celle de M. Louis de Broglie, malgré la différence de forme; nous expliquerons ceci dans un prochain Mémoire consacré à l'intégration des équations de M. De Donder.

Remarquons que notre méthode est aussi valable dans le cas de la mécanique ondulatoire des particules douées de spin. Car l'on passe de la mécanique ondulatoire des particules sans spin à celles des particules douées en spin en linéarisant le second paramètre différentiel de Lamé-Beltrami, ce qui donne, à la place d'une équation du second ordre, un système d'équations du premier ordre, en sorte que l'équation de la variété caractéristique est

$$\square_1 S = 0.$$

Ainsi, M. Racah a démontré, en s'appuyant sur une méthode indiquée par M. Levi-Civita, que la surface de la variété caractéristique de l'équation de Dirac est donnée par l'équation

$$\square_1 \Omega = \frac{1}{c^2} P_4^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = 0.$$

Nous avons (¹) établi les équations des caractéristiques des équations du photon de M. Louis de Broglie. Nous avons alors démontré que la variété caractéristique des équations du premier groupe

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left[\left(\frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{B}_3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \chi \mu_0 c \left(\frac{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_4}{2}\right)\right]\Phi_{ik}$$

est

$$\square_1 \Omega = \frac{1}{c^2} P_4^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2 = 0.$$

Mais le même calcul appliqué au second groupe des équations du photon

$$\left[\left(\frac{\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{B}_3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \chi \mu_0 c \left(\frac{\mathfrak{A}_4 - \mathfrak{B}_4}{2}\right)\right]\Phi_{ik} = 0$$

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, **208**, 1939, p. 883.

donne

$$\Omega(x, y, z, t) \equiv 0.$$

NOTE. — **Je suis heureux de pouvoir remercier M. le professeur De Donder pour les remarques que l'illustre géomètre de Bruxelles a bien voulu nous adresser dans une lettre récente.**

M. De Donder me fait remarquer que si l'on pose

$$S = k \log \Psi,$$

l'application du principe variationnel

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\left[\sqrt{-g}\,J(\Psi)\right]}{\delta\Psi} = 0,$$

où

$$J(\Psi) = k^2 g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta} - 2k\frac{e}{c}\Phi^\alpha \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha} + \left[\frac{e^2}{c^2}\Phi^\alpha\Phi_\alpha - m_0^2 c^2\right]\Psi^2 = 0,$$

ne donne pas exactement l'équation (29); cela tient à ce que le terme $2k\frac{e}{c}\Phi_\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha}$, disparaît au cours du calcul. Ceci montre la différence qui oppose la méthode de M. De Donder à la méthode de M. Schrödinger.

Le théorème énoncé est exact, car si l'on part de l'équation (30); en posant

$$\Psi = e^{\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int \Phi_\alpha dx^\alpha}\,\overline{\Psi},$$

et si l'on remarque que

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{k}\frac{e}{c}\Phi_\alpha \overline{\Phi}\, e^{\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int \Phi_\alpha dx^\alpha} + e^{\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int \Phi_\alpha dx^\alpha}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\alpha},$$

et que

$$\Box^2\Psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\frac{1}{k}\frac{e}{c}\sqrt{-g}\,\Phi^\alpha\overline{\Psi}\, e^{\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int \Phi_\alpha dx^\alpha}\right] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left[\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} e^{\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int \Phi_\alpha dx^\alpha}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial x^\alpha}\right],$$

après un calcul assez long, l'on en déduit que

$$\Box_2\Psi - \frac{2}{k}\frac{e}{c}\Phi^\alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{k^2}\left[\frac{e^2}{c^2}\Phi^\alpha\Phi_\alpha - m_2^0 c^2\right]\Psi - \frac{1}{k}\frac{e}{c}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\Phi_\alpha\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\Psi$$
$$= \Box_2\overline{\Psi} - \frac{1}{k^2}m_0^2 c^2\overline{\Psi} = 0;$$

or la formule

$$\Psi = e^{\frac{1}{k}\frac{c}{e}\int \Phi_\alpha dx^\alpha}\,\overline{\Psi}$$

donne

$$\overline{\Psi} = e^{-\frac{1}{k}\frac{e}{c}\int \Phi_\alpha dx^\alpha}\,\Psi.$$