JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI LEBESGUE

Quelques conséquences simples de la formule d'Euler

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, n° 1-4 (1940), p. 27-43.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_27_0>

Quelques conséquences simples de la formule d'Euler;

Par Henri LEBESGUE,

A MM. Élie Cartan et Émile Borel.

1. Dès qu'Euler eut aperçu la formule

$$F + S - A = 2,$$

entre les nombres F, S, A de faces, de sommets, d'arêtes d'un polyèdre, dès que Legendre l'eut démontrée pour les polyèdres convexes, on en tira des conséquences simples, restées classiques, dont les deux principales sont :

Tout polyèdre a des faces triangulaires ou des sommets trièdres;
tout polyèdre a des faces n'ayant pas plus de 5 *côtés.*

A ces énoncés, aucun autre du même genre n'avait guère été ajouté depuis, quand deux géomètres, à l'occasion de recherches sur le problème des 4 couleurs, en formulèrent récemment un fort intéressant et qui sera mon point de départ :

Dans un polyèdre, il y a toujours un pentagone touchant un autre pentagone ou un hexagone (1);
dans un polyèdre, il y a toujours un pentagone touchant 2 *polygones ayant chacun au plus* 6 *côtés* (2).

Les énoncés précédents ont besoin d'être précisés : les polyèdres dont s'occupèrent Euler et Legendre sont ceux de genre zéro, dont

(1) P. Wernickle, *Math. Ann.*, Bd. 58, 1904, p. 419.
(2) Ph. Franklin, *Amer. J. of Math.*, Vol. 45, 1923, p. 225.

les faces sont simplement connexes et ont au moins 3 côtés. Ceux que l'on envisage dans le problème des 4 couleurs sont assujettis de plus à n'avoir que des sommets trièdres et que des faces ayant 5 côtés au moins; comme cette classe de polyèdres, que Legendre avait déjà envisagée, jouera un grand rôle dans la suite, il me sera commode de les appeler *polyèdres simples.*

En examinant les raisonnements de MM. Wernickle et Franklin, on reconnaît facilement que beaucoup d'énoncés, analogues aux leurs, peuvent être obtenus par le procédé qu'ils utilisent.

Ces nouveaux énoncés ne présentent pas, par eux-mêmes, un grand intérêt, ils sont d'ailleurs trop nombreux; mais il m'a semblé cependant utile d'en signaler quelques-uns afin de bien faire ressortir l'uniformité et le caractère élémentaire du raisonnement qui les fournit.

L'un des énoncés obtenus pourra cependant être retenu parce qu'il réunit les deux propriétés classiques citées ci-dessus :

Dans tout polyèdre de genre zéro, dont les faces sont simplement connexes et ont au moins 3 *côtés, il y a toujours des faces triangulaires dont un sommet est à* 5 *arêtes au plus ou des sommets trièdres par lesquels passe une face à* 5 *côtés au plus; ces associations (face, sommet) se présentent* 12 *fois au moins.*

2. Dans la formule d'Euler, introduisons les nombres F_i des faces à i côtés et les nombres S_i des sommets à i arêtes, on a

$$(1) \qquad F = \Sigma F_i, \qquad S = \Sigma S_i, \qquad 2A = \Sigma i F_i = \Sigma i S_i,$$

et la formule d'Euler s'écrit sous les deux formes

$$(2) \qquad \Sigma F_i(2-i) + 2\Sigma S_i = 4,$$

$$(3) \qquad \Sigma S_i(2-i) + 2\Sigma F_i = 4,$$

d'où, par combinaisons linéaires, une infinité d'autres formes. L'addition donne

$$(4) \qquad \Sigma F_i(4-i) + \Sigma S_i(4-i) = 8,$$

et, comme les termes du premier membre sont tous négatifs ou nuls, sauf pour $i = 3$, *dans tout polyèdre, il y a au moins* 8 *éléments (faces* *ou sommets*) *d'ordre* 3 (*à* 3 *côtés ou arêtes*); dans cet énoncé et les suivants je sous-entends : polyèdres de genre zéro, à faces simplement connexes et de 3 côtés au moins.

La formule précédente résulte de l'élimination de F_4 (et S_4); on peut, de même, éliminer F_i; par exemple, l'élimination de F_6 donne

$$\Sigma F_i(6-i) + 2\Sigma S_i(3-i) = 12, \tag{5}$$

donc, en remarquant que seuls les coefficients de F_3, F_4, F_5 sont positifs :

Dans tout polyèdre, il y a des faces ayant 5 *côtés au plus; s'il s'agit d'un polyèdre simple, il contient au moins* 12 *pentagones.*

Les deux énoncés classiques dont je viens de rappeler la démonstration, résultent donc de cette remarque :

Pour qu'une somme ait une valeur positive m, il faut que certains termes soient positifs et aient une somme au moins égale à m.

3. C'est le même fait qui est utilisé par M. Wernickle et par M. Franklin; on va le voir.

L'élimination de F_n entre (2) et (3) donne

$$2\Sigma F_i(n-i) + \Sigma S_i[2i + 2n - ni] = 4n; \tag{6}$$

pour $n = 7$,

$$2\Sigma F_i(7-i) + \Sigma S_i[14 - 5i] = 28, \tag{7}$$

et, pour les polyèdres simples,

$$4F_5 + 2F_6 - 2F_8 - 4F_9 \ldots = 28 + S. \tag{8}$$

Si donc à chaque angle de chaque face (je dirai simplement angle) d'un polyèdre simple, on attache le nombre $\frac{1}{3}$, la somme de ces nombres, étant égale à S, est inférieure au premier membre. Or, supposons qu'aucun pentagone ne touche un autre pentagone, ni un hexagone; les nombres $\frac{1}{3}$ attachés aux 15 angles ayant pour sommets les 5 sommets d'un pentagone, donnent une somme égale à 5, d'où, pour tous les pentagones, $5F_5$, et pourtant les angles des hexagones, lesquels n'ont pas été utilisés, donnent $6 \times \frac{1}{3} \cdot F_6 = 2F_6$; ainsi, les angles ayant pour sommets ceux des pentagones et les angles des hexagones, fourniraient à eux seuls $5F_5 + 2F_6 \geqq S + 28$, ce qui est absurde. D'où l'énoncé de M. Wernickle.

Si, dans un polyèdre simple, chaque pentagone touchait au plus un polygone de moins de 7 côtés, la contribution des angles de chaque hexagone serait 2; celle des angles ayant pour sommets ceux d'un pentagone ne touchant ni un autre pentagone, ni un hexagone serait, comme on vient de le dire, 5; celle des angles, autres que ceux d'hexagones, ayant pour sommets ceux d'un pentagone touchant un hexagone, donc pas de pentagone, serait $13 \times \frac{1}{3} = 4 + \frac{1}{3}$; celle des angles dont les sommets sont les 8 sommets de deux pentagones ayant un côté commun, serait 8×1, soit une contribution égale à 4 pour chaque pentagone.

Au total, ces contributions seraient au moins égales à $4F_5 + 2F_6$, ce qui est absurde, d'où l'énoncé de M. Franklin.

On voit que les deux Auteurs cités ont utilisé le même principe simple, mais appliqué à d'autres décompositions de F, de S et de A, que celles données par les formules (1), et à d'autres groupements des termes provenant de ces décompositions. Ces décompositions et ces groupements, dont l'idée première revient à M. Wernickle, ont été suggérés par des observations géométriques et leurs Auteurs les ont présentés géométriquement, mais le principe de la preuve reste le même. Je vais utiliser dans ce qui suit successivement une forme géométrique, puis une forme plus algébrique d'exposition.

4. Divisons les faces en pentagones p, en faces distinguées d, et en faces quelconques f.

L'entourage d'un pentagone P sera caractérisé par une suite de 5 symboles d, f, p, telle que f, f, f, f, f ou f, f, p, p, d, etc., déterminée à une permutation circulaire près.

En un sommet (f, f), commun à P et à 2 faces f, il y a 3 angles dont nous réunissons les 3 coefficients $\frac{1}{3}$ sur l'angle de P;

en un sommet (f, d), commun à P à un f et à un d, nous attribuons à l'angle de P la somme des deux nombres $\frac{1}{3}$ attachés primitivement aux angles de P et de d;

en un sommet (f, p), commun à P, à un autre pentagone p et à une face f, nous attribuons à l'angle de P (et à celui de p) la somme de son propre coefficient $\frac{1}{3}$ et de la moitié de celui de l'angle de f, soit $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$;

en un sommet (d, p), ou (d, d), ou (p, p), commun à P et à deux autres faces pentagonales ou distinguées, l'angle de P ne comptera que pour $\frac{1}{3}$.

Ceci fait, les angles d'un pentagone compteront, suivant l'entourage de celui-ci, au total pour la valeur donnée par le tableau suivant :

1. $f.f.f.f.f$, 5	9. $f.f.p.f.p$, 3	17. $f.f.p.d.p$, $\frac{8}{3}$	25. $f.d.d.d.p$, $\frac{13}{6}$
2. $f.f.f.f.d$, $\frac{14}{3}$	10. $f.f.d.d.d$, 3	18. $f.f.p.p.p$, $\frac{8}{3}$	26. $f.d.d.p.p$, $\frac{13}{6}$
3. $f.f.f.f.p$, 4	11. $f.f.d.p.d$, 3	19. $f.d.f.p.p$, $\frac{8}{3}$	27. $f.d.p.p.p$, $\frac{13}{6}$
4. $f.f.f.d.d$, $\frac{11}{3}$	12. $f.d.f.d.d$, 3	20. $f.p.f.d.p$, $\frac{5}{2}$	28. $f.d.p.d.p$, $\frac{13}{6}$
5. $f.f.d.f.d$, $\frac{11}{3}$	13. $f.d.f.d.p$, $\frac{17}{6}$	21. $f.p.f.p.p$, $\frac{7}{3}$	29. $f.p.d.d.p$, 2
6. $f.f.f.d.p$, $\frac{7}{2}$	14. $f.f.d.d.p$, $\frac{17}{6}$	22. $f.d.d.d.d$, $\frac{7}{3}$	30. $f.p.p.d.p$, 2
7. $f.f.f.p.p$, $\frac{10}{3}$	15. $f.f.d.p.p$, $\frac{17}{6}$	23. $f.d.p.d.d$, $\frac{7}{3}$	31. $f.p.p.p.p$, 2
8. $f.f.d.f.p$, $\frac{10}{3}$	16. $f.p.f.d.d$, $\frac{8}{3}$	24. $f.d.p.p.d$, $\frac{7}{3}$	32. Tous p et d, $\frac{5}{3}$

Ceci étant, supposons que les faces distinguées soient les hexagones, et reprenons la relation (8) sous la forme

$$4F_5 + 2F_6 \geqq 28 + S; \tag{9}$$

après les associations faites, les hexagones donnent chacun une contribution égale à 2, les pentagones dont les entourages sont des types (1), (2) et (3) donnent une contribution au moins égale à 4; donc, d'après (9), il y a nécessairement des pentagones dont les entourages sont des types (4) à (32), et, en particulier, le résultat obtenu par

M. Franklin. Nous pouvons le préciser, en remarquant que si P_k est le nombre des entourages du type k, on doit avoir

$$(10)\qquad P_4\left(4-\frac{11}{3}\right)+P_5\left(4-\frac{11}{3}\right) + P_6\left(4-\frac{7}{2}\right)+\ldots+P_{31}(4-2)+P_{32}\left(4-\frac{5}{3}\right)\geqq 28.$$

En particulier, le nombre des pentagones touchant 2 *polygones à moins de* 7 *côtés est au moins égal à*

$$12=28:\left(4-\frac{5}{3}\right),$$

Supposons maintenant que les faces distinguées soient les hexagones et les heptagones, et utilisons la formule (6) qui, pour $n=8$, et pour un polyèdre simple, s'écrit

$$6F_5+4F_6+2F_7-2F_9-4F_{10}-\ldots=32+2S,$$

d'où

$$16+S\leqq 3F_5+2F_6+F_7\leqq 3F_5+\frac{1}{3}(6F_6+7F_7).$$

En raisonnant comme précédemment, nous en concluons que : *si l'on prend pour polygones distingués d les hexagones et les heptagones, il y a au moins*

$$12=16:\left(3-\frac{5}{3}\right)$$

pentagones à entourages des types (13) *à* (32), *donc au moins* 12 *pentagones qui touchent chacun* 3 *polygones ayant* 7 *côtés au plus.* On pourrait ajouter que si l'entourage ne contient pas 4 polygones p ou d, il contient nécessairement un pentagone p ne touchant pas à la fois les deux autres polygones pentagonaux ou distingués.

Pour $n=9$, et pour les polyèdres simples, la formule (6) donne

$$8F_5+6F_6+4F_7+2F_8-2F_{10}-\ldots=36+3S,$$

$$(12)\qquad 12+S\leqq\frac{8}{3}F_5+\frac{1}{3}(6F_6+7F_7+8F_8);$$

donc, *en prenant les hexagones, heptagones, octogones pour polygones* *distingués, il y a, dans tout polyèdre simple, au moins*

$$12 = 12 : \left(\frac{8}{3} - \frac{5}{3}\right)$$

pentagones dont l'entourage est des types (20) *à* (32);

donc, *au moins* 12 *pentagones touchant chacun* 4 *pentagones, hexagones, heptagones, octogones ou touchant* 2 *pentagones non adjacents, et de plus, un pentagone, hexagone, heptagone ou octogone.*

L'inégalité, relative à une valeur n quelconque, qui est l'analogue de (9), (10), (12), s'écrit

$$2(n-5)F_5 + 2(n-6)F_6 + \ldots + 2F_{n-1} \geqq 4n + S(n-6).$$

ou

$$(13) \qquad \frac{4n}{n-6} + S \leqq \frac{2(n-5)}{n-6} F_5 + \frac{1}{3}[6F_6 + 7F_7 + \ldots + (n-1)F_{n-1}].$$

Comme les entourages des types (20) à (32) ne donnent plus que les valeurs $2\,{}^1/_2$, $2\,{}^1/_3$, $2\,{}^1/_6$, et que l'on a

$$\frac{2(n-5)}{n-6} = 2\tfrac{1}{2},\ 2\tfrac{1}{3},\ 2\tfrac{1}{6} \qquad \text{pour} \quad n = 10,\ 12,\ 18,$$

nous considérerons comme polygones distingués successivement ceux ayant de 6 à 9 côtés, puis ceux de 6 à 11 côtés, enfin ceux de 6 à 17 côtés, et cela nous donnera trois nouveaux énoncés affirmant l'existence de

$$12 = \frac{4n}{n-6} : \left[\frac{2(n-5)}{n-6} - \frac{5}{3}\right]$$

pentagones dont les entourages sont successivement des types (21) à (32) puis (25) à (32); enfin, (29) à (32). On peut dire, en particulier :

Dans tout polyèdre simple, il y a 12 *pentagones qui touchent* 4 *faces dont aucune n'a plus de* 9 *côtés ou qui touchent* 3 *pentagones non tous trois consécutifs;*

il y a aussi 12 *pentagones qui touchent* 5 *polygones dont aucun n'a plus de* 11 *côtés ou qui touchent un pentagone suivi de* 3 *faces dont aucune n'a plus de* 11 *côtés;*

il y a aussi 12 *pentagones qui touchent* 5 *faces dont aucune n'a plus de* 17 *côtés ou qui touchent* 4 *faces consécutives dont les deux extrêmes* *sont des pentagones et dont aucune des deux intermédiaires n'a plus de* 17 *côtés.*

3. Ces énoncés n'utilisent pas toutes les possibilités du raisonnement; d'abord, ils sont moins précis que la simple énumération des types d'entourages trouvés; ensuite, ils ne font état que du nombre 12 alors que l'on pourrait, dans chaque cas, écrire une formule telle que (10); mais tout cela se corrige facilement. Ce qui est un peu moins immédiat à corriger, c'est l'utilisation de l'inégalité (13) au lieu de l'égalité (6); je le ferai en écrivant cette égalité sous la forme classique

$$\Sigma F_i(6-i) = 12, \tag{14}$$

valable pour les polyèdres simples et qu'on obtient en remplaçant, dans (6), $S = S_3$ par $\frac{1}{3}\Sigma i F_i$.

Cette formule exprime que, si l'on attache à chaque angle de chaque face F_i un coefficient égal à $\frac{6}{i} - 1$, la somme de ces coefficients est égale à 12; donc, de quelque manière que l'on groupe ces coefficients, certains groupes donneront un total positif, et la somme de ces totaux positifs sera au moins égale à 12.

Si l'on associe les angles d'une même face, seules les faces pentagonales donneront un total positif. Ce total est égal à 1; d'où, l'existence, connue, d'au moins 12 faces pentagonales.

Convenons de faire passer le coefficient attaché à un angle d'une face non pentagonale à l'angle de la face pentagonale ayant le même sommet, s'il existe une telle face; s'il existait deux telles faces, d'où 2 angles de faces pentagonales de même sommet que l'angle étudié, nous ferions passer à chacun de ces 2 angles, par moitié, le coefficient de l'angle envisagé. Après ces transformations, les faces pentagonales restent seules à pouvoir fournir des contributions positives, d'ailleurs au plus égale à 1, d'où l'existence d'au moins 12 faces à contribution positive.

Recherchons quels sont les entourages des faces pentagonales à contributions positives. Un entourage sera donné par 5 nombres dont l'ordre circulaire est déterminé. Si l'un de ces nombres est un 5 ou un 6 il y a une face pentagonale ou hexagonale adjacente au pentagone que nous examinons, les angles de cette face ne modifieront en rien la contribution du pentagone examiné.

Un nombre $n \geq 7$, figurant dans le symbole d'un entourage, diminuera la contribution du pentagone examiné de $2\left(1 - \frac{6}{n}\right)$, de $\frac{3}{2}\left(1 - \frac{6}{n}\right)$ ou de $1 - \frac{6}{n}$ suivant que, dans l'ordre circulaire de l'entourage, n ne sera consécutif d'aucun 5, ou sera consécutif d'un seul 5 ou de deux 5.

Il résulte de tout cela que, dans un symbole d'entourage, un 6 a exactement le même effet qu'un 5, si ce 6 est situé entre deux 5, ou entre deux 6, ou entre un 5 et un 6; dans la recherche des entourages possibles, nous n'aurons donc pas à examiner le cas de trois 5 consécutifs, d'où les seules formes K_1, K_2, K_3, K_4, K_5; 5, K_1, K_2, K_3, K_4; 5, 5, K_1, K_2, K_3; 5, K_1, 5, K_2, K_3; 5, 5, K_1, 5, K_2, dans lesquels les K sont au moins égaux à 6.

Pour (K_1, K_2, K_3, K_4, K_5), une face sera à contribution positive si l'on a

$$1 + 2\sum\left(\frac{6}{K_i} - 1\right) > 0, \qquad \sum\frac{1}{K_i} > \frac{3}{4};$$

pour (5, K_1, K_2, K_3, K_4), il faudrait avoir

$$1 + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{6}{K_1} - 1\right) + \left(\frac{6}{K_4} - 1\right)\right] + 2\left[\left(\frac{6}{K_2} - 1\right) + \left(\frac{6}{K_3} - 1\right)\right] > 0,$$

$$3\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_4}\right) + 4\left(\frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}\right) > 2;$$

pour (5, 5, K_1, K_2, K_3), il faudrait avoir

$$1 + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{6}{K_1} - 1\right) + \left(\frac{6}{K_3} - 1\right)\right] + 2\left(\frac{6}{K_2} - 1\right) > 0,$$

$$9\left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_3}\right) + \frac{12}{K_2} > 4;$$

pour (5, K_1, 5, K_2, K_3), il faudrait avoir

$$1 + \left(\frac{6}{K_1} - 1\right) + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{6}{K_2} - 1\right) + \left(\frac{6}{K_3} - 1\right)\right] > 0,$$

$$\frac{2}{K_1} + 3\left(\frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}\right) > 1;$$

pour $(5, 5, K_1, 5, K_2)$, il faudrait avoir

$$1 + \left(\frac{6}{K_1} - 1\right) + \left(\frac{6}{K_2} - 1\right) > 0, \qquad \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} > \frac{1}{6}.$$

La résolution en nombres entiers au moins égaux à 6 de ces inégalités n'est qu'affaire de patience, et l'on a ainsi ce résultat :

Dans tout polyèdre simple il y a au moins 12 *pentagones dont les entourages appartiennent au tableau suivant :*

$\overline{6, 6, 7, 7, 7}$	5, 7, 6, 6, 12	5, 7, 5, 7, 10	5, 11, 5, 6, 8
$\overline{6, 6, 6, 7, 9}$	5, 8, 6, 6, 10	5, 7, 5, 8, 8	5, 17, 5, 6, 7
$\overline{6, 6, 6, 6, 11}$	5, 5, 7, 6, 12	5, 8, 5, 6, 11	5, 5, 11, 5, 13
5, 6, 6, 6, 17	5, 5, $\overline{7, 7, 8}$	5, 8, 5, 7, 9	5, 5, 10, 5, 14
5, 6, $\overline{6, 7}$, 11	5, 5, 8, 6, 10	5, 9, 5, 6, 10	5, 5, 9, 5, 17
5, 6, $\overline{6, 8}$, 8	5, 6, 5, 7, 12	5, 10, 5, 7, 8	5, 5, 8, 5, 23
5, 6, $\overline{6, 9}$, 7	5, 6, 5, 8, 10	5, 11, 5, 6, 9	5, 5, 7, 5, 41
$\overline{5, 6, 7, 7, 8}$	5, 7, 5, 6, 13	5, 13, 5, 7, 7	5, 6, 6, 5, n

Dans ce tableau les nombres surmontés d'un trait peuvent être permutés de façon quelconque; de plus, pour un ordre circulaire déterminé, tout nombre supérieur à 5 *peut être abaissé jusqu'à* 6, *et même jusqu'à* 5 *s'il est situé entre deux* 6, *ou entre deux* 5 *ou entre un* 6 *et un* 5, *initialement ou par suite d'abaissements déjà effectués.*

6. Cet énoncé contient bien entendu tous ceux que nous avions donnés précédemment; on pourrait d'ailleurs améliorer les renseignements fournis par le tableau obtenu en utilisant les coefficients attachés aux angles dont le sommet n'appartient à aucune face pentagonale. Si XAY est un tel angle et si X′A′Y′ est l'angle opposé à la troisième arête AZA′, issue de A, à l'extrémité A′ de cette arête, on peut convenir de transférer le coefficient de XAY à X′A′Y′; on pourrait au contraire ajouter au coefficient de AA′X′ la moitié du coefficient de A′AX avant de transférer le coefficient de AA′X′ comme il a été dit au paragraphe **5**. Bien d'autres règles pourraient être envisagées; chacune fournira des renseignements différents.

On aurait pu aussi se contenter de chercher pour les pentagones les entourages ne contenant pas de pentagones, puis on aurait cherché les entourages ne contenant aucun pentagone d'un système de deux pentagones adjacents, puis ceux de trois pentagones formant une figure connexe, etc. En réalité on serait vite arrêté dans une pareille énumération, il faudrait réussir à en tirer quelque fait général à noter.

Cette énumération nouvelle ne servirait à rien pour le cas d'*un polyèdre simple ne contenant que des pentagones isolés les uns des autres;* mais, dans ce cas, on peut avoir des résultats concernant les entourages d'hexagones. Pour varier quelque peu, je vais montrer cela en supposant les coefficients $\frac{6}{K} - 1$ attachés aux côtés des faces. Chaque arête porte deux côtés que nous dirons confondus; convenons de transférer le coefficient de chaque côté d'une face pentagonale au côté confondu, et de transférer le coefficient d'un côté d'une face à plus de 7 côtés au côté confondu si celui-ci appartient à une face hexagonale. Après ces transferts, les seuls nombres attachés aux côtés qui soient positifs sont ceux des côtés d'hexagones et d'heptagones confondus avec des côtés de pentagones; en groupant les nombres par faces, les hexagones et les heptagones seuls pourraient donc donner des totaux positifs. Mais, puisqu'il n'y a sur le polyèdre que des pentagones isolés, il y a au plus trois côtés d'un même heptagone qui sont confondus avec des côtés de pentagones, la valeur maxima du total des nombres attachés aux côtés d'un heptagone est donc

$$3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + 4\left(-\frac{1}{7}\right) < 0;$$

ainsi les hexagones seuls peuvent donner des sommes positives. En examinant successivement le cas des hexagones touchant 1 pentagone, 2 pentagones, 3 pentagones on trouve que, *dans tout polyèdre simple ne contenant que des pentagones isolés, il y a au moins* 20 *hexagones dont l'entourage est formé, soit d'un pentagone et de* 5 *faces à* 7 *côtés au plus; soit de deux pentagones, de* 3 *faces à* 7 *côtés au plus et d'une face à* 9 *côtés au plus; soit de trois pentagones, de* 2 *faces à* 7 *côtés au plus et d'une face à* 14 *côtés au plus; soit de trois pentagones, d'un hexagone ou heptagone, d'un hexagone, heptagone ou octogone et d'une face à* 9 *côtés au plus.*

7. Ce qui précède montre la diversité extrême des combinaisons que suggère le point de vue géométrique; le point de vue plus algébrique a, par contre, l'avantage de donner plus de généralité aux résultats obtenus. Écrivons la formule d'Euler, la sommation étant étendue aux angles, sous la forme

$$\sum_{\text{angles}} \left(\frac{6}{i} - 1\right) = 12; \tag{15}$$

si l'on ne groupe pas les parenthèses, le principe que nous appliquons permet seulement de conclure à l'existence de 12 pentagones; c'est le raisonnement classique. Mais groupons deux à deux des angles de faces différentes de façon que chaque angle soit pris le même nombre de fois, soit k fois. Appelons $k\mathrm{N}_{f_1,f_2}$ le nombre de couples d'angles pour lesquels i a les valeurs f_1 et f_2, la formule s'écrit

$$\sum_{f_1,f_2} \mathrm{N}_{f_1,f_2}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{3}\right) = 2, \tag{16}$$

d'où l'existence de couples pour lesquels la parenthèse est positive; c'est-à-dire de couples

$$f_1, f_2 = 5,\ 5 \ \text{ou}\ 5,\ 6\ \text{ou}\ 5,\ 7,$$

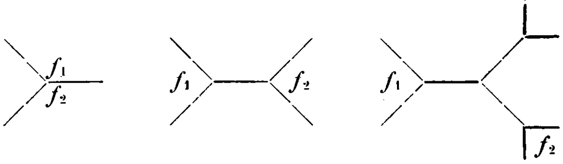
comme le montre la recherche des solutions entières et au moins égales à 5 de l'inégalité

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} > \frac{1}{3}.$$

En calculant la valeur de la parenthèse pour chacune des solutions et en appliquant toujours la même remarque élémentaire ou voit que, *dans tout polyèdre simple, on a*

$$\mathrm{N}_{5,5} + \frac{1}{6}\mathrm{N}_{5,6} + \frac{1}{21}\mathrm{N}_{5,7} \geq 30. \tag{17}$$

Quant aux groupements possibles ce pourra être, entre autres que l'examen de figures suggérera, ceux qu'indiquent les schémas suivants :



Avec le premier groupement, le nombre N_{f_1,f_2} représente le nombre d'arêtes communes à deux faces à f_1 et f_2 côtés, d'où, en particulier, l'existence de pentagones touchant un autre pentagone, ou un hexagone ou un heptagone; résultat moins précis que celui de M. Wernickle, mais analogue.

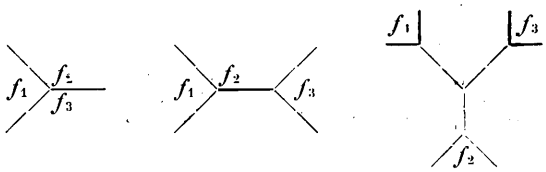
Si l'on groupe les angles de faces différentes par trois, chaque angle intervenant dans k groupes, on représentera par kN_{f_1,f_2,f_3} le nombre des groupes où interviennent des faces à f_1, à f_2 et à f_3 côtés. La formule d'Euler s'écrit

$$\sum_{f_1,f_2,f_3} N_{f_1,f_2,f_3}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}-\frac{1}{2}\right)=2. \tag{18}$$

En opérant toujours de la même manière, on voit que, *dans tout polyèdre simple, on a*

$$N_{5.5.5}+\frac{2}{3}N_{5,5,6}+\frac{3}{7}N_{5,5,7}+\frac{1}{4}N_{5,5,8}+\frac{1}{9}N_{5,5,9}+\frac{1}{3}N_{5,6,6}+\frac{2}{21}N_{5.6.7}\geqq 20. \tag{19}$$

Parmi les groupements possibles on notera les suivants :

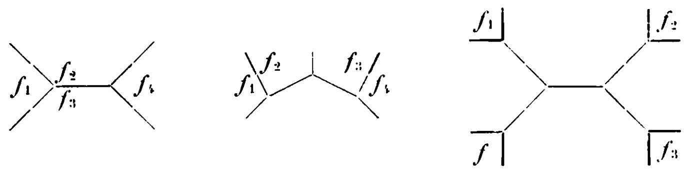


Avec le premier, N_{f_1,f_2,f_3} représente le nombre des sommets en lesquels se rencontrent trois faces ayant f_1, f_2, f_3 côtés et l'inégalité précédente entraîne alors le résultat de M. Wernickle en le précisant.

Pour les groupements de 4 angles, on aura de même

$$\sum_{f_1,f_2,f_3,f_4} N_{f_1,f_2,f_3,f_4}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\frac{1}{f_4}-\frac{2}{3}\right)=2, \tag{20}$$

avec, par exemple, les dispositions suivantes



On peut remarquer d'ailleurs que l'on a aussi des égalités telles que

$$(21)\qquad \sum_{f_1,f_2,f_3,f_4} N_{f_1,f_2,f_3,f_4}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{1}{3}\right)=2,$$

$$(22)\qquad \sum_{f_1,f_2,f_3,f_4} N_{f_1,f_2,f_3,f_4}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}-\frac{1}{2}\right)=2,$$

d'où, par combinaisons linéaires, de nouvelles relations. Ainsi, on aura

$$(23)\qquad \sum_{f_1,f_2,f_3,f_4} N_{f_1,f_2,f_3,f_4}\left(\frac{2}{f_1}+\frac{2}{f_2}+\frac{1}{f_3}+\frac{1}{f_4}-1\right)=4;$$

ou encore

$$(24)\qquad \sum_{f_1,f_2,f_3,f_4} N_{f_1,f_2,f_3,f_4}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{1}{f_3}-\frac{1}{f_4}\right)=0.$$

Lorsque le second membre est nul, comme dans (24), notre principe ne peut plus être appliqué de la même manière; il faudra écrire que tous les crochets sont ou tous nuls, ou sont effectivement des deux signes. Chaque égalité fournira donc des résultats qui, d'ailleurs, ne seront pas tous identiques; pour choisir entre ces résultats il faudrait poursuivre un but précisé.

8. Je me suis borné aux polyèdres simples parce que mon point de départ était le théorème de MM. Wernickle et Franklin, et parce que ces polyèdres donnent des énoncés relativement simples; le cas des polyèdres quelconques pourrait être abordé par les mêmes procédés. Je vais me limiter aux *polyèdres de genre zéro à faces simplement connexes et à au moins* 3 *côtés*.

Il nous faut considérer F, S et A comme des sommes; convenons, par exemple, d'attacher à chaque angle un coefficient $\frac{1}{s}$ si du sommet partent s arêtes, un coefficient $\frac{1}{f}$ si la face est à f côtés, deux coefficients $\frac{1}{4}$ correspondant aux 2 côtés de l'angle; soit, au total, un coefficient $\frac{1}{s}+\frac{1}{f}-\frac{1}{2}$.

Si α_f^s est le nombre des angles dont le sommet est à s arêtes et la face à f côtés, on a

$$\sum_{s,f} \alpha_f^s \left(\frac{1}{s}+\frac{1}{f}-\frac{1}{2}\right) = 2. \tag{25}$$

Donc il y a des angles pour lesquels le crochet est positif et, par la résolution de l'inégalité diophantienne

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{f} > \frac{1}{2},$$

on voit que : *dans tout polyèdre de genre zéro (je sous-entends les autres conditions), il y a des faces triangulaires dont un sommet est à moins de* 6 *arêtes ou un sommet trièdre par lequel passe une face à moins de* 6 *côtés.*

C'est là une précision apportée aux deux énoncés classiques : *dans tout polyèdre de genre zéro il y a des faces triangulaires ou des sommets trièdres et il y a des faces à moins de* 6 *côtés et des sommets à moins de* 6 *arêtes.*

Quant aux nombres des associations prévues par l'énoncé, ils sont limités inférieurement par l'inégalité

$$\alpha_3^3 + \frac{1}{2}(\alpha_4^3 + \alpha_3^4) + \frac{2}{5}(\alpha_5^3 + \alpha_3^5) \geqq 12. \tag{26}$$

9. On pourra ensuite grouper les crochets systématiquement 2 à 2, 3 à 3, etc., ou faire des groupements suggérés par des considérations géométriques; c'est à quoi je vais me borner.

Groupons les angles de même sommet, ce qui conduit à attacher à chaque sommet un coefficient

$$\sum\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{f}-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{s}{2} + \sum \frac{1}{f};$$

ceci revient, en réalité, à utiliser la formule (3). Avec une notation qu'on comprendra sans explication, on a donc

$$\sum S^{s}_{f_1, f_2, \ldots, f_s}\left(1 - \frac{s}{2} + \sum \frac{1}{f_i}\right) = 2. \tag{27}$$

Dans l'inégalité à résoudre

$$1 - \frac{s}{2} + \sum \frac{1}{f_i} > 0,$$

$\sum \frac{1}{f_i}$ a pour valeur maximum $\frac{s}{3}$, donc on doit avoir

$$\frac{s}{3} > \frac{s}{2} - 1, \qquad s < 6;$$

on résout donc l'inégalité pour $s = 3, 4, 5$ et l'on en déduit que :

dans tout polyèdre de genre zéro il y a, soit des sommets trièdres autour desquels on rencontre des faces dont les nombres de côtés sont au plus ceux des associations

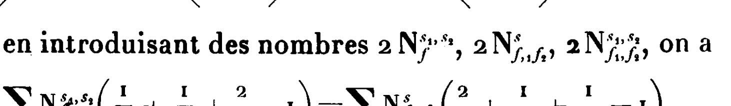
$$3, 6, n;\quad 3, 7, 41;\quad 3, 8, 23;\quad 3, 9, 17;\quad 3, 10, 14;$$
$$3, 11, 13;\quad 4, 5, 19;\quad 4, 6, 11;\quad 4, 7, 9;\quad 5, 5, 9;\quad 5, 6, 7;$$

— soit des sommets tétraèdres autour desquels on rencontre dans un ordre quelconque des faces à nombres de côtés majorés par les associations

$$3, 3, 3, n;\quad 3, 3, 4, 11;\quad 3, 3, 5, 7;\quad 3, 4, 4, 5;$$

— soit des sommets pentaèdres avec 4 faces triangulaires et une face à 5 côtés au plus.

Bien entendu, on a aussi le théorème corrélatif par groupement des angles d'une même face. Groupons maintenant des angles associés à une arête de l'une des manières indiquées ici :



D'où, en introduisant des nombres $2\,N^{s_1, s_2}_{f}$, $2\,N^{s}_{f_1, f_2}$, $2\,N^{s_1, s_2}_{f_1, f_2}$, on a

$$\begin{aligned} \sum N^{s_1, s_2}_{f}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{2}{f} - 1\right) &= \sum N^{s}_{f_1, f_2}\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - 1\right) \\ &= \sum N^{s_1, s_2}_{f_1, f_2}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - 1\right) = 2, \end{aligned} \tag{28}$$

et, par résolution d'inégalités, on trouve pour le premier cas :

$f = 3$ avec 3, n ou 4, 11 ou 5, 7 pour majorer s_1 et s_2 ;
ou $f = 4$ avec $s_1 = 3$, $s_2 \leqq 5$;
ou $f = 5$ avec $s_1 = s_2 = 3$.

Pour le deuxième cas, il suffit d'intervertir les s et les f. Enfin, pour le troisième, les quatre nombres s_1, s_2, f_1, f_2, rangés dans un ordre convenable, sont majorés par les associations

3, 3, 3, n; 3, 3, 4, 11; 3, 3, 5, 7; 3, 4, 4, 5.

Dans le dernier de ces trois cas nous retrouvons des nombres déjà obtenus; ces nombres sont aussi relatifs plus généralement aux groupements des angles deux à deux, deux angles associés ne devant appartenir ni à la même face, ni au même sommet. Si les deux angles associés étaient assujettis à appartenir à la même face, ce serait les nombres du premier de ces trois cas qui conviendraient; s'ils devaient appartenir au même sommet, ce serait les nombres du second cas.

Pour tirer de ces nombres au moins un énoncé en langage ordinaire, *convenons de dire qu'une arête appartient à un élément d'ordre m si elle aboutit à un sommet à m arêtes ou si elle limite une face à m côtés; alors, dans tout polyèdre de genre zéro il y a au moins* 12 *arêtes appartenant soit à deux éléments d'ordre* 3 *et à un élément d'ordre* 5 *au plus, soit à un élément d'ordre* 3 *et à deux éléments d'ordre* 4.